FÍSICA ESTADÍSTICA I-PCF

TAREA 8

Fecha de entrega: lunes 21 de octubre de 2013

1. **La aproximación de *Debye-Hückel*.-** Un electrolito está conformado por iones positivos ($+q$) y negativos ($-q$) en iguales cantidades por lo que, en promedio, la solución es eléctricamente neutra. Sin embargo debido a fluctuaciones térmicas, la densidad de carga circundante a cada uno de los iones no es uniforme. Supóngase que localmente las densidades de carga $n^{\pm}(\boldsymbol{r})$ en el punto $\boldsymbol{r}$ no difieren mucho del valor promedio n_0, es decir, $|n^{\pm}(\boldsymbol{r}) - n_0| \ll n_0$.

   a) Denote con $\varphi(\boldsymbol{r})$ el potencial eléctrico promedio en el punto $\boldsymbol{r}$. Justifique cualitativamente que, bajo las condiciones del problema,

   $$|q\varphi(\boldsymbol{r})|/k_B T \ll 1$$

   y entonces se puede escribir que

   $$n^{\pm}(\boldsymbol{r}) \simeq n_0 \left(1 \mp \frac{q\varphi(\boldsymbol{r})}{k_B T}\right).$$

   b) Las densidades de carga están relacionads por la ecuación de Poisson, la cual puede ser escrita como

   $$-\nabla^2 \left(\varphi(\boldsymbol{r}) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = \frac{q}{\epsilon_0}\left[n^{+}(\boldsymbol{r}) - n^{-}(\boldsymbol{r})\right]$$
   $$-\nabla^2 \varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{\epsilon_0}\left[n^{+}(\boldsymbol{r}) - n^{-}(\boldsymbol{r})\right] + \frac{q}{\epsilon_0}\delta(\boldsymbol{r})$$

   Discuta esta ecuación y use el inciso anterior para cerrarla en $\varphi(\boldsymbol{r})$. Use el método de la transformada de Fourier para calcular $\hat{\varphi}(\boldsymbol{k})$ con $\boldsymbol{k}$ las coordenadas de Fourier, y a partir de esta encuentre que

   $$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/b},$$

   el cual corresponde al potencial de Yukawa. ¿Cuál es el valor de b? y ¿Cuál su significado fisico?

   c) Consider las densidades de probabilidad de dos partículas $n_2^{\pm}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$. Justifique la siguiente expresión para la energía potencial electrostática

   $$E_{pot} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r} d^3\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\left[n_2^{+}(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) - n_2^{-}(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\right].$$

   Demuestre que en el caso homogeneo

   $$n_2^{\pm}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = n_0\, n^{\pm}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})$$

   y use este resultado para calcular explícitamente

   $$E_{pot} = -nV\frac{q^2}{4\pi\epsilon b}.$$