UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Proyecto de servicio social de la carrera de Matemáticas: una introducción a la interpretación estocástica de la mecánica cuántica

Alumno: Alejandro Erick David Salinas Hernández

Asesor: Dr. Francisco Javier Sevilla Pérez

22 de Septiembre del 2023

Resumen

En este trabajo exponemos una introducción a la teoría de la mecánica estocástica, formulada por Edward Nelson, y que pretende explicar a la mecánica cuántica desde un punto de vista clásico, bajo la suposición de que las partículas cuánticas se mueven siguiendo un movimiento Browniano causado por ´´fluctuaciones cuánticas". Iniciamos discutiendo brevemente los problemas con la interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica, y los intentos de Schrodinger para explicarla de manera alternativa en términos de procesos de difusión reversibles. Posteriormente, estudiamos los elementos de los procesos de Markov de difusión y cálculo estocástico de Ito, teoría sobre la que descansa la teoría de la mecánica estocástica. Después, desarrollamos las ideas originales planteadas por Nelson en su artículo de 1966 ´´Derivation of the Schrodinger Equation from Newtonian Mechanics". Finalmente, hacemos un recorrido por las diversas críticas y fallos de la teoría de Nelson, sus éxitos y algunos avances recientes.

Índice general

Capítulo 1

Antecedentes

En este capitulo revisamos sobre las principales críticas a la interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica y las motivaciones para la formulación de las llamadas teorías de variables ocultas, así como el desarrollo histórico de las teorías estocásticas de la mecánica cuántica, cuyos primeros pasos fueron dados por Schrodinger, seguido por Fenyes, y finalmente llegamos a las ideas que subyacen a la teoría de la mecánica estocástica de Nelson y su contraste conceptual con una teoría física ´´tradicional".

1.1. Mecánica cuántica según la escuela de Copenhague

En esta sección seguimos la discusión de Carlen [1] sobre los defectos conceptuales que acarrea el entendimiento tradicional de la mecánica cuántica.

En la mecánica cuántica de Copenhague o también llamada "ortodoxa", propuesta por algunos de los pioneros de la teoría cuántica como Bohr y Heisenberg, se postula que la descripción completa del estado de un sistema físico está descrito por una función cuadrado integrable (es decir, que la integral del cuadrado de la función es convergente y normalizable) en el espacio de configuraciones, esta es la famosa función de onda, denotada normalmente con la letra griega ψ. El resultado de una medición en mecánica cuántica es aleatorio, incluso conociendo ψ a lo más que se puede esperar es poder conocer una estadística del resultado de dicha medición. La función de onda ψ no es observable o medible directamente ya que en general es una función compleja, la cantidad que sí es medible es el modulo complejo de la función de onda, $|\psi|^2$, que se interpreta como una densidad de probabilidad siempre que esté normalizada (regla de Born). De este modo, la probabilidad de que una partícula se encuentre en un intervalo espacial A en un tiempo t viene dada por:

$$P_t(A) = \int_A |\psi(x,t)|^2 dx. \tag{1.1}$$

La función de onda ψ se obtiene de resolver la ecuación fundamental de la mecánica cuántica, la ecuación de Schrodinger:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \big(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\big)\psi(x,t), \tag{1.2}$$

donde V es un potencia al que se encuentra sometido la partícula, y el operador Hamiltoniano viene dado por:

$$H_0 = \big(- \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \big). \tag{1.3}$$

La solución al problema de condición inicial para la ecuación de Schrodinger tiene solución:

$$\psi(x,t) = e^{-itH_0}\psi(x.0). \tag{1.4}$$

Si se prepara un sistema según la condición $\psi(0,t)$, dado el Hamiltoniano del sistema y una vez resuelta la ecuación de Schrodinger para el sistema en dicha configuración, es posible predecir las probabilidades para los resultados de las mediciones de un experimento dado, y al comparar dichas predicciones con las mediciones reales, ambas estarán en concordancia.

El éxito del formalismo matemático de la ecuación de Schrodinger y de la interpretación de la función de onda ha sido corroborado experimentalmente de manera amplia, por lo que no ha habido una preocupación generalizada en torno a la afirmación de que la evolución completa de un sistema cuántico se encuentra en la función de onda y que no es necesario introducir estructuras adicionales (de hecho, que no existen estructuras adicionales, según la interpretación de Bohr y Heisenberg), e incluso se ha formado al respecto una cultura sobre concentrarse en los cálculos y no preocuparse mucho por las cuestiones de las interpretaciones de la mecánica cuántica.

Una consecuencia de relegar la aleatoriedad puntualmente al momento de la medición en la interpretación de Copenhague tiene como consecuencia que no haya historia previa a la medición. La aleatoriedad en la mecánica cuántica tiene una naturaleza distinta a la aleatoriedad presente en la física clásica, en la que la aleatoriedad es producto del desconocimiento de la información completa respecto a un sistema (por ejemplo, debida a una gran cantidad de interacciones entre las partes constitutivas de un sistema en donde es imposible calcular todas las posiciones y velocidades de sus componentes), pero esa aleatoriedad no se consideraba como un aspecto fundamental de la naturaleza.

La ausencia de historias y de trayectorias físicas en la imagen cuántica "ortodoxa" es más problemática cuando se toma en cuenta que al ser una teoría fundamental de la naturaleza no se restringe al dominio atómico, sino que debería aplicar incluso a los sistemas "clásicos" o macroscópicos. De hecho el mismo Erwin Schrodinger no aceptó la imagen de Niels Bohr, e incluso propuso la famosa paradoja conocida como "el gato de schrodinger" en forma de critica.

En dicha paradoja se plantea la situación en la que un gato es introducido en una caja en la que hay un mecanismo tóxico que se libera si un aparato de medición detecta el decaimiento radiactivo de un átomo y en consecuencia el gato muere. Las probabilidades de decaimiento se pueden calcular usando el formalismo de la mecánica cuántica. El experimento se realiza , sin embargo, según la interpretación "ortodoxa", el gato no estaría en un estado definido hasta el momento de abrir la caja, y en caso de haber muerto no se sabría en qué momento exacto lo hizo.

Por argumentos como este, desde los inicios de la mecánica cuántica ha habido intentos por evitar los problemas de la interpretación de Copenhague y evitar las paradojas que implica, estos intentos han sido conocidos como 'teorías de variables ocultas', que proponen agregar estructuras o variables adicionales a la teoría cuántica, de modo que la función de onda de un sistema ya no se considera como la descripción completa de un estado, sino que las nuevas variables explican la historia inexistente en la interpretación de Copenhaguen, siempre que estas historias sean físicamente plausibles, y a la vez conservando el formalismo computacional que ya posee la mecánica cuántica.

1.2. Erwin Schrodinger como precursor de la mecánica estocástica

Las fuentes originales donde Schrodinger discute sus investigaciones sobre la reversibilidad del movimiento browniano y la mecánica cuántica son difíciles de obtener, sin embargo, Zambrini [2] ofrece una discusión muy clara al respecto la cual vamos a seguir.

Erwin Schrodinger no aceptó la interpretación de Copenhague, incluso la llamó “casi psiquica”. En 1931 y 1932 intentó trabajar en una derivación probabilística de su ecuación. Su punto de partida fue la observación de Eddington: dada ψ que satisfaga la ecuación:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \tag{1.5}$$

dado un Hamiltoniano H, entonces la probabilidad $\psi\psi^*$ puede ser entendida como el producto de dos ondas que viajan en sentidos opuestos en el tiempo, con ψ^* como información deducida del conocimiento a partir de tiempo posterior.

La ecuación tiene similitud con la ecuación de calor:

$$-\hbar\frac{\partial\theta_*}{\partial t} = H\theta_*. \tag{1.6}$$

Schrodinger observó que desde un punto de vista físico la diferencia entre estas ecuaciones es que la ecuación de calor describe únicamente procesos irreversibles. Matemáticamente esto significa que en la ecuación de calor 1.6 si el dominio se cambia a $\mathbb{R}\times(-\infty,0)$, entonces $\theta_*(x,-t)$ no es solución de este problema. Schrodinger propuso que esta falta de simetría no es intrínseca al fenómeno de difusión, sino a la forma en la que la dinámica de la ecuación de difusión es establecida.

Schrodinger consideró el caso más sencillo en el que $V=0$ ($H=H_0$). Supongamos que un observador O_A observa la difusión de una partícula en tiempos $-\frac{T}{2}$ y $\frac{T}{2}$, posteriormente un observador O_B observa la difusión en un tiempo t tal que $-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}$. Una cuestión es si es posible usar las observaciones de O_A para predecir la de O_B

Schrodinger notó que para una condición inicial real $\theta_{*-T/2}$, y dado que estamos suponiendo el caso libre de potencial $V=0$, esta condición inicial se puede interpretar como la densidad de probabilidad inicial de la difusión. La ecuación de difusión 1.6 con $H=H_0$ es un problema de evolución bien planteado en el intervalo de tiempo $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$, y del mismo modo lo es el problema de condición final $\theta_{T/2}$ para la ecuación retrospectiva:

$$\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t} = H\theta. \tag{1.7}$$

Si ambas condiciones de frontera son dadas, es decir, las densidades de probabilidad en $t=-\frac{T}{2},\frac{T}{2}$, cual es la evolución de esta probabilidad para $t\in(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$.

La respuesta de Schrodinger es que lo es el producto

$$(\theta\theta_*)(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in I. \tag{1.8}$$

Donde θ_* y θ son soluciones a los problemas 1.6 1.7 tales que las condiciones de frontera se satisfacen. La solución 1.8 representa una dinámica reversible temporalmente ya que $\theta \longleftrightarrow \theta_*$ bajo inversión temporal, y este producto es un análogo clásico a la probabilidad cuántica $\psi\psi^*$.

Sin embargo, 1.8 no posee el carácter ondulatorio, según Schrodinger debido a que el coeficiente de difusión es real, pero no consideró que se tratase de una mera coincidencia y no descartó que la mecánica cuántica podría ser descrita en un intervalo de tiempo I dadas densidades de probabilidad inicial y final.

Un hecho no muy conocido es que estas investigaciones de Schrodinger influenciaron al matemático Andrei Kolmogorov en sus investigaciones pioneras en torno a procesos estocásticos de Markov en las que caracterizó la reversibilidad y la dualidad de procesos de difusión, e incluso hizo mención explicita de las investigaciones hechas por Schrodinger como punto de interés de la reversibilidad de procesos estocásticos para la física [3].

1.3. Mecánica estocástica: el movimiento browniano universal

Los intentos de obtener una formulación probabilista de la mecánica cuántica continuarían en los soguientes años. En 1952 Imre Fényes, influenciado por las inevestigaciones de Schrodinger, descubrió que la ecuación de Schrodinger podía ser interpretada como una ecuación de difusión de un proceso de Markov usando principios variacionales en un contexto de procesos de difusión.

Años después, el matemático Edward Nelson hizo su propia teoría y obtuvo una derivación de la ecuación de Schrodinger haciendo uso de herramientas modernas de la teoría de la probabilidad. El propósito de Nelson, al menos inicialmente, tal como expresa al inicio de su trabajo pionero Nelson(1966), era argumentar que el abandono radical de la visión clásica de la física al abordar a la mecánica cuántica era innecesaria, siendo que era posible, tal como mostraría en dicho trabajo, hacer una derivación en términos ´´clásicos" de la ecuación central de la mecánica cuántica, la ecuación de Schrodinger. Con este fin, plantea la hipótesis de que toda partícula se mueve con un movimiento browniano (un proceso de Markov) con coeficiente de difusión inversamente proporcional a la masa de la partícula, y el efecto de las fuerzas externas sobre la partícula se expresa mediante la segunda ley de Newton, para lo que se tiene que definir un análogo estocástico de la aceleración, que será la aceleración media estocástica. Nelson también remarca la cuestión de la reversibilidad, mientras que en la teoría clásica del movimiento browniano en un fluido se toma en cuenta la fricción, para el movimiento de los electrones se asume que estos de mueven en ausencia de fricción en el vacío o en el ´´éter", la existencia de fricción significaría que le movimiento rectilíneo puede ser distinguido de un reposo absoluto.

Un ejemplo de la imagen física que plantea Nelson [4] es que en el caso del estado base del átomo de hidrogeno, el electrón se encuentra en equilibrio dinámico entre la fuerza aleatoria que provoca el movimiento aleatorio y la fuerza de Coulomb. La trayectoria del electrón es irregular y la mayor parte del tiempo se encuentra cercano al núcleo, par alejarse en ocasiones, pero mostrando una tendencia de acercamiento al núcleo, siendo esta descripción del movimiento simétrica en el tiempo. La analogía clásica de esta situación es aquella de una partícula en una suspensión coloidal, en equilibrio dinámico entre las fuerzas osmóticas y la fuerza de gravedad. Es una imagen comparativa útil pero el electrón posee otros estados energéticos y otros estados de equilibrio dinámico. Nelson remarca que su teoría es contraria a la mecánica cuántica en el sentido de que la descripción de los procesos físicos cuánticos se da por medio de nociones clásicas de movimiento en el espacio, y que sin embargo sus predicciones serían las mismas que las de la mecánica cuántica. La teoría de la mecánica estocástica, al menos en sus inicios se restringe al caso de la mecánica cuántica no relativista y sin spin.

Wolfgang [5] comenta que en la física existe de manera implicita la suposición de que para modelar los sistemas físicos se hace la identificación siguiente: el hamiltoniano del sistema H_s, el hamiltoniano del ambiente, H_a, y la interacción entre estos H_i ,y se supone usualmente que la interacción del sistema con el ambiente es pequeña: $H_i \ll H_s$, y que es posible hacer un tratamiento perturbativo, de modo que el modelo pueda reducirse al hamiltoniano del sistema H_s. En contraposición a lo mencionado anteriormente, la hipótesis de Nelson es que la interacción de las partículas con el universo no es una perturbación pequeña, sino el comportamiento esencial de los sistemas cuánticos, y esta interacción no puede conocerse en detalle, sino que sólo es posible conocer sus propiedades estadísticas.

Capítulo 2

Procesos de difusión

En este capitulo revisamos brevemente la teoría de los procesos de difusión de Markov, teoría sobre la que reposa la mecánica estocástica de Nelson. Primero revisamos las definiciones elementales y las ecuaciones básicas de evolución de la densidad de probabilidad de un proceso de markov difusivo, que son las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov y la ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov. Posteriormente estudiamos a los procesos de difusión como ecuaciones diferenciales estocásticas. La discusión extendida y detallada de estos temas se encuentra en [6][7] y [8].

2.1. Procesos de Markov y Martingalas

Un proceso estocástico es un sistema que evoluciona en el tiempo de manera probabilística, o dicho de otro modo, que en cada tiempo evoluciona según una variable aleatoria. Un proceso estocástico tiene un espacio de estados, que representa los posibles valores que puede tomar el proceso, y un conjunto de índices que representa los tiempos que toma.

Definición 1. *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias indexadas $(X(t))_{t\in I}$, con $I = \mathbb{N}, \mathbb{R}$.*

Vamos a considerar en este trabajo que trabajamos con procesos estocásticos continuos tanto en el espacio de estados como en el tiempo.

Dado un proceso estocástico podemos medir los valores $x_{t_j} := X(t_j)$, con $j = 1, 2, 3, ..$ y suponemos que existe la jerarquía de densidades conjuntas:

$$\begin{aligned} &p(x_1, t_1) \\ &... \\ &p(x_1, t_1; x_2, t_2, ..., x_n, t_n) \\ &... \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definición 2. *Consideremos la evolución de las probabilidades condicionales de valores futuros de $X(t)$, $x_1, x_2, ...$ (en los tiempos $t_1, t_2, ...$), dados los valores pasados, $y_1, y_2, ...$(en los tiempos $\tau_1, \tau_2, ...$) , de modo que $t_1 \geq t_2 \geq ... \geq \tau_1 \geq \tau_2 \geq ...$, definimos las probabilidades condicionales para un proceso estocástico como:*

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2, ...|y_1, \tau_1; , y_2, \tau_2, ...) = \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2; ...; y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; ...)}{p(y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; ...)}. \tag{2.2}$$

Para describir completamente a un proceso estocástico, se necesitaría de la jerarquía infinita de densidades de probabilidad 2.1, podemos simplificar el problema introduciendo la hipótesis de Markov.

Propiedad de markov

Definición 3. *Un proceso estocástico se dice que cumple la propiedad de Markov o que es un proceso de Markov si se cumple que para todo n y para todo $t_1 < ... < t_n$:*

$$p(x_n, t_n | x_1, t_1; ...; x_{n-1}, t_{n-1}) = p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}).$$

Si aplicamos la propiedad de Markov al miembro enésimo de la jerarquía se puede probar que:

$$p(x_1, t_1; ...; x_n, t_n) = \prod_{i=2}^{n} p(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) p(x_1, t_1) p(x_1, t_1). \tag{2.3}$$

Aplicamos esta propiedad al tercer miembro de la jerarquía:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = p(x_3, t_3 | x_2, t_2) p(x_2.t_2 | x_1, t_1),$$

A partir de una densidad de mayor jerarquía es posible obtener la densidad de una jerarquía menor por medio de la marginalización de variables, a esta propiedad se le conoce como completez de la jerarquía. De este modo podemos expresar

$$p(x_1, t_1; x_3, t_3) = p(x_1, t_1) \int p(x_3, t_3 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2,$$

y dividimos ambos lados entre $p(x_1, t_1)$ para obtener una ecuación fundamental en el estudio de los procesos estocásticos de Markov, conocida como ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$p(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int p(x_3, t_3 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2. \tag{2.4}$$

Martingalas

Una propiedad matemática de gran importancia en los procesos estocásticos es la propiedad de martingala:

Definición 4. *Una sucesión de variables aleatorias (X_n) es una martingala si y sólo si $E(X_{n+1} | X_1, ..., X_n)$.*

Es importante destacar que la propiedad de martingala no necesariamente implica la propiedad de markov, y recoprocamente, la propiead de Markov no necesariamente implica la propiedad de martingala.

2.1.1. Proceso de difusión y ecuación de Fokker-Planck

Definición 5. *Un proceso de Markov se dice que es de difusión si tiene como características las siguientes convergencias uniformes en x,z y t:*

1. *continuidad (condición de Lindeberg):*

$$\sup_{y,t} P\big(|\Delta x(t)| > \varepsilon | x(t) = y\big) = o(h) \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \Delta t \to 0$$

2. *coeficiente de arrastre o de ´´drift":*

$$a(z,t) := \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\Delta t\to 0} E\big(\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} I_{[0,\varepsilon)}(|\Delta x(t)|)|x(t)=z\big) = \lim_{\Delta t\to\infty}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x-z|<\epsilon}(x-z)p(x,t+h|z,t)dx$$

3. *coeficiente de difusión:*

$$b(z,t) := \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\Delta t\to 0} E\big(\frac{\Delta x(t)^2}{\Delta t} I_{[0,\varepsilon)}(|\Delta x(t)|)|x(t)=z\big) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x-z|<\varepsilon}(x-z)^2 p(x,t+h|z,t)dx$$

Partiendo de la ecuación de Chapman-Kolmogorov 2.4 y tomando en cuenta estos límites característicos es posible demostrar que la ecuación para las transiciones de probabilidad viene dada por la siguiente ecuación, conocida como la ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov (forward):

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t|x_0,t_0) = -\frac{\partial}{\partial x}\big(a(x,t)p(x,t|x_0,t_0)\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(b(x,t)p(x,t|x_0,t_0)\big), \tag{2.5}$$

si multiplicamos por $p(x_0,t_0)$ e integramos respecto a x_0, obtenemos la ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov para la densidad de probabilidad:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\big(a(x,t)p(x,t)\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(b(x,t)p(x,t)\big) \tag{2.6}$$

Omitiremos la prueba de esta ecuación a partir de la ecuación de Chapman Kolmogorov, pero haremos una deducción a partir del cálculo estocástico más adelante.

Decimos que un proceso de difusión es singular si el coeficiente de difusión $b(x,t)$ es cero en uno o ambos puntos frontera, o si alguno de los coeficientes no tiene límite finito. Esta cuestión será de relevancia en la mecánica estocástica.

2.1.2. Movimiento browniano

El movimiento browniano o proceso de Wiener, $w(t)$, es un caso particular de proceso de difusión de Markov en el que $a=0$ y $b=1$, entonces su ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov es:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,t), \tag{2.7}$$

que con condición inicial $p(x,t_0)=\delta(x)$ y con $p(x\to\pm\infty,t)=0$, tiene solución:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}}e^{-\frac{x^2}{2(t-t_0)}}. \tag{2.8}$$

El movimiento browniano tiene dos características fundamentales, que también poseen los procesos de difusión en general

1. El movimiento browniano tiene trayectorias continuas. Sea $\varepsilon>0$:

$$p(|x'|>k) := p(|x(t_0+h)-x_0|>k) = \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi h}}e^{-\frac{x'^2}{2h}}dx' = 1-errf(\frac{k}{\sqrt{2h}}),$$

donde $errf(x)$ es la función error. Como la función error es una función de distribución, el límite a infinito es uno, por tanto, obtenemos el límite:

$$\lim_{h\to 0} p\big(|\frac{x(t_0+h)-x_0}{h}| > \varepsilon\big) = 0.$$

Esta es la propiedad de Lindeberg **??**, que se simplifica para el caso de un proceso con incrementos estacionarios e independientes y no es necesario calcular el supremo [6].

2. Las trayectorias no son diferenciables en ningún punto. Sea $\varepsilon > 0$, tomemos el límite:

$$p\big(|\frac{x'}{h}| > \varepsilon\big) := p(|\frac{x(t_0+h)-x_0}{h}| > \varepsilon) = \int_{kh}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{x'^2}{2h}} dx' = 1 - errf(\varepsilon\sqrt{\frac{h}{2}}).$$

De igual modo, como la función error es una distribución, su límite cuando tiende a cero es uno, y por tanto:

$$\lim_{h\to 0} p\big(|\frac{x(t_0+h)-x_0}{h}| > \varepsilon\big) = 1$$

esto significa que el valor absoluto del cociente de diferencias, con probabilidad uno, no puede ser ´´tan pequeño como se quiera" y por tanto la derivada no existe.

3. El movimiento browniano tiene incrementos independientes. La solución a la ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov con probabilidades condicionales tiene la misma forma que 2.8. Entonces, podemos escribir la densidad conjunta del movimiento browniano como 2.3 debido a que es un proceso de Markov:

$$p(x_1,t_1;...,x_n,t_n) = \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}} e^{-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}} p(x_1,t_1).$$

Definimos $\Delta x_i := x(t_i) - x(t_{i-1})$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, entonces:

$$p = (\Delta x_n;...;x_0) = \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t_i}} e^{-\frac{\Delta x_i^2}{2\Delta t_i}} p(x_0,t_0),$$

por lo que Δx_i son independientes entre sí y de x_0.

2.2. Integral estocástica

En las aplicaciones de los procesos estocásticos es común usar la intuición de una ecuación diferencial ordinaria en el que ocurre un término $\xi(t)$ que fluctúa rápida y aleatoriamente en función del tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t) + b(x,t)\xi(t) \tag{2.9}$$

deseamos que ξ tenga las siguientes características:

- $E(\xi(t)) = 0$ para todo t

- $E(\xi(t)\xi(t')) = \delta(t-t')$
- $E(\xi^n(t)) = 0$ para $n \geq 3$
- $E(\xi(t)a(x,t')) = E(\xi(t))E(a(x,t')) = 0$ si $t' \leq t$
- $E(\xi(t)b(x,t')) = E(\xi(t))E(b(x,t')) = 0$ si $t' \leq t$

y que la siguiente integral exista:

$$u(t) = \int_0^t \xi(t')dt'. \tag{2.10}$$

Supongamos que $u(t)$ es una función continua de t. Escribimos:

$$u(t') = \int_0^t \xi(s)ds + \int_t^{t'} \xi(s)ds = \lim_{\epsilon\to\infty} \big(\int_0^{t-\epsilon} \xi(s)ds\big) + \int_t^{t'} \xi(s)ds.$$

Para cualquier $\epsilon > 0$, las $\xi(s)$ de la primer integral son independientes de las de la segunda integral. Por continuidad , $u(t)$ y $u(t') - u(t)$ son independientes, lo que es más $u(t') - u(t)$ es independiente de $u(t'')$ para todo $t'' < t$. Esto significa que $u(t')$ está determinado pro el valor de $u(t)$ y no en los valores anteriores. Por tanto $u(t)$ es un proceso de Markov.

Buscamos obtener su ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov para $u(t)$. Usamos la definición de los coeficientes de difusión y de drift 5, que vienen dados por el cambio instantáneo de los primeros dos momentos. Primero calculamos:

$$E\big(u(t+h) - u_0|u_0, t\big) = E\big(\int_t^{t+h} \xi(s)ds\big) = 0$$

y

$$\begin{aligned} E\big(u(t+h) - u_0)^2|u_0, t)\big) &= E\big(\int_t^{t+h} ds \int_t^{t+h} ds' E(\xi(s)\xi(s'))\big) \\ &= \int_t^{t+h} ds \int_t^{t+h} ds' \delta(s-s') = h, \end{aligned}$$

con esto, tenemos que:

$$A(u_0, t) = \lim_{h\to 0} \frac{E\big(u(t+h) - u_0|u_0, t\big)}{h} = 0$$

$$B(u_0, t) = \lim_{h\to 0} \frac{E\big((u(t+h) - u_0)^2|u_0, t\big)}{h} = 1,$$

por lo que la ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov que hemos obtenido es la del movimiento browniano o proceso de wiener, $w(t)$, 2.7. Podemos concluir lo siguiente:

$$\int_0^t \xi(t')dt' = u(t) = w(t). \tag{2.11}$$

Como sabemos, el movimiento browniano es no derivable, por lo que la ´´ecuación diferencial” 2.9 formalmente no existe pero es posible reinterpretarla como una ecuación integral: 2.9 en términos de la integral de Ito:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t a(x(s), s)ds + \int_0^t b(x(s), s)\xi(s)ds, \tag{2.12}$$

y como la integral de ξ es el proceso de Wiener 2.11, podemos pensar que estamos integrando el segundo término de la ecuación anterior respecto a una función $W(t)$ (algo parecido a la función integradora en la integral de Riemann-Stieltjes), interpretando sus incrementos como:

$$dw(t) = w(t + dt) - w(t) = \xi(t)dt$$

, entonces la segunda integral sería:

$$\int_0^t b(x(s), s)\xi(s)ds = \int_0^t b(x(s), s)dw(s),$$

Por tanto, para poder definir completamente la ecuaicón 2.12 debemos formular una definición para procesos de difusión.

2.2.1. Definición de la integral estocástica de Ito

Para definir la integral de un proceso de difusión requerimos el límite en media cuadrática, que es un límite más débil que la convergencia puntual exigido en la integral de Riemann.

Definición 6. *La sucesión de variables aleatorias X_n converge a X en media cuadrática si:*

$$ms - \lim_{n\to\infty} X_n = X \iff \lim_{n\to\infty} E\big((X_n - X)^2\big) = 0,$$

Sean $f(t)$ es una función arbitraria y que $w(t)$ el proceso de Wiener, buscamos definir la integral estocástica $\int_{t_0}^t f(t')dw(t')$. Dado el intervalo de integración $[t_0, t]$ y dada una partición, $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_{n-1} \leq t_n$, con los puntos intermedios τ_i tales que $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$. Observemos que el límite de las sumas parciales:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\tau_i)\big(w(t_i) - w(t_{i-1})\big),$$

depende de la elección de los puntos intermedios (cosa que de hecho es ajena a la integral usual de Riemann), por ejemplo, si tomamos $F(\tau_i) = w(\tau_i)$:

$$E(S_n) = E\big(\sum_{i=1}^n w(\tau_i)(w(t_i) - w(t_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^n (min(\tau_i, t_i) - min(\tau_i, t_{i-1})) = \sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1}).$$

Si establecemos para cada i que $\tau_i = \alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i-1}$ con $1 < \alpha < 1$, entonces:

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})\alpha = (t - t_0)\alpha,$$

si definimos $\alpha = 0$, es decir $\tau_i = t_{i-1}$, entonces definimos la integral de Ito de una función F como:

$$\int_{t_0}^{t} f(t')dw(t') = ms - \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\big(w(t_i) - w(t_{i-1})\big)\Big).$$

Introducimos el concepto de función no participante. Decimos que una función $f(t)$ es no anticipante de t cuando $f(t)$ es independiente de $w(s) - w(t)$ para todo s, t tal que $t < s$,, que es un requerimiento de causalidad, pues no queremos que la función $f(t)$ anticipe el comportamiento futuro del proceso de Wiener $w(t)$.Por ejemplo, las siguientes funciones son no anticipantes:

- $w(t)$
- $\int_{t_0}^{t} g(w(t'))dt'$
- $\int_{t_0}^{t} g(w(t'))dw(t')$
- $\int_{t_0}^{t} f(t')dt'$ donde f es no anticipante
- $\int_{t_0}^{t} f(t')dw(t')$ donde f es no anticipante.

Una propiedad importante de la integral de Ito es la siguiente. Para funciones no anticipantes, la integral de Ito:

$$x(t) = \int_{0}^{t} f(s)dw(s),$$

es una martingala [8].

2.2.2. Integral de stratonovich

En el caso de elegir $\alpha = \frac{1}{2}$, es decir, ($\tau_i = \frac{t_{i-1}+t_i}{2}$), se obtiene la integral de Stratonovich. Una ventaja de esta integral de Stratonovich, la cuál respeta la regla de la cadena [7], a diferencia de la integral de Ito, la cual tiene una regla de diferenciación distinta que veremos más adelante. Sin embargo, la integral de Ito cumple con ser una martingala, propiedad matemática fundamental sobre la que descansa una teoría profunda de integración estocástica. En el resto de este escrito, cuando hablemos de integral estocástica y ecuaciones diferenciales estocásticas, nos referiremos en el sentido de Ito.

2.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas y algunos resultados

Decimos que un proceso estocástico $x(t)$ obedece la ecuación diferencial estocástica de Ito:

$$dx(t) = x(t_0) + a\big(x(t'), t'\big)dt' + \big(x(t'), t'\big)dw(t), \tag{2.13}$$

si satisface para todo t y t_0 que:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a\big(x(t'), t'\big)dt' + \int_{t_0}^{t} b\big(x(t'), t'\big)dw(t).$$

Tenemos algunas propiedades importantes relacionadas a las ecuaciones estocásticas.

1. Teorema: Dada una ecuación estocástica 2.13, existe una única solución no anticipante $x(t')$ en el itervalo $[t_0, t]$ si y sólo si se cumple que:

   a) la condición de Lipschitz, es decir, que existe K tal que:

   $$\big|a(x,t') - a(y,t')\big| + \big|b(x,t') - b(y,t')\big| \leq K|x-y|,$$

   para todo x, y y t' en $[t_0, t]$

   b) condición de acotamiento, que existe $K > 0$ tal que:

   $$\big|a(x,t')\big|^2 + \big|b(x,t')\big|^2 \leq K(1+|x|^2),$$

   para todo t' en $[t_0, t]$

   la solución $x(t)$ es un proceso de Markov de difusión.

2. Se tienen las siguientes reglas simbólicas de manipulación:

   - $dw^2 = 0$
   - $dw^{n+2} = 0$ con $n > 0$
   - $dwdt = 0$
   - $dt^{1+n} = 0$ con $n > 0$

3. Formula de Ito: consideremos una función arbitraria del proceso estocástico $x(t)$, $f(x(t))$, cuya diferencial es el análogo estocástico de la regla de la cadena:

   $$\begin{aligned} df(x(t),t) &= \frac{\partial}{\partial t} f(x(t),t)dt + a(x(t),t)\frac{\partial}{\partial x} f(x(t),t)dx + \frac{1}{2} b(x(t),t)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x(t),t)dx^2 \\ &= \big(\frac{\partial}{\partial t} f(x(t),t) + a(x(t),t)\frac{\partial}{\partial x} f(x(t),t) + \frac{1}{2} b(x(t),t)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x(t),t)\big)dt \\ &+ b(x(t),t)\frac{\partial}{\partial x} f(x(t),t)dw(t). \end{aligned} \tag{2.14}$$

   Un esbozo de la prueba es hacer una expansión en serie de Taylor para un diferencial de $f(x(t))$:

   $$\begin{aligned} df(x(t)) = f(x(t)+dx(t)) - f(x(t)) &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + ... \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x} a(x(t),t)dt + b(x(t),t)dw(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x^2} b(x,t)^2 dw(t)^2 + ... \end{aligned}$$

   descartamos el resto de términos usando las reglas del punto anterior y obtenemos la formula de Ito[7]. Si dx no es una función explicita del tiempo, entonces en la formula de Ito no aparece el término de derivada parcial respecto al tiempo.

4. Hay una conexión entre las ecuaciones diferenciales estocásticas de Ito y la ecuación de Fokker-Plack-Kolmogorov. Para ver esto de manera intuitiva, hacemos uso de la formula de Ito con $f(x(t))$:

   $$\frac{E\big(df(x(t))\big)}{dt} = E\big(\frac{df(x(t))}{dt}\big) = \frac{d}{dt}E(f(x(t)) = E\big(a(x(t)),t)\frac{\partial}{\partial x}f + \frac{1}{2}b(x(t),t)^2\frac{\partial^2}{\partial^2}f\big),$$

como $x(t)$ tiene función de probabilidades de transición $p(x,t|x_0,t_0)$, escribimos:

$$\frac{d}{dt}E\big(f(x(t))\big) = \int dx f(x)\partial_x p(x,t|x_0,t_0) = \int dx\big(a(x,t)\frac{\partial}{\partial x}f + \frac{1}{2}b(x,t)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\big)p(x,t|x_0,t_0)$$

integramos por partes y descartamos los términos de frontera, y como la función f es arbitraria, obtenemos la ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov 2.6:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t|x_0,t_0) = -\frac{\partial}{\partial x}\big(a(x,t)p(x,t)|x_0,t_0\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(b(x,t)^2 p(x,t|x_0,t_0)\big). \tag{2.15}$$

Capítulo 3

Cinemática de procesos de difusión conservativos

En este capitulo usamos los conceptos de procesos de los procesos de difusión para desarrollar la teoría de la mecánica estocástica de Nelson. Para esto primero se debe construir una para procesos estocásticos de difusión, y posteriormente se agregan algunas hipótesis para obtener la ecuación de Schrodinger. Esta exposición sigue la línea argumental inicial de Nelson de sus trabajos de 1966 y 1967, ´´Derivation of the Schrodinger Equation from Newtonian Mechanics" [4] y ´´Dynamical theories of browniani motion"[9].

3.1. Ecuaciones descriptivas de la difusión Markoviana

Como hemos visto, el proceso de Wiener o movimiento Browniano no es diferenciable en ningún punto, de modo que no tenemos una definición de velocidad o aceleración de manera inmediata. En esta sección veremos las definiciones que Nelson propone para recuperar la cinemática para estos procesos estocásticos.

Supongamos que tenemos un proceso de difusión, en forma de ecuación estocástica de Ito 2.13, que es una ecuación de difusión ´´forward" o prospectiva, porque es una ecuación de evolución que fluye hacia el futuro, reescribimos esta ecuación considerando el caso de difusión en el espacio, escribimos a velocidad de drift como $\mathbf{b}_+(\mathbf{x}, t)$ y suponemos que el coeficiente de difusión es una constante σ:

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_+(\mathbf{x}, t)dt + \sigma d\mathbf{w}_+(t), \tag{3.1}$$

y como sabemos, se requiere que $\mathbf{w}(t)$ y $\mathbf{x}(t)$ sean funciones no anticipativas, los $d\mathbf{w}(t)$ son incrementos o´´diferenciales" de un proceso de Wiener o ruido Gaussiano, que tienen media cero y son mutuamente independientes entre sí, y son independientes de $\mathbf{x}(s)$ con $s < t$.

Supongamos que tenemos una difusión conservativa, tomamos el proceso de difusión en tiempo reverso, suponemos que las fluctuaciones no dependen de la dirección del tiempo, por lo que tendremos el mismo coeficiente de difusión, tenemos que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(-t)$, que también es un proceso de Markov, descrita por la ecuación de Ito con tiempo reverso o retrospectiva:

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_-(\mathbf{x}, t)d(t) + \sigma d\mathbf{w}_-(t), \tag{3.2}$$

donde $\mathbf{b}_-$ es el drift en tiempo reverso y las propiedades de esta ecuación estocástica son análogas a aquellas de 3.1, los incrementos $d\mathbf{w}_-(t)$ son independientes de $\mathbf{x}(s)$ con $s \geq t$.

Nelson propone las siguientes definiciones para contrarrestar la inexistencia de una derivada ordinaria para la trayectoria $\mathbf{x}(t)$, basándose en una esperanza condicionada a un tiempo t, y se les conoce con el nombre de ´´mean forward derivative" (derivada media prospectiva) y "mean backward derivative" (derivada media retrospectiva) respectivamente:

$$D_+\mathbf{x}(t) = \lim_{h\to 0^+} E_t\Big(\frac{\mathbf{x}(t+h)-\mathbf{x}(t)}{h}\Big) \tag{3.3}$$

y

$$D_-\mathbf{x}(t) = \lim_{h\to 0^+} E_t\Big(\frac{\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(t-h)}{h}\Big). \tag{3.4}$$

Notemos que D_+ y D_- son operadores lineales debido a que el operador esperanza lo es, también veamos que $D_+\mathbf{x}(t)$ y $D_-\mathbf{x}(t)$ son procesos estocásticos. Si $\mathbf{x}(t)$ fuera una función diferenciable (trayectoria no estocástica) entonces sucedería que $D_+\mathbf{x}(t) = D_-\mathbf{x}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, pero en general no será cierto que $D_+\mathbf{x}(t) = D_-\mathbf{x}(t)$.

Como los incrementos $d\mathbf{w}_+(t)$ son independientes de $\mathbf{x}(s)$ dado que $s \leq t$, y de manera análoga para el proceso en tiempo reverso, usando 3.3 y 3.4 sobre 3.1 y 3.2 respectivamente, obtenemos:

$$D_+\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(t), t) \tag{3.5}$$

y

$$D_-\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_-(\mathbf{x}(t), t), \tag{3.6}$$

esto justifica llamarles a $\mathbf{b}_+$ y $\mathbf{b}_-$ ´´mean forward velocity" (velocidad media prospectiva) y ´´mean backward velocity" (velocidad media retrospectiva).

Sabemos que podemos asociar una ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov (prospectiva) a la ecuación de Ito (prospectiva) 3.1 como vimos en 2.15, que en varias variables viene dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{b}_+(\mathbf{x}, t)p(x, t) + \sigma\Delta p(\mathbf{x}, t), \tag{3.7}$$

de manera similar, a la ecuación estocástica retrospectiva de Ito 3.2 se le asocia la ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov retrospectiva dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{b}_-(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t) - \sigma\Delta p(\mathbf{x}, t). \tag{3.8}$$

Definimos la velocidad actual, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{2}\big(\mathbf{b}_+(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}_-(\mathbf{x}, t)\big) = \frac{1}{2}(D_+ + D_-)\mathbf{x}(t), \tag{3.9}$$

con esto, si sumamos y promediamos las ecuaciones de Fokker-Planck-Kolmogorov 3.7 y 3.8, podemos obtener la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\mathbf{x},t) + \nabla \cdot \mathbf{v}(x,t)p(\mathbf{x},t) = 0. \tag{3.10}$$

Definimos la la velocidad osmótica $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) := \frac{1}{2}(\mathbf{b}_+(\mathbf{x},t) - \mathbf{b}_-(\mathbf{x},t)) = \frac{1}{2}(D_+ - D_-)\mathbf{x}(t), \tag{3.11}$$

y si restamos 3.8 de 3.7 obtenemos:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x},t)p(\mathbf{x},t) - \frac{\sigma^2}{2}\nabla p(\mathbf{x},t)) = 0,$$

por lo que:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \frac{\sigma^2}{2}\nabla \ln p(\mathbf{x},t). \tag{3.12}$$

En términos de la velocidad actual, $\mathbf{v}$, y la velocidad osmótica, $\mathbf{u}$, las ecuaciones diferenciales estocásticas prospectiva 3.1 y retrospectiva 3.2 vienen dadas respectivamente por:

$$d\mathbf{x}(t) = (\mathbf{v}(\mathbf{x}(t),t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}(t),t))dt + \sigma d\mathbf{w}_+(t) \tag{3.13}$$

y

$$d\mathbf{x}(t) = (\mathbf{v}(\mathbf{x}(t),t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}(t),t))dt + \sigma d\mathbf{w}_-(t). \tag{3.14}$$

Derivamos parcialmente la ecuación de la velocidad osmótica 3.12 y usamos la ecuación de continuidad 3.10:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} &= \frac{\sigma^2}{2}\nabla\frac{\partial}{\partial t}\ln p = \frac{\sigma^2}{2}\nabla(\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t}) = -\frac{\sigma^2}{2}\nabla(\frac{1}{p}\nabla\cdot(\mathbf{v}p)) = -\frac{\sigma^2}{2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\frac{1}{p}\nabla p) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \frac{\sigma^2}{2}\nabla(\frac{1}{p}\mathbf{v}\cdot\nabla p),\end{aligned}$$

ahora, usamos la ecuación de la velocidad osmótica 3.12 de nuevo y obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} = -\frac{\sigma^2}{2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}). \tag{3.15}$$

Un punto fundamental en la teoría de Nelson es la definición de la aceleración media de un proceso estocástico, $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ como:

$$\mathbf{a}(t) := \frac{1}{2}(D_+D_- + D_-D_+)\mathbf{x}(t). \tag{3.16}$$

Recordemos que la formula de Ito2.14 explica como representar la diferencial de una función que depende de un proceso estocástico, que en su forma para varias variables viene dada por:

$$df(\mathbf{x},t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \nabla f(\mathbf{x},t)\cdot d\mathbf{x} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta f(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}^2 \tag{3.17}$$

de manera análoga, la formula de ito para la ecuación estocástica retrospectiva 3.2 viene dada por:

$$df(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x},t)dt + \nabla f(\mathbf{x},t)\cdot d\mathbf{x} - \frac{\sigma^2}{2}\Delta f(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}^2, \tag{3.18}$$

Usando la formula de Ito, queremos evaluar el valor de los operadores D_+ y D_- aplicados a una función arbitraria f de $\mathbf{x}(t)$. Tomando las esperanzas condicionales, podemos sustituir $d\mathbf{x}$ por $\mathbf{b}_\pm$ porque $E(d\mathbf{w}_\pm) = 0$, y en el término $d\mathbf{x}^2$ despreciamos los términos cruzados de orden superior 2 y usamos que $E(d\mathbf{w}_\pm^2) = |dt|$ [8], por tanto obtenemos:

$$D_+ f(\mathbf{x},t) = \big(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{b}_+(\mathbf{x},t)\cdot\nabla + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta\big) f(\mathbf{x},t) \tag{3.19}$$

y

$$D_- f(\mathbf{x},t) = \big(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{b}_-(\mathbf{x},t)\cdot\nabla f(\mathbf{x},t) - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta\big) f(\mathbf{x},t). \tag{3.20}$$

Para evaluar la aceleración media estocástica 3.21, usamos las ecuaciones 3.5 y 3.6, y para conocer los valores de $D_+\mathbf{b}_-$ y $D_-\mathbf{b}_+$, sustituimos $\mathbf{b}_-$ y $\mathbf{b}_+$ en 3.19 y 3.20 respectivamente, con esto obtenemos:

$$D_+\mathbf{b}_-(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{b}_-(\mathbf{x},t) + \mathbf{b}_+\cdot\nabla\mathbf{b}_-(\mathbf{x},t) + \frac{\sigma^2}{2}\Delta\mathbf{b}_-(\mathbf{x},t)$$

y

$$D_-\mathbf{b}_+(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{b}_+(\mathbf{x},t) + \mathbf{b}_-\cdot\nabla\mathbf{b}_+(\mathbf{x},t) - \frac{\sigma^2}{2}\Delta\mathbf{b}_+(\mathbf{x},t),$$

por tanto:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{b}_+ + \mathbf{b}_-) + \frac{1}{2}\mathbf{b}_+\cdot\nabla\mathbf{b}_- + \frac{1}{2}\mathbf{b}_-\cdot\nabla\mathbf{b}_+ - \frac{\sigma^2}{4}\Delta(\mathbf{b}_+ - \mathbf{b}_-), \tag{3.21}$$

y teníamos que $\mathbf{b}_+ = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ y $\mathbf{b}_- = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, insertando esto en la aceleración media estocástica 3.21, podemos obtener una ecuación para le velocidad actual:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta\mathbf{u}.$$

En resumen, hemos obtenido el sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} = -\frac{\sigma^2}{2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}) \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta\mathbf{u}. \tag{3.23}$$

3.1.1. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Ahora, para argumentar a favor de que estas cantidades satisfacen efectivamente la noción clásica de velocidad, Nelson utiliza estas definiciones con el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Con $\mathbf{x}(t)$ es la posición y suponiendo que la velocidad $\mathbf{v}(t)$ existe (que las trayectorias que son diferenciables), el proceso de Ornstein-Uhlenbeck viene dado por:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}(t) &= \mathbf{v}(t)dt \\ d\mathbf{v}(t) &= -\beta\mathbf{v}(t)dt + d\mathbf{w}_{+}(t). \end{aligned}$$

Consideremos el proceso de Ornstein Uhlenbeck bajo el efecto de un potencial cuya aceleración es producida por el potencial K tal que $K = -\frac{1}{m}\nabla V$. De este modo, el procso toma la forma:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{v}(t)dt \\ d\mathbf{v}(t) &= -\beta\mathbf{v}(t)dt + K(\mathbf{x}(t))dt + d\mathbf{w}_{+}(t), \end{aligned}$$

Similarmente, la ecuación en tiempo reverso es:

$$d\mathbf{v}(t) = \beta\mathbf{v}(t)dt + K(\mathbf{x}(t))dt + d\mathbf{w}_{-}(t).$$

Estamos suponemos que $d\mathbf{w}_{+}$ ($d\mathbf{w}_{-}$) es independiente de $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ y $\mathbf{v}(\mathbf{s})$ si $s \leq t$ ($s \geq t$).

Aplicamos los operadores D_{+} y D_{-} a $\mathbf{x}(t)$, y como en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck cumplen que $d\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(t)dt$, entonces $D_{+}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(t)$y $D_{-}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(t)$. Sin embargo, $\mathbf{v}(t)$ no es diferenciable dado que el proceso de Wiener no es derivable. Suponemos que $d\mathbf{w}_{\pm}(t)$ es independiente de $\mathbf{x}(t)$. Entonces si aplicamos los operadores a la velocidad, encontramos que:

$$\begin{aligned} D_{+}(\mathbf{v}(t)) &= -\beta\mathbf{v}(t) + K(\mathbf{x}(t)) \\ D_{-}(\mathbf{v}(t)) &= \beta\mathbf{v}(t) + K(\mathbf{x}(t)), \end{aligned}$$

Como $D_{+}(\mathbf{v}(t)) = D_{+}D_{-}\mathbf{x}(t)$ y $D_{-}(\mathbf{v}(t)) = D_{-}D_{+}\mathbf{x}(t)$, entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} D_{+}D_{-}\mathbf{x}(t) &= -\beta\mathbf{v}(t) + K \\ D_{-}D_{+}\mathbf{x}(t) &= \beta\mathbf{v}(t) + K \end{aligned}$$

y sumando estas ecuaciones obtenemos lo siguiente:

$$k = \frac{1}{2}(D_{+}D_{-}\mathbf{x}(t) + D_{-}D_{+}\mathbf{x}(t)) =: \mathbf{a}(t),$$

que es la definición de aceleración media estocástica de Nelson 3.21 y vemos que la segunda ley de Newton es válida para el proceso de Ornstein Uhlenbeck introduciendo este concepto.

3.2. Movimiento browniano en el ´´éter”

En la sección anterior introducimos la teoría cinética para procesos de difusión de Ito reversibles. En este capitulo ahondamos en la discusión introduciendo la hipótesis del movimiento browniano universal, discutida en la introducción, y que consiste en suponer que todas las partículas se mueven a través del espacio vacío o ´´eter” sujetas a un movimiento browniano. Suponemos que el cuadrado del coeficiente de difusión en las ecuaciones estocásticas 3.13 3.2 es inversamente proporcional a la masa, establecemos que:

$$\sigma^2 = \frac{\hbar}{m},$$

donde $\hbar$ tiene dimensiones de acción, y si es del orden de la constante de Plack, entonces en los cuerpos macroscópicos no sería perceptible el efecto del movimiento fluctuante. Este término es entendido como las ´´fluctuaciones cuánticas", de las que ni Nelson ni los demás colaboradores a la teoría de la mecánica estocástica han proporcionado una explicación satisfactoria sobre su posible origen, aunque ha habido conjeturas sobre un posible origen electromagnético e incluso gravitatorio por la presencia de la masa [1].

De manera parecida a cómo hicimos con el proceso de ornstein-Uhlenbeck, suponemos que la partícula está sujeta a una fuerza externa F y que es válida la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, con $\mathbf{a}$ la aceleración estocástica media 3.21. Igualmente vamos a considerar igualmente el caso en el que la fuerza es el gradiente de un potencial K , $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{m}\nabla K(\mathbf{x})$. Recordemos que el sistema de ecuaciones para $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ 3.22 está dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} = -\frac{\sigma^2}{2}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta\mathbf{u},$$

con las suposiciones anteriores queda del siguiente modo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \tag{3.24}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = -\frac{1}{m}\nabla k - \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} + \frac{\hbar}{2m}\Delta\mathbf{u}. \tag{3.25}$$

Con valores iniciales dados $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ y $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^3$, tenemos un problema de valor inicial, y si podemos resolver el sistema anterior, entonces determinaríamos por completo al problema de difusión de Markov, porque una vez obteniendo $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$, obtebemos también $\mathbf{b}_+$ y $\mathbf{b}_-$, y la densidad de probabilidad $p(\mathbf{x}, t)$.

Nelson menciona que ante la dificultad de encontrar una solución general al sistema 3.24, es posible sin embargo encontrar una solución con una hipótesis adicional, que es suponer que la velocidad actual $\mathbf{v}$ es un gradiente (del mismo modo que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ lo es 3.12) de un cierto campo escalar $S(\mathbf{x}, t)$:

$$\nabla S(\mathbf{x}, t) := \frac{m}{\hbar}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \tag{3.26}$$

y comenta que una solución sin esta suposición correspondería a un proceso estocástico en el que existe fricción con el vacío o el ´´éter".

Definimos un campo escalar $R(\mathbf{x}, t)$:

$$R(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{2}\ln p(\mathbf{x}, t),$$

sacamos gradiente de ambos lados y por 3.12 podemos escribir:

$$\nabla R(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{\hbar}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \tag{3.27}$$

Ahora, insertamos 3.26 y 3.27 en el sistema de ecuaciones parciales 3.24:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = -\frac{1}{m}\nabla K - \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \frac{\hbar}{2m}\Delta\mathbf{u},$$

y obtenemos:

$$\frac{\hbar}{m}\nabla\big(\frac{\partial}{\partial t}R + \frac{\hbar}{2m}\Delta S + \frac{\hbar}{m}(\nabla R\cdot\nabla S)\big) = 0$$
$$\frac{1}{m}\nabla\big(\hbar\frac{\partial}{\partial t}S + K + \frac{\hbar^2}{m}S\cdot\nabla S - \frac{\hbar^2}{m}R\cdot\nabla R - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta R\big) = 0,$$

usamos en la segunda ecuación la identidad vectorial:

$$f\cdot\nabla f = \frac{1}{2}\nabla f^2 - f\times(\nabla\times f),$$

la parte rotacional se elimina para R y para S, por tanto:

$$\frac{\hbar}{m}\nabla(\frac{\partial}{\partial t}R + \frac{\hbar}{2m}\Delta S + \frac{\hbar}{m}\nabla R\cdot\nabla S) = 0$$
$$\frac{1}{m}\nabla\big(\hbar\frac{\partial}{\partial t}S + k + \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla S)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}((\nabla R)^2 + \Delta R)\big) = 0,$$

y por tanto:

$$\frac{\partial}{\partial t}R + \frac{\hbar}{2m}\Delta S + \frac{\hbar}{m}\nabla R\cdot\nabla S) = 0$$
$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}S + K + \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla S)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}((\nabla R)^2 + \Delta R) = 0. \tag{3.28}$$

Las ecuaciones 3.28 son conocidas como las ecuaciones de Madelung, obtenidas por Erwin Madelung en 1926 partiendo de la ecuación de Schrodinger. la primer ecuación es una ecuación de conservación de probabilidad, y la segunda ecuación es conocida como ecuación de Hamilton-Jacobi-Madelung Es posible linealizar este complicado sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales haciendo un cambio de variable:

$$\psi = e^{R+iS} \tag{3.29}$$

introducimos ψ a la ecuación de Schrodinger y obtenemos lo siguiente:

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}R - \hbar\frac{\partial}{\partial t}S)\psi = K\psi - \frac{\hbar^2}{2m}(\Delta R + i\Delta S)\psi - \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla R + i\Delta S)^2\psi \tag{3.30}$$

dividimos ambos lados de la ecuación entre ψ, para $\psi \neq 0$, y expandemos el último término del lado derecho:

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}R - \hbar\frac{\partial}{\partial t}S) = K - \frac{\hbar^2}{2m}(\Delta R + i\Delta S) - \frac{\hbar^2}{2m}\big(((\nabla R)^2 - (\nabla S)^2) + 2i(\nabla R\cdot\nabla S)\big), \tag{3.31}$$

podemos separar de la ecuación anterior en parte real y compleja:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}R+\frac{i\hbar^2}{2m}\Delta S+\frac{i\hbar^2}{m}(\nabla R\cdot\nabla S)=\hbar\frac{\partial}{\partial t}S+K+\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla S)^2-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta R+(\nabla R)^2) \tag{3.32}$$

que es equivalente al sistema 3.28.

La función de onda ψ ha surgido en la mecánica estocástica como una forma conveniente de hacer un cambio de variables para linealizar a las ecuaciones de Madelung, y no es un objeto matemático fundamental como lo es en la mecánica cuántica. Un punto determinante es que al establecer el coeficiente de difusión $\sigma^2 = \frac{\hbar}{m}$, hemos obtenido que la ecuación de Schrodinger puede ser considerada como parte de la teoría de procesos de difusión reversibles, y es posible asociarle a las soluciones de la ecuación de Schrodinger las trayectorias dadas por la ecuación diferencial estocástica 3.1.

3.2.1. Regla de Born y valores esperados en mecánica estocástica

Según la definición de ψ y la variable ψ podemos ver que:

$$|\psi(\mathbf{x},t)|^2=e^{R(\mathbf{x},t)+iS(\mathbf{x},t)}\overline{e^{R(\mathbf{x},t)+iS(\mathbf{x},t)}}=e^{2R(\mathbf{x},t)}=p(\mathbf{x},t),$$

que es la regla de Born. En la mecánica estocástica de Nelson la regla de Born no es un postulado a posteriori para dar sentido a la ecuación de Schrodinger como en la mecánica cuántica, sino que surge de manera más o menos natural en el desarrollo de la teoría de la difusión reversible. De este modo, en la mecánica estocástica se tiene igualmente que, dado $A\subset\mathbb{R}^3$, se cumple que:

$$P(\mathbf{x}(t)\in A)=\int_A|\psi(\mathbf{x},t)|^2d\mathbf{x}.$$

En mecánica cuántica los valores esperados de las cantidades observables que son función del operador posición, $O(\mathbf{x})$, están dados por:

$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle=\int O(\mathbf{x})|\psi(\mathbf{x},t)|^2d\mathbf{x}=\int O(\mathbf{x})p(\mathbf{x},t)d\mathbf{x},$$

que coincide con la definición de la esperanza de una variable aleatorio/proceso estocástico, que en este caso es una función del proceso estocástico de difusión $\mathbf{x}(t)$:

$$E\big(O(\mathbf{x})\big)=\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle.$$

La diferencia conceptual es clara, en mecánica cuántica se trabaja con valores esperados de operadores, y en mecánica estocástica tratamos con variables aleatorias.

Para el caso del valor esperado del momento (o funciones de este), tenemos que las cosas no son tan sencillas:

$$E\big\langle|\hat{p}|\big\rangle=mE(\mathbf{v}),$$

como $E(\mathbf{u})=0$ [8], entonces:

$$E\big\langle|\hat{p}|\big\rangle=mE(\mathbf{b}_+)=mE(\mathbf{b}_-).$$

Con la equivalencia entre la ecuación de Schrodinger y la ecuación estocástica de difusión 3.1, como ya hemos comentado, se abre la posibilidad de recuperar las historias en los procesos cuánticos, y se mantiene el formalismo computacional de la mecánica cuántica (que es algo que las llamadas ´´teorías de variables ocultas" buscan conservar). Sin embargo, este proceso puede ser bastante complicado, porque sabemos que para construir dichas trayectorias necesitamos obtener v y u para poder determinar la ecuación estocástica 3.13, sin embargo, es muy difícil resolver las ecuaciones de madelung 3.28. La salvación es que es posible obtener **v** y **u** conociendo a priori la solución a la ecuación de Schrodinger:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = Re(\frac{\nabla\psi(\mathbf{x},t)}{\psi(\mathbf{x},t)})$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = Im(\frac{\nabla\psi(\mathbf{x},t)}{\psi(\mathbf{x},t)}),$$

y resolver la ecuación estocástica:

$$d\mathbf{x}(t) = \big((Re + Im)(\frac{\nabla\psi(\mathbf{x},t)}{\psi(\mathbf{x},t)})\big)dt + \sqrt{\frac{\hbar}{m}}d\mathbf{w}_+. \tag{3.33}$$

Por ejemplo, para el átomo de Hidrogeno en estado base, la función de onda viene dada por (a_0 es el radio de Bohr):

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{a_0^{3/2}}e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{a_0}}.$$

Por tanto:

$$Re(\psi_{100}) = \frac{1}{a_0}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad Im(\psi_{100}) = 0,$$

entonces, para encontrar las trayectorias estocásticas que realiza el electrón alrededor del átomo de hidrogeno, se tendría que resolver la ecuación estocástica:

$$d\mathbf{x} = \frac{1}{a_0}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}dt + \sqrt{\frac{\hbar}{m}}d\mathbf{w}(t). \tag{3.34}$$

Aquí sale a la luz una desventaja de la mecánica estocástica, ya que es indispensable resolver la ecuación de Schrodinger y no sólo eso, sino que también es necesario tener una solución expresada de un modo lo suficientemente explicito. Mientras que en la cuántica ordinaria el trabajo está completamente terminado una vez resuelta la ecuación de Schrodinger, en la mecánica estocástica es de hecho apenas el primer paso. Esta es una critica frecuente a la teoría, comentada por el mismo Nelson, que en [40] comenta que la mecánica estocástica es ´´mecánica cuántica hecha complicada".

3.2.2. Similitudes con Bohm

A la mecánica de Nelson se le ha relacionado con otras teorías de variables ocultas, específicamente se le ha señalado como una contra parte estocástica de la conocida ´´mecánica de Bohm" o ´´mecánica de Bohm-de Broglie", porque Louis De-Broglie fue el primero en proponer la teoría en 1927, de hecho fue la primera teoría de variables ocultas de la mecánica cuántica, pero en su tiempo fue rechazada ampliamente, hasta que años después, en 1952 la redescubrió y atrajo nueva atención hacia la teoría. Vamos a tomar los aspectos más destacables del artículo [10], donde se discuten ampliamente las similitudes y contrastes que hay entre la mecánica estocástica de Nelson y la de Bohm-de Broglie

La teoría de Bohm, para el caso de una partícula, sostiene que el movimiento está determinado por por un campo de la forma $\frac{\hbar}{m}\nabla S$, siendo S la fase de la función de onda de la ecuación de Schrodinger. Esta teoría puede explicar los fenómenos de interferencia y difracción que presentan los electrones en la mecánica cuántica. $\frac{\hbar}{m}\nabla S$ es el campo de velocidades determinista en la teoría de Bohm-de Broglie y coincide con la velocidad actual en la mecánica de Nelson, sin embargo, hay una diferencia conceptual importante entre ambas teorías. En la propuesta de Bohm-De broglie se supone desde un inicio que la función S es la fase de la función de onda, pero Nelson comienza con la suposición de que las partículas cuánticas obedecen un proceso de difusión en el espacio de configuraciones, y a partir de esta ecuación estocástica de difusión y de imponerle ciertas condiciones, es posible construir la función de onda y obtener la ecuación de Schrodinger. Nelson, al evitar desde un inicio introducir la hipótesis a priori de la función de onda satisfaciendo la ecuación de Schrodinger, ofrece un enfoque distinto a Bohm-de Broglie (o similares como la de Everette). La función de onda en la mecánica estocástica no es un objeto fundamental que aparezca por medio de postulación, como sí lo es en la mecánica de Bohm, esto podría considerarse una ventaja conceptual al eliminar cierta aura de misterio al rededor de este objeto matemático.

También es destacable que aunque la velocidad de drift es igual en ambas teorías, en la mecánica de Nelson estas trayectorias están influenciadas por las fluctuaciones estocásticas, por lo que las trayectorias no son estrictamente iguales por lo general, aunque sí es cierto que las trayectorias más probables de la mecánica estocástica se aproximan a ser trayectorias fluctuantes de las trayectorias tipicas de la teoría de Bohm-De broglie. Más adelante comentaremos un trabajo en el que se argumenta que la teoría de Bohm sería una aproximación semi-clásica a una teoría estocástica de la mecánica cuántica.

Capítulo 4

La evolución de la mecánica estocástica

Aunque la primera derivación de la ecuación de Schrodinger fue obra de fenyes en 1952, fueros los trabajos de Edward Nelson los que atrajeron la atención de grandes sectores de investigadores en las áreas de física y matemáticas, y marcaron el inicio de nuevas líneas de investigación respecto a los fundamentos de la mecánica cuántica, e incluso en el desarrollo de nuevas matemáticas, como por ejemplo las investigaciones en matemáticas, por ejemplo sobre los procesos estocásticos en variedades y el cálculo variacional estocástico. En este capitulo veremos los aspectos más importantes sobre la evolución de la teoría, los argumentos a favor y en contra de ella, sus éxitos y fracasos, y sus perspectivas futuras.

4.1. Objeciones y críticas

Inequivalencia de Walstrom

Una falla conceptual importante de la mecánica estocástica es la falta de una explicación de los mecanismos físicos que dan lugar a las fluctuaciones cuánticas. Pero existen otras fallas más graves que comprometen la viabilidad física de la teoría. Las dos más importantes son el problema de Wallstrom, que compromete la equivalencia de la mecánica estocástica con la mecánica cuántica, y la critica de Nelson a la no localidad de la teoría y la discrepancia que esta puede tener con la mecánica cuántica. [10] sobre la supuesta inequivalencia entre las ecuaciones de Madelung y la ecuación de Schrodinger. Un defecto en el procedimiento de Nelson fue señalado por Timothy Wallstrom, un alumno doctoral del mismo Edward Nelson. Wallstrom señaló que, dadas dos funciones R y S que satisfagan las ecuaciones de Madelung, dada $\psi = e^{R+iS}$, no se implica necesariamente la ecuación de Schrodinger, aunque la suficiencia es verdadera, es decir, que dadas R y S que satisfacen la ecuación de Schrodinger, formando la función ψ, entonces estas funciones sí satisfacen las ecuaciones de Madelung, como se calculó en el capítulo 2. El problema que señaló Wallstrom es que, en los argumentos de Nelson, al momento de definir a la velocidad actual como $v = \frac{\hbar}{m}\nabla S$, se le está definiendo de manera local como el gradiente de una función, pero no especifica sobre la naturaleza de la función S, en concreto, no se sabe si debe ser una función univaluada o multivaluada. Sin embargo, laa equivalencia entre las ecuaciones de Madelung y la ecuación de Schrodinger depende justamente de esta cuestión, de los valores que puede tomar S.

Ya sea que se haga la suposición de que S es univaluada o multivaluada, ambos casos son problemáticos. Si S es una función univaluada, entonces las ecuaciones de Madelung son equivalentes a la ecuación de Schrodinger, pero no captura la generalidad total de la ecuación de Schrodinger, no incluye funciones de onda con momento angular, las cuales de hecho sí se incluyen en el caso en el que S es multivaluada, y si se permite que S sea multivaluada, puede ocurrir que se generen soluciones de las ecuaciones de Madelung que no correspondan a ninguna solución de la ecuación de Schrodinger.

Por tanto, se tiene la dificultad de tener soluciones de más o de menos (para las ecuaciones de Madelung) que las necesarias para recuperar sólo aquellas que son soluciones a la ecuación de Schrodinger. Una forma de abordar el problema es suponer que S es multivaluada pero que las diferencias de valor a través de una curva cerrada se restringe a multiplos de $\hbar$, lo cual implica una ´´cuántización Ad Hoc''. Wallstrom concluye que para que la teoría de la mecánica estocástica sea equivalente al formalismo de Schrodinger, no basta con que se puedan deducir las ecuaciones de Madelung, sino que la condición de cuantización también debe ser deducible de la teoría, cuestión que para Wallstrom parecía muy difícil.

La crítica de Wallstrom ha sido tratada de varias maneras por diversos autores, por ejemplo Schmelzer [11] habla de una condición de regularidad que se debe imponer al laplaciano de la densidad de probabilidad, y que la condición de cuantización puede ser deducida a partir de dicha condición. Smolin [13] por su parte, señala que la mecánica estocástica no es una teoría estocástica clásica porque la energía conservada promedio no es una función lineal de la función de densidad de probabilidad, y argumenta que, al menos para algunos casos simples, la crítica de Wallstrom es equivocada, porque las soluciones de la mecánica estocástica que son problemáticas se corresponden con estados cuánticos cuya función de onda es discontinua, y que sin embargo dichas funciones de onda pertenecen al espacio de Hilbert de la teoría cuántica.

Una respuesta más elaborada al problema de Wallstrom fue elaborada recientemente en 2018 por Derakhshani [12], que saca ventaja de las similitudes de la mecánica estocástica con la teoría de Bohm-de Broglie y utiliza una propuesta de cuantización formulada por de Broglie. EL trabajo de Derakhasani es más elaborado, de hecho considera que la respuesta de Schmelzer es interesante aunque una respuesta no del todo satisfactoria 15.

Nelson

A pesar de que los caminos de las partículas existen incluso para las singularidades presentes en los drifts de la ecuación de difusión, la realidad física de las trayectorias se compromete seriamente con el problema de la no localidad de la mecánica estocástica. Nelson señala que la mecánica cuántica es local en el sentido de que para dos sistemas dinámicamente desacoplados, incluso si están entrelazadas, ninguna fuerza o medición en el segundo sistema afecta la evolución del primero, lo cual ciertamente no es el caso en la mecánica estocástica. Consideremos la siguiente ecuación de Schrodinger para dos partículas en una dimensión [1]:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,t) = \big((-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + kx^2) - \frac{\partial^2}{\partial y^2})\psi(x,y,t)$$

la partícula descrita por la coordenada y está libre. Sucede que si la función de onda inicial no es un producto de funciones, la función de auto correlaciones $E(y_t y_{t+as})$ depende de k.Como los origenes de ambos ejes es arbitrario, esta dependencia es independiente de la distancia. Si se cambiase la constante k del oscilador para la partícula en el eje x, el efecto sobre la trayectoria de la partícula en el eje y es inmediato, sin importar qué tan distantes sean. Este tipo de no localidad irritó a Nelson de tal modo que llegó a expresar en Quantum fluctuations de 1985 [40]: "He amado y nutrido a la mecánica estocástica por 17 años, y es doloroso abandonarla. Pero el propósito era construir una imagen física realista de los micro procesos. y una teoría que viola la localidad es insostenible". Sin embargo, en las paginas siguientes Nelson sugiere introducir una formulación de l amecánica estocástica en términos de procesos no markovianos para recuperar la localidad, e incluso conjetura sobre cómo podría llevarse a cabo dicho programa.

Hay un problema más grave para la mecánica estocástica. Para mediciones de un solo tiempo, la mecánica estocástica y la mecánica cuántica dan las mismas predicciones, sin embargo, para mediciones realizadas en dos tiempos distintos, estas difieren [14]. Este problema fue abordado recientemente por Derakhshani y Bacciagaluppi [15], quienes resuelven la polémica usando el concepto de ´´colapso efectivo" inspirado de las teorías tipo onda piloto (´´pilot wave theories", como Bohm o Everette), al costo de tener influencias no locales entre las partículas, al respecto señalan los autores que es una solución que a Nelson no le gustaría del todo, y que sin embargo dichas interacciones no locales serían las mismas responsables de que la mecánica estocástica viole las desigualdades de Bell. Carlen[1] piensa que dados que algunos experimentos muestran en qué medida la mecánica cuántica es no local, podría ser que la no localidad de la mecánica estocástica no sea necesariamente un ´´defecto".

4.2. Generalizaciones y éxitos

Nelson comenta en su libro ´´Dynamical theories of brownian motion" [9] de 1967, que la mecánica estocástica (en el estado temprano en el que se encontraba en ese momento) era una teoría frágil porque había ignorado cuestiones importantes como el spin, las ecuaciones relativistas, etc, y que si la teoría no era más que una coincidencia curiosa, entonces se generalizaría a dichas áreas. Posiblemente ni el mismo Nelson imaginaba la cantidad tan enorme de contribuciones que su teoría recibiría, en esta sección vamos a ver algunas de las más destacables y algunas aplicaciones que ha tenido la teoría a problemas concretos.

Spin y mecánica estocástica en variedades

La mecánica estocástica describe procesos de difusión en el espacio de configuraciones, y como en mecánica cuántica el spin tiene relación con el grupo $SU(2)$, entonces para incorporar el estudio de spin en la mecánica estocástica, se necesitan formular los procesos de difusión de Markov en el espacio de configuraciones $\mathbb{R}^3 \times SU(2)$ [1]. Los aportes más destacados fueron dados en 1970, Thaddeus George Dankel [16], alumno doctoral de Nelson, y por Guerra y Dohrn en en 1978 [17], quienes sentaron las bases para estudiar la mecánica estocástica en variedades Riemannianas. Estos trabajos se dieron en un periodo de poco más de 10 años desde la primera publicación de Nelson sobre la mecánica estocástica, y representó no sólo uno de los avances deseados por Nelson, sino que también representó un avance en el terreno de las matemáticas, sobre de la relación entre la teoría de la probabilidad y la geometría diferencial.

formulación analítica de la mecánica estocástica

Wolfgang [5] resume los aspectos más importantes sobre la formulación analítica de la mecánica estocástica. Recordemos que la deducción de la ecuación de Schrodinger que estudiamos en el capitulo anterior se basa en la suposición explicita de la validez de la segunda ley de Newton en conjunto con la definición de aceleración media estocástica 3.21, por tanto, podríamos considerar a la teoría en dicha formulación como un análogo estocástico de la mecánica de Newton, y del mismo modo que le mecánica newtoniana fue reformulada usando el concepto de Lagrangiano y el principio de mínima acción, la mecánica estocástica también evolucionó a su forma lagrangiana, trabajo de yasue [18], y de guerra y morato [19].

Yasue consideró un problema tomando el funcional de acción estocástico definido como:

$$S(x) = E\Big(\int_{t_0}^{t_1} L(x, b_+, b_-, t)dt \Big)$$

donde E es la esperenza respecto a la distribución del proceso de posición x. La variación del funcional de acción al rededor de un punto crítico x^* por un proceso estocástico Z con puntos finales fijos $x(t_0)$,$x(t_1)$ da como resultado un análogo estocástico de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - D_+\big(\frac{\partial L}{\partial D_- x}\big) - D_-\big(\frac{\partial L}{\partial D_+ x}\big) = 0,$$

y sí en esta ecuación se establece el langragiano (igualmente haciendo analogía con el langragiano clásico) $L = \frac{1}{4}\big((D_+x)^2 - (D_-x)^2\big) - V = \frac{m}{2}(v^2 + u^2) - V = T - V$, da como resultado la aceleración media estocástica 3.21.

Carlen y las trayectorias de la mecánica estocástica

La mecánica estocástica tiene como propósito de existir recuperar las trayectorias ausentes en la mecánica cuántica tradicional, pero una cuestión decisiva es si estas trayectorias existen, es decir, si existen procesos de Markov que sean soluciones a la ecuación estocástica 3.33, que tiene como característica que el coeficiente de drift está dado por $(Re + Im)\frac{\nabla\psi}{\psi}$, y la función de onda frecuentemente se anula en partes del dominio (nodos), por lo que se trata de un problema de difusión singular. De hecho, la asociación de un proceso de Markov de difusión a soluciones de la ecuación de Schrodinger es directo sólo para estados base, es en los estados excitados cuando la cuestión de los nodos es problemática, porque podría suceder que la ecuación estocástica tenga varias soluciones [20]. Entonces, la mecánica estocástica plantea un escenario matemático en el que la solubilidad de la ecuación estocástica 3.13 no está garantizada por el teorema 1 porque se comprometerían las hipótesis de dicho resultado por los nodos de la función de onda.

Carlen resolvió el problema en su artículo [21], que fue resultado de su doctorado bajo asesoría de Nelson. Resolvió esta complicada tarea usando herramientas muy sofisticadas de la teoría del análisis matemático (de hecho sus métodos son muy generales y también extendió su análisis al dominio de las variedades [1]) y logró establecer las condiciones bajo las que la ecuación 3.33 tiene solución y esta es única. Carlen establece la solubilidad del problema para una clase muy amplia de potenciales de Rellich, pidiendo de condición que el sistema de estudio tenga energía cinética inicial finita [22], y abarca un espectro muy amplio de problemas en mecánica cuántica. Demostró [1] que la identidad

$$\int_{\mathbb{R}} (u^2 + v^2)p(x,t) = \int_{\mathbb{R}} |\nabla\psi(x,t)|^2 dx,$$

provee una cota para $b = u + v$ en términos de la energía cinética cuántica, y que dados p y b_+ (y en consecuencia v y u), tales que:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u^2 + v^2)p(x,t)dxdt < \infty,$$

entonces existe una única medida de probabilidad sobre el espacio de trayectorias bajo la que $x(t)$ es solución de la ecuación diferencial estocástica 3.33.

Es fácil ver que la aportación de Carlen resulta fundamental para poder considerar de inicio a la mecánica estocástica como un contendiente serio para explicar a la mecánica cuántica, y por ellos posiblemente sea su trabajo el más importante en toda la materia desde el artículo de Nelson de 1966 en el que formuló la teoría.

Mecánica estocástica con potencial escalar cero

Shucker, igualmente alumno doctoral de Nelson, trabajó [23] en el comportamiento asintótico de una partícula sin spin y libre de potencial, y concluyó que en el límite asintótico para tiempos largos, las trayectorias estocásticas se comportan como trayectorias clásicas.

Shucker demostró que dada ψ, solución a la ecuación de Schrodinger libre (con $K = 0$), y si se cumple que $\int |x|\psi(x,0)dx < \infty$, entonces para casi toda trayectoria $x(t)$ asociada a la solución ψ, el límite:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t}$$

existe y que la densidad de probabilidad de este límite viene dado por el cuadrado del valor absoluto de la transformada de fourier de $\psi(x,0)$ (la misma distribución que el momento en mecánica cuántica). También provee una aproximación lineal para la ecuación estocástica de las trayectorias:

$$dx(t) \approx \frac{x(t)}{t}dt + dw(t).$$

Extensiones relativistas y teoría de campos

La cuestión de extender la mecánica de Nelson para explicar fenómenos relativistas ha sido abordada varias veces, aunque no se considera que haya una teoría satisfactoria al respecto. Por ejemplo, en el artículo [24] se encuentran difusiones de Markov correspondientes a soluciones de la ecuación de Klein Gordon (el caso de partículas relativistas sin spin) usando un análogo relativista de la ecuación estocástica de newton, como hizo Nelson originalmente. Su generalización se basa en estudiar una difusión de Markov en el espacio M^4 parametrizada por una variable invariante. Pero en [25] se critica los enfoques que abordan el problema intentando estudiar difusiones en el espacio de Minkowski porque podría implicar la violación de la causalidad o movimiento determinista. En [26] estudia una generalización de la mecánica estocástica en la que se consideran procesos de Levy, mientras que en la teoría de Nelson solamente se abarca el movimiento browniano o proceso de Wiener, y encuentra que para una partícula libre relativista sin spin el proceso estocástico asociado es un proceso puro de saltos.

Respecto a la teoría de campos, en su artículo de 2005 [27] Nelson comenta que la mecánica estocástica había alcanzado un punto crítico debido a los problemas que dicha teoría tenía, como la no localidad y sus discrepancias con la mecánica cuántica, y que una posible dirección para contrarrestar dichas dificultades era la de formular una teoría de campos acorde a partir de la mecánica estocástica, y pasar de estudia procesos de difusión en el espacio de configuraciones, a estudiar campos aleatorios en el espacio tiempo. Nelson, en su artículo de 2014 [28], reconoció las dificultades para hacer a partir de la mecánica estocástica una teoría de campos relativistas por los problemas surgidos de conjugar la teoría de la probabilidad con las métricas usadas en los espacios utilizados en teoría de la relatividad, pero al final de dicho artículo, en lo que fueron sus últimas palabras respecto a su teoría calificadas por él mismo como

´´epifanía" de último momento, no descartó completamente la posible realización de dicho programa si pudieran cumplirse algunas condiciones ´´big ifs". Ejemplos de teorías de campo a partir de la mecánica estocástica, está por ejemplo en el libro de Wolfgang [8], donde se resuelve el problema del oscilador armónico cuántico con mecánica estocástica, y partiendo de ello construyen un campo aleatorio gaussiano que es la teoría de campos estocástica correspondiente a la formulación euclidiana de la teoría cuántica de campos, y por otra parte, el trabajo reciente [31] estudia simulaciones de una teoría de campos inspirada en la mecánica de Nelson.

Algunas aplicaciones

Debido a que en mecánica cuántica ordinaria no hay un entendimiento claro de en qué momentos suceden los procesos atómicos, la mecánica estocástica abre la puerta para investigar estas ocurrencias, por ejemplo problemas de primera pasada (first passage time).

Recientemente ha habido estudios sobre el tiempo de ´´tunneling". Wolfgang [8, 5] estudia el problema del tiempo de tunneling en un pozo doble de potencial, formulando el problema como un problema de Kramers de escape de una partícula difusiva, y obtiene una distribución para los tiempos de tunneling.

Truman [29, 30] estudia a detalle al átomo de hidrogeno en estado base, cuya ecuación estocástica está dada por 3.34 y demuestra que en dicha ecuación el proceso $x/|x|$ es un movimiento Browniano en la esfera unitaria, también aborda problemas de primera visita asociados al proceso estocástico asociado con la distancia radial, como por ejemplo pasajes a través de superficies esféricas al rededor del núcleo. Incluso propone que los problemas de primera visita pueden ser usados para verificar experimentalmente a la mecánica estocástica, aunque dichos experimentos requerirían precisiones tales de poder medir un evento que se da una vez al año.

En [32] se comenta que un problema viejo en mecánica cuántica es obtener leyes Keplerianas de movimiento planetario al tomar el límite de correspondencia de Bohr para estado atómico elípticos, y aborda este problema con la mecánica estocástica de Nelson. Concluye que en el límite de correspondencia de Bohr en dos dimensiones, el proceso de difusión correspondiente al estado atómico elíptico en el caso del potencial de Coulomb se reduce efectivamente a movimiento Kepleriano en una elipse de Kepler para movimientos que comienzan fuera de esta elipse. Otro trabajo que también explora el límite clásico Kepleriano es [33], que concluye que el átomo de hidrógeno puede ser descrito por tres procesos gaussianos de Markov controlados por el problema de Kepler clásico.

Los puntos de vista de Nelson sobre de la mecánica estocástica

La actitud de Nelson hacía su teoría fue de honesto escepticismo desde que se hicieron manifiestos los problemas de la no localidad y la discrepancia con la mecánica cuántica (al parecer estas cuestiones le irritaban mucho más que el problema de Wallstrom). Por dichos problemas, en sus palabras de agradecimiento en el libro editado por Faris en honor a su trayectoria 14, Nelson se mostró gratificado de que la mecánica estocástica se hubiese ganado un lugar permanente en la teoría de los procesos de Markov, y también reconoció que no pensaba que su teoría fuera viable físicamente, pero recordemos que años antes había comentado que la localidad en el problema de los osciladores podría recuperarse incorporando a la teoría elementos no Markovianos. Y aunque no trabajó dicho programa, en su review de 2012 [39] mostró algo de optimismo al resumir los mayores éxitos de la mecánica estocástica en su opinión (algunos de los cuales hemos discutido brevemente):

- Una derivación clásica de la ecuación de Schrodinger.
- Se cumple siempre que, dada $\psi = e^{R(x,t)+iS(x,t)}$, se obtiene que $|\psi|^2 = p(x,t)$.
- La demostración de Carlen sobre la existencia de las soluciones a la ecuación estocástica 3.1 con drift singular. En opinión de Nelson, es la cuestión más complicada en toda la materia.
- Una explicación estocástica del problema de la doble rendija, en la que las trayectorias sólo pasan por una rendija , pero se produce una densidad de probabilidad como aquella de una interferencia de ondas [40].
- La investigación de Shucker sobre la explicación estocástica de la relación entre el momento y la integral de fourier.
- Una explicación estocástica de las estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein [40].
- Una explicación estocástica del por qué el spin es entero o medio entero. Producto de las investigaciones de Dankel, Wallstrom, y Dohrn y Guerra.

y se pregunta,´´¿Cómo puede una teoría ser tan correcta y al mismo tiempo tan equivocada? La explicación más natural es que La mecánica estocástica es una aproximación a una teoría correcta de la mecánica cuántica como emergente. Pero ¿cuál es la teoría correcta?".

4.3. Otras teorías

Masao Nagasawa

Masao Nagasawa [3,34,35] formula una teoría de la mecánica cuántica no relativista sin spin en términos de procesos estocásticos, igualmente tomando como base la reversibilidad de procesos de difusión de Markov. Demuestra que es posible representar la medida de un proceso de Markov, además de la representación clásica de Komogorov, una de ellas la llama representación ´´reversible" y en otra llama ´´representación de Schrdodinger", con esto prueba que la ecuación de Schrodinger es equivalente a un par de ecuaciones reales de difusión en dualidad (prospectiva y retrospectiva). Su teoría no está peleada con la de Nelson, ni con la teoría estocástica propuesta por Zambrini llamada ´´mecánica cuántica euclideana" [36], de hecho prueba que las teorías de ellos tres, e incluso también la primigenia teoría de Fenyes, son consecuencia de los teoremas sobre la reversibilidad de procesos de Markov de difusión que demuestra en su texto [3], y en un apéndice de dicho texto demuestra que cada una de las teorias mencionadas ha abordado de manera distinta el problema, pero que todas se reducen a los mismos teoremas matemáticos, afirmación que implicaría que en el fondo ´´sólo una" teoría estocástica de la mecánica cuántica, y que las diversas formulaciones mencionadas, están en lo correcto o todas son incorrectas. También argumenta que la teoría de Bohm sería una aproximación semi clásica a la teoría estocástica de la mecánica cuántica.

En su libro 34 explica de manera explicita cómo se construyen los ´´procesos de Schrodinger". También extiende su teoría al caso relativista y comenta que el resultado es que las trayectorias son procesos puros de salto (algo similar a lo que ya comentamos que encontró Petroni para el caso da la partícula relativista sin spin) y argumenta que esto sería la creación y destrucción de partículas en teoría cuántica de campos relativista, teoría en la que tampoco existe la noción de trayectorias de una partícula, y que este hallazgo ofrecería un nuevo entendimiento de la creación y aniquilación de partículas. En su texto más reciente de 2021 recapitula sus resultados de sus textos anteriores y agrega algunas discusiones sobre momento, localidad, entropia, etc.

Folkert Kuipers

Recientemente, en este mismo 2023, el Dr. Folker Kuipers [37,38] publica su trabajo que llama una reformulación de la mecánica estocástica de Nelson (para partículas no relativistas y sin spin). Su forma de abordar el problema es por medio de la ´´complejización" de procesos de difusión, a partir de esto demuestra que el movimiento browniano clásico y la mecánica cuántica son dos subproductos de este proceso estocástico complejo, y también argumenta que bajo esta formulación se resuelven el problema de Wallstrom y la discrepancia de resultados con la mecánica cuántica para el caso de múltiples mediciones. Llama la atención que en su desarrollo también obtiene una descripción general de procesos de difusión por medio de un par de ecuaciones de difusión prospectiva y retrospectiva, algo que es similar a lo argumentado en el planteamiento del Dr.Nagasawa.

El Dr. Kuipers también logra una extensión de su teoría al caso relativista, y obtiene un proceso estocástico asociado a la ecuación de Klein-Gordon, y argumenta que esto refutaría la creencia de que no existe una teoría cuántica relativista para una sóla partícula. No sólo eso, también extiende el caso no relativista y relativista a variedades, donde usa geometría de segundo orden, la cuál surge debido a que la integral de Ito no respeta la regla de la cadena , y como hemos visto, en su lugar tiene su propia regla de diferenciación que es la formula de Ito. Una alternativa a la integral de Ito es la integral de Stratonovich, que respeta la regla de la cadena, pero no es una martingala, propiedad fundamental para obtener propiedades probabilisticas, que sin embargo sí cumple la integral de Ito, y por eso es valioso obtener una descripción en términos de la integral de Ito. A este momento su trabajo es reciente y estaría en proceso de retroalimentación.

Capítulo 5

conclusiones

La mecánica estocástica tiene cerca de 60 años de vida. A lo largo de estas décadas ha tenido resultados mixtos. En términos puramente matemáticos ha representado una extensión interesante de los procesos de Markov, sin embargo, el propósito existir de la teoría era ser una teoría física que ´´diera sentido" a las aparentes paradojas de la mecánica cuántica. En estos términos, sus resultados han sido más bien mixtos, aunque Nelson celebraba en ´´Quantum fluctuations" [40] que los éxitos de la mecánica estocástica muestran que, contraria a la creencia que hay entre muchos físicos, no es obviamente imposible que no se puedan explicar fenómenos cuánticos en términos clásicos.

Sin embargo, hay quienes piensan que la teoría estocástica de la mecánica cuántica debería tener más reconocimiento. Por ejemplo, el Dr.Kuipers expresa en [37] que la teoría ha sufrido de criticismo injusto, que en gran medida es producto de un entenimiento érroneo o incompleto de la teoría. Similarmente, Derakhasani [15] comenta que el criticismo de Wallstrom y la discrepancia con la mecánica cuántica habían socavado la credibilidad de la teoría. Curiosamente, la cuestión de las interacciones no locales que la teoría conlleva pareció irritar a Nelson mucho más que a la comunidad de físicos, y los dichos de Nelson en ´´Quantum fluctuations" en los que parecía renunciar a su teoría por este motivo, fueron mal interpretados y eso conllevo una pérdida de interés en la teoría [1].

Incluso con todos esos fallos y malentendidos, la teoría ha persistido, y tampoco Nelson perdió esperanza en ella. Es interesante preguntarnos qué pensaría Nelson, quién falleció en 2014, respecto a los nuevos desarrollos que ha habido en los últimos años. Los trabajos de Derakhasani y de Derakhasani y Bacciagaluppi [12,15] sucedieron después del fallecimiento de Nelson, y son trabajos meticulosos que buscan arreglar lo que son básicamente todos los problemas de la mecánica estocástica (salvo la cuestión de la localidad). Además, el trabajo del Dr.Kuipers representa un avance importante, porque en su formulación, los problemas de Wallstrom y la discrepancia con la mecánica cuántica se resuelven sin tener que añadir suposiciones en forma de ´´parche".

Nelson comentó en [14] que el problema de encontrar una interpretación realista de la mecánica cuántica seguía tan irresoluto como lo era en 1920, y eso sigue sin cambiar sin duda, y seguramente lo seguirá siendo durante bastante tiempo (si acaso un día se llega a la respuesta), pero quizá sea cierto que la mecánica estocástica ha recibido injustamente menos atención de la que se merece, es motivo de mesurado optimismo que una teoría matemática tan bien establecida como lo es la de los procesos estocásticos genere de forma tan ´´natural" respuestas a las cuestiones tan crípticas de la mecánica cuántica como el problema de la doble rendija, y también sería de esperar que los nuevos avances generasen un nuevo interés en la mecánica estocástica, la cuál muy posiblemente todavía tiene muchas cosas por ofrecer, tanto en la física como en las matemáticas.

Bibliografía

[1] Carlen, E. 2007. Chapter Five. Stochastic Mechanics: A Look Back and a Look Ahead. In W. Faris (Ed.), Diffusion, Quantum Theory, and Radically Elementary Mathematics. Princeton: Princeton University Press. 117-140.

[2] Zambrini, J.C. 1986. Stochastic mechanics according to E. Schrödinger. Phys. Rev. A 33, 1532.

[3] Nagasawa, M. 1983. Schrodinger equations and diffusion theory. Monographs in Mathematics, vol 86. Birkhäuser, Basel.

[4] Nelson, E. 1966. Derivation of the Schrodinger Equation from Newtonian Mechanics. Phys. Rev. 150, 1079

[5] Beyer, M, Wolgfang, P. 2021. On the Stochastic Mechanics Foundation of Quantum Mechanics. Universe. 2021; 7(6):166.

[6] Petroni, N. 2020. Probability and Stochastic Processes for Physicists. UNITEXT for Physics. Springer, Cham.

[7] Gardiner, C. 2004. Handbook of Stochastic Methods, Springer Berlin, Heidelberg.

[8] Baschnagel, J, Wolfgang, P. 2013. Stochastic Processes. Springer, Heidelberg.

[9] Nelson, E. 1967. Dynamical theories of brownian motion. Princeton: Princeton University Press.

[10] Bacciagaluppi, G. 2005. A Conceptual Introduction to Nelson's Mechanics. Endophysics, Time, Quantum and the Subjective. 367-388.

[11] Schmelzer, I. 2011. A solution for the Wallstrom problem of Nelsonian stochastics. arXiv:1101.5774

[12] Derakhshani, M. 2018. Stochastic Mechanics Without Ad Hoc Quantization: Theory And Applications To Semiclassical Gravity. arXiv:1804.01394

[13] Smolin, L. (2006). Could quantum mechanics be an approximation to another, cosmological, theory?. Perimeter Institute. https://pirsa.org/06100010

[14] Nelson, E. 2007. Chapter Ten. Stochastic Mechanics: A Look Back and a Look Ahead. In W. Faris (Ed.), Diffusion, Quantum Theory, and Radically Elementary Mathematics. Princeton: Princeton University Press. 229-232

[15] Bacciagalupi, G, Derakhshani, M. 2022. On Multi-Time Correlations in Stochastic Mechanics. arXiv:2208.14189

[16] Dankel, T.G. 1970. Mechanics on manifolds and the incorporation of spin into Nelson's Stochastic mechanics. Arch. Rational Mech. Anal. 37, 192–221.

[17] Dohrn, D., Guerra, F. 1978. Nelson's stochastic mechanics on Riemannian manifolds. Lett. Nuovo Cimento 22, 121–127.

[18] Yasue, K. 1980. Stochastic calculus of variations. Letters in Mathematical Physics 4, 357–360.

[19] Guerra, F, Morato, L. 1983. Quantization of dynamical systems and stochastic control theory. Phys. Rev. D 27, 1774.

[20] Guerra, F. 2023. The Albeverio–Høegh-Krohn Paradox in Nelson Stochastic Mechanics. In: Hilbert, A., Mastrogiacomo, E., Mazzucchi, S., Rüdiger, B., Ugolini, S. (eds) Quantum and Stochastic Mathematical Physics. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 377. Springer, Cham.

[21] Carlen, E. 1984. Conservative diffusions. Commun.Math. Phys. 94, 293–315.

[22] Zambrini, J.C. 1985. Stochastic dynamics: A review of stochastic calculus of variations. Int J Theor Phys 24, 277–327.

[23] Shucker, D. 1980. Stochastic mechanics of systems with zero potential. Journal of Functional Analysis Volume 38, Issue 2, 146-155.

[24] Zastawniak, T. 1990. A Relativistic Version of Nelson's Stochastic Mechanics. Europhysics Letters, Volume 13, Number 1.

[25] Garbaczewski, P. 1992. Relativistic problem of random flights and Nelson's stochastic mechanics. Volume 164, Issue 1, 6-16.

[26] Petroni, N, Pusterla, M. 2009. Lévy processes and Schrödinger equation. Volume 164, Issue 1, 6-16.

[27] Nelson, E. 1986. Field theory and the future of stochastic mechanics. In: Albeverio, S., Casati, G., Merlini, D. (eds) Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems. Lecture Notes in Physics, vol 262. Springer, Berlin, Heidelberg.

[28] Nelson, E. 2014. Stochastic mechanics of relativistic fields. Journal of Physics Conference Series 504(1)

[29] Truman, A., Lewis, J.T. 2006. The stochastic mechanics of the ground-state of the hydrogen atom. In: Albeverio, S.A., Blanchard, P., Streit, L. (eds) Stochastic Processes — Mathematics and Physics. Lecture Notes in Mathematics, vol 1158. Springer, Berlin, Heidelberg.

[30] Carlen, E.A., Truman, A. 1986. Sojourn Times and First Hitting Times in Stochastic Mechanics. In: Gorini, V., Frigerio, A. (eds) Fundamental Aspects of Quantum Theory. NATO ASI Series, vol 144. Springer, Boston, MA.

[31] Carosso, A. 2023. Simulating Nelsonian Quantum Field Theory. arXiv:2307.03188

[32] Durran, R, Neate, A, Truman, A. 2008 . The divine clockwork: Bohr's correspondence principle and Nelson's stochastic mechanics for the atomic elliptic state. J. Math. Phys. 49, 032102

[33] Garbaczewsk, P. 1991. Relativistic problem of random flights and Nelson's stochastic mechanics. PhysicsLettersA 164 (1992) 6—16.

[34] Nagasawa, M. 2000. Stochastic Processes in Quantum Physics. Monographs in Mathematics, vol 94. Birkhäuser, Basel.

[35] Nagasawa, M. 2021. Markov Processes and Quantum Theory. Monographs in Mathematics, vol 109. Birkhäuser, Cham.

[36] Zambrini, J.C. 1984. Stochastic Dynamics: A Review of Stochastic Calculus of Variations. International Journal of Theoretical Physics volume 24, 277–327.

[37] Kuipers, F. 2023. Stochastic Mechanics. SpringerBriefs in Physics. Springer, Cham.

[38] Kuipers, F. 2023. Quantum Mechanics from Stochastic Processes. arXiv:2304.07524

[39] Nelson, E. 2012. Review of stochastic mechanics. J. Phys.: Conf. Ser. 361 012011.

[40] Nelson, E. 1985. Quantum fluctuations. Princeton: Princeton university press.