FÍSICA ESTADÍSTICA I-PCF

TAREA 5

Fecha de entrega: viernes 13 de septiembre de 2013

1. La integral de una función de la hamiltoniana $\Gamma[H(\{q,p\})]$ en el espacio fase de N partículas, $\int d^{3N}p\, d^{3N}q\, \Gamma\left[H(\{q,p\})\right]$, puede sustituirse por una integral sobre la energía total del sistema E introduciendo la densidad de estados $g(E)$ de la siguiente manera:

$$\frac{1}{h^{3N}}\int d^{3N}p\, d^{3N}q\, \Gamma\left[H(\{q,p\})\right] = \int_0^\infty dE\, g(E)\, \Gamma(E).$$

   a) Muestre que para el ensamble microcanónico

$$g(E) = \Omega(E,V,N) = \frac{1}{N!h^{3N}}\int d^{3N}p\, d^{3N}q\ \ \delta\left[E - H(\{q,p\})\right],$$

   con $\delta(x)$ la delta de Dirac.

   b) Para un sistema de osciladores armónicos tridimensionales, isotrópicos e independientes, establezca una relación entre la densidad de estados $g_N(E)$ en el espacio fase de N partículas con la densidad de estados $g_1(E)$ en el espacio fase de un solo oscilador.

   c) Haga lo mismo pero ahora para osciladores en dos y una dimensiones.

   d) ¿Cuál es la densidad de estados de una partícula libre en d-dimensiones?

2. Considere un sistema de N partículas independientes e idénticas. La hamiltoniana de una partícula está dada por

$$h_i(p_{\phi i}, \phi_i) = \frac{p_{\phi i}^2}{2ml} - mgl\cos\phi_i,$$

   donde m, l y g son constantes con unidades de masa, longitud y longitud/tiempo^2 respectivamente. ϕ_i es la coordenada generalizada que describe el movimiento de la partícula y $p_{\phi i}$ su correspondiente momento.

   a) Calcule la densidad de estados $g_1(E)$ de una sola partícula.

   b) Calcule la función de partición $Z_N(T)$ del sistema total, donde T denota la temperatura del sistema.

   c) Discuta las propiedades termodinámicas de este sistema.

3. Use la expresión para la densidad de probabilidad $Pr(E;\beta)$ con $\beta^{-1} = k_B T$ del ensamble canónico para demostrar que:

   a) Si $f(E)$ es una función bien comportada de E entonces

$$\frac{d}{d\beta}\langle f(E)\rangle = U\,\langle f(E)\rangle - \langle Ef(E)\rangle$$

b) $\langle (E-U)^3 \rangle = k_B^2 T^3 \left[T \left(\dfrac{\partial C_V}{\partial T} \right)_V + 2C_V \right]$. Discuta el significado físico de esta cantidad y calcúlela para un gas ideal clásico relativista.

U denota el promedio de la energía, es decir, $U = \langle E \rangle$.
Considere que $\langle (\cdot) \rangle = \int_0^\infty dE\, g(E)\, Pr(E;\beta)\, (\cdot)$.