FÍSICA ESTADÍSTICA I-PCF
EXAMEN PARCIAL II

Resuelva los siguientes dos problemas.

1. Considere un gas de fermiones de masa m y espín $s = 1/2$ en un volumen V. Los fermiones pueden reaccionar entre ellos formando un gas de pares ligados (moléculas), de espín $S = 0$ y anergía de ligadura $-\epsilon_0$. A la vez, los pares pueden disociarse de nuevo en fermiones libres. Considere la situación de equilibrio termodinámico entre ambos gases y que el número total de fermiones del sistema (fermiones libres más fermiones que forman los pares) se mantiene constante. Adicionalmente considere que el pares tienen una relación de dispersión $E_K = -\epsilon_0 + C_B K^2$ y los fermiones libres $\varepsilon_k = ck^2$, la cual es independiente del espín. Desprecie cualquier otro elemento de interacción en el sistema.

    a) Calcule la gran función de partición del sistema $\mathcal{Z}(T, V, \mu_F, \mu_B)$ y de esta el potencial termodinámico $\Omega(T, V, \mu_F, \mu_B)$, donde T es la temperatura del sistema y μ_F, μ_B es el potencial químico de los fermiones libres y de los pares, respectivamente.

    b) Si la temperatura es lo suficientemente alta, de tal manera que el gas de pares no está en el régimen de condensación Bose-Eisntein, escriba la expresión general que determina el potencial químico μ_b. Discuta el caso de dos dimensiones.

    c) Discuta sobre la posibilidad de observar condensación de Bose-Einstein a temperaturas finitas.

2. Considere la mezcla de dos gases ideales ultrarelativistas de fermiones de carga ± 1, respectivamente, en una dimensión, sin espín y en equilibrio termodinámico. Adicionalmente, a cero temperatura, la carga neta es positiva dada por $+\langle N_0 \rangle$. En esta situación la creación de pares partícula-antipartícula debe ser considerada y la interacción coulombiana entre fermiones puede ser ignorada. La relación energía-momento de una (anti)partícula está dada por

$$\epsilon_k = \hbar c |k|,$$

    con c la velocidad de la luz y k el número de onda asociado al momento lineal de la (anti)partícula.

    a) Calcule la gran función de partición del sistema $\mathcal{Z}(z, \overline{z}, V, T)$, donde $z = \exp\{\beta\mu\}$, μ y $\overline{z} = \exp\{\beta\overline{\mu}\}$, $\overline{\mu}$ son las fugacidades y potenciales químicos de los subsistemas formados por particulas y antipartículas respectivamente.

    b) Calcule la energía de Fermi del sistema.

    c) Use el hecho que la diferencia del número de partículas $\langle N \rangle$ y el número de antipartículas $\langle \overline{N} \rangle$ es una cantidad conservada para calcular los potenciales químicos μ y $\overline{\mu}$.

d) Calcule el calor específico a volumen constante C_V del sistema. Discuta los límites $T \gg T_F$ y $T \ll T_F$. Una expresión en términos de funciones elementales puede obtenerse para C_V si se usa la relación

$$f_2(z) + f_2(z^{-1}) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{E_F}{k_B T}\right)^2,$$

con $f_\sigma(z)$ la función de Fermi de orden σ definida como

$$f_\sigma(z) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{\sigma-1}}{e^x z^{-1} + 1}$$