FÍSICA ESTADÍSTICA I-PCF
TAREA 9
Fecha de entrega: lunes 28 de octubre de 2013

1. Considere el modelo de Ising en una cadena lineal con 4 sitios, haga una lista de las configuraciones posibles del sistema y calcule la energía total así como la probabilidad de cada una de ellas en el ensamble canónico cuando:

   a) No hay campo magnético externo.

   b) Existe un campo magético externo H.

   Discuta sus resultados en los casos de fronteras periódicas y fronteras libres.

2. Considere el modelo de Ising en campo magnético nulo.

   a) Demuestre que la susceptibilidad magnética, $\chi_T(T, H = 0) = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T$, se puede escribir como:

   $$\chi_T(T, H = 0) = \frac{\mu^2}{k_B T} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle S_i S_j \rangle \tag{1}$$

   Sugerencia: Use la definición de valor en expectación en términos de la probabilidad de encontrar al sistema en una configuración $\{S_i\}$ dada.

   b) Calcule explícitamente $\langle S_i S_j \rangle$ en el caso de una cadena lineal de espines $S_i = \pm 1$ usando el método de la matriz de transferencia.

   c) Las sumas que aparecen en la ecuación (1) pueden evaluarse de la siguiente manera:
   N términos que contribuyen cuando $|i - j| = 0$
   $2(N - 1)$ términos que contribuyen cuando $|i - j| = 1$
   $2(N - 2)$ términos que contribuyen cuando $|i - j| = 2\ldots$
   $2(N - (N - 1))$ términos que contribuyen cuando $|i - j| = N - 1$
   Por lo que

   $$\chi_T(T, H = 0) = \frac{\mu^2}{k_B T} \left[N + 2 \sum_{l=1}^{N-1} (N - l) \{\tanh \beta J\}^l \right]$$

   Evalúe la suma geométrica que aparece dentro de los paréntesis cuadrados para probar que en el límite termodinámico, $N \to \infty$

   $$\chi_T(T, H = 0) = \frac{\mu^2}{k_B T} e^{2\beta J}$$

   Haga un grafico de $\chi_T(T, H = 0)$ como función de la temperatura.

3. Correlaciones energía energía en el modelo de Ising.

a) Para cualquier dimensión del modelo de Ising se introduce la cantidad

$$E_i = \frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j$$

donde i tiene un valor fijo en la suma. Muestre que el calor específico por espín C puede relacionarse con la función de correlación conexa $\langle E_i E_j \rangle_c$ de la siguiente manera

$$C = k_B \beta^2 J \sum_j \langle E_i E_j \rangle_c = k_B \beta^2 J \sum_j \langle (E_i - \langle E_i \rangle)(E_j - \langle E_j \rangle) \rangle$$

b) Calcule explícitamente $\langle E_i E_j \rangle_c$ en el caso de una dimensión.
Sugerencia: Calcule las funciones de correlación de cuatro spínes $\langle S_i S_j S_k S_l \rangle$, $i \leq j \leq k \leq l$ y examine por separado los casos $i = j$, $j = i + 1$ y $j = i + p$, $p \geq 2$.

c) Verifique sus resultados calculando la energía interna y de esta el calor específico del modelo de Ising en una dimensión.