<u>FÍSICA ESTADÍSTICA I-PCF</u>

<u>TAREA 4</u>

Fecha de entrega: viernes 6 de septiembre de 2013

1. Muestre que $F_N = Ae^{-\beta H}$, con A y β constantes y H el Hamiltoniano que describe el sistema, es una solución estacionaria de la ecuación de Liouville

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\partial F_N}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F_N}{\partial q_i} q_i \right] = 0 \tag{1}$$

   Determine la constante A en términos de β y H.

2. Considere la trayectoria en el espacio fase de un sistema en particular. Sobre esta trayectoria, se identifican los puntos Γ_0, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ con $n \to \infty$, de tal manera que al sistema le toma el mismo tiempo τ en ir de Γ_i a Γ_{i+1}. Reemplazando la integral que aparece en el promedio temporal por una suma, muestre que este promedio temporal es igual al promedio sobre el ensamble cuyos elementos corresponden exactamente a los estados Γ_i.

3. Considere un gas de N partículas, sin interacción entre ellas, en una caja de volumen $V = L^3$ con L la longitud de los lados de la caja.

   a) Encuentre la distribución de probabilidad $F_N(\{q\}, \{p\}, t)$ al tiempo t resolviendo la ecuación de Liouville con la condición inicial

$$F_N(\{q\}, \{p\}, 0) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2L} \right)^{3N} \prod_{i=1}^{3N} e^{-p_i^2/2m} \sin\left(\frac{\pi q_i}{L} \right) \tag{2}$$

   con $0 \leq q_i \leq L$. Considere condiciones de frontera periódicas para las coordenadas q.
   La siguiente expresión puede ser de utilidad

$$\int_0^L dx \, \sin\left(\frac{\pi q}{L} \right) \ln\left[\sin\left(\frac{\pi q}{L} \right) \right] = \frac{L}{\pi}(2 - \ln 2)$$

   b) Calcule la entropía al tiempo $t = 0$ cuando $F_N(\{q\}, \{p\}, 0)$ está dada por la expressión (2) y discuta sobre su evolución temporal.

4. Considere un sistema dinámico descrito por la ecuaciones de movimiento

$$\frac{dp}{dt} = \alpha; \qquad \frac{dq}{dt} = \beta$$

   con α y β constantes, en el espacio fase $0 \leq p \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$. Considere el caso de condiciones de frontera periódicas.

   a) ¿Es el sistema ergódico? Si lo es, demuéstrelo.

   b) Si inicialmente la densidad de puntos en el espacio fase es $\rho(p, q, 0)$, encuentra dicha densidad al tiempo t.

c) Encuentre la "hamiltoniana" $H(q,p)$ y argumente si es físicamente aceptable.

5. La siguiente figura representa una órbita en el espacio fase descrita por las coordenadas $p = A\cos(\omega t)$, $q = A\sin(\sqrt{2}\,\omega t)$, con A y $\omega > 0$ constantes, después de haber transcurrido un tiempo t_0. Discuta sobre la ergocidad del sistema.