Soluciones a los problemas de la tarea 3

Francisco Sevilla

September 19, 2011

1.- De la tercera Ley de Kepler tenemos que

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{M_T G}{(2\pi)^2}$$

y simplemente sustituyendo los datos $R = 3.8 \times 10^8$m, $T = 2.333 \times 10^6$ s se tiene $M_T = 5.97 \times 10^{24}$ kg.

2.- Ya que $\vec{r} = r_0 \hat{r}$ tenemos que

a)

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \dot{\vec{r}} \\
&= r_0 \frac{d}{dt}\hat{r} \\
&= r_0 \frac{d}{dt}(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}) \\
&= r_0(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath})\frac{d\theta}{dt} \\
&= r_0\dot{\theta}\,\hat{\theta}
\end{aligned}$$

b) Dado que la órbita es circular, se satisface la relación

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

y por tanto

c)

$$T = \frac{2\pi(R_T + r_0)}{v},$$

donde M_T y R_T son la masa y radio de la tierra, respectivamente y $r_0 = 3815$m.

3.- La energía necesaria corresponde al trabajo que realizaría un agente externo en llevar el satélite de un radio alrededor del centro de la Tierra $r = R_T$ a uno $r = 1.5\,R_T$ más el cambio en energía cinética que se requiere para cambiar la velocidad del satelite, de velocidad cero hasta que alcanza la velocidad órbital $GM_T/(3/2)R_T$. Así la energía necesaria E es

$$\begin{aligned} E &= -\left.\frac{Gm_{sat}M_T}{r}\right|_{r=R_T}^{r=1.5\,R_T} + \frac{1}{2}\frac{Gm_{sat}M_T}{(3/2)R_T} \\ &= \frac{Gm_{sat}M_T}{3R_T} + \frac{1}{2}\frac{Gm_{sat}M_T}{(3/2)R_T} \\ &= \frac{2Gm_{sat}M_T}{3R_T} \end{aligned}$$

4.- La cónica en consideración puede escribirse en coordenadas cartesianas como

$$\frac{(5x-1)^2}{4^2} + \frac{5y^2}{3} = 1$$

que corresponde a una elipse centrada en $(1/5, 0)$, cuyas longitudes características son: semi-eje mayor $a = 4/5$ y semi-eje menor $b = \sqrt{3/5}$. En coordenadas polares la elipse está descrita desde el foco situado a la izquierda del centro de la elipse que corresponde al origen de un sistema de coordenadas cartesiano..

5.- Si usamos la tercera Ley de Kepler tenemos que el periodo de Marte T_M está dado por

$$T_M = \left[\frac{R_M}{R_T}\right]^{3/2} T_T,$$

donde R_T y T_T son el radio y periodo de la órbita de la Tierra alrededor del sol y R_M el radio de de la órbita de Marte. Sustituyendo la información dada, $R_M = 1.52R_T$, $T_T = 1$ año da por resultado

$$T_M = 1.87\,\text{años}.$$

6.- a) La fuerza sobre la estrella de masa M_e en r está dada por

$$\vec{F} = -\frac{G\,M_r\,M_e}{r^2}\hat{r},$$

donde $\hat{r}$ es el vector unitario en la dirección dada por la línea que va del centro de la galaxia a la estrella y M_r es la porción de M contenida en la esfera V_r de radio r y cuyo centro es de la galaxia. Esta se puede calcular del hecho de que la distribución de masa de la galaxia es "uniforme" y por tanto $M_r = \rho\,V_r$ con $\rho = M/V_{R_0}$ la densidad de la galaxia. De aquí que $M_r = M(r/R_0)^3$.

b) De la relación para órbitas circulares $v^2/R = GM/R^2$ tenemos que la velocidad de la estrella es

$$v = \left(\frac{GM}{R_0^3}\right)^{1/2} r$$

- Preguntas.

1.- Movimiento armónico simple

2.- Menos

3.- Decrece a una cuarta y novena parte respectivamente.