MECÁNICA CUÁNTICA I - PCF, 2018-2
TAREA 1
Fecha de entrega lunes 19 de febrero del 2018

- **Problemas**

1. Considere el espacio vectorial de las funciones *bien portadas* reales de variable real, $u(x)$, definidas en el intervalo $[a, b]$. Considere el operador diferencial lineal
$$\boldsymbol{O} = p_0(x)\frac{d^2}{dx^2}\cdot + p_1(x)\frac{d}{dx}\cdot + p_2(x)\cdot,$$
donde $p_i(x)$, $i = 0,\ 1,\ 2$, son funciones reales definidas en el intervalo $[a, b]$ cuyas 2-i derivadas son continuas. Además $p_0(x)$ no se anula en $[a, b]$ aunque puede ser singular en a y/o b.
   - Determine el operador adjunto $\boldsymbol{O}^\dagger$ de $\boldsymbol{O}$.
   - Demuestre que si se requiere que $\boldsymbol{O}$ sea un operador autoadjunto, es decir, $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}^\dagger$ entonces debe satisfacerse que $p_0'(x) = p_1(x)$ y que
   $$\boldsymbol{O}^\dagger u(x) = \boldsymbol{O}u(x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right] + q(x)u(x),$$
   donde $p_0(x) = p(x)$ y $p_2(x) = q(x)$.
   - Ponga en forma autoadjunta:
     - La ecuación de Laguerre $xu''(x) + (1-x)u'(x) + nu(x) = 0$ en $[0, \infty)$ con n un parámetro [considere la aparición de un factor de la forma e^{-x}].
     - La ecuación de Hermite $u''(x) - 2xu'(x) + 2\alpha u(x) = 0$ en $(-\infty, \infty)$ con α un parámetro.
     - La ecuación de Legendre $(1-x^2)u''(x) - 2xu'(x) + n(n+1)u(x) = 0$ en $[-1, 1]$ con n un parámetro.
2. Demuestre la siguientes afirmaciones:
   - La traza de un operador $\boldsymbol{O}$, definida como $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{O} = \sum_n \langle\varphi_n|\boldsymbol{O}|\varphi_n\rangle$ es independiente de la base ortonormal, $\{|\varphi_n\rangle\}$, que se use.
   - Las siguientes matrices
   $$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{\sigma_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{\sigma_y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{\sigma_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$
   generan el espacio de las matrices de 2×2 en el campo de los complejos. Estas corresponden a operadores lineales autoadjuntos y son ortogonales bajo el producto interior $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{B})$.
3. La densidad de probabilidad que un núcleo radiactivo decaiga en el instante t es $P(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, α^{-1} da la vida media de decaimiento. Determine la densidad de probabilidad del tiempo entre el decaimiento de un núcleo y el decaimiento de otro que es independiente del primero.

4. Demuestre que el operador

$$-\frac{d^2}{dx^2} + f(x), \tag{1}$$

es Hermitiano, donde $f(x)$ es una función real de variable real. Haga un análisis de las condiciones de frontera (en $\pm\infty$) que deben satisfacer las eigenfunciones de dicho operador para garantizar su Hermiticidad.

- **Preguntas**

1. Considere un operador $\boldsymbol{O}$ que satisface la propiedad $\boldsymbol{O}^\dagger = \boldsymbol{O}^{-1}$, donde $\boldsymbol{O}^{-1}$ es el inverso de $\boldsymbol{O}$, es decir, $\boldsymbol{O}^{-1}\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}\boldsymbol{O}^{-1} = \mathbb{I}$. ¿Puede $\boldsymbol{O}$ ser Hermitiano (autoadjunto)? Si es el caso, ¿cuáles pueden ser sus valores propios?
2. Sea $\boldsymbol{O}$ un operador que satisface la ecuación $\boldsymbol{O}^2 + \alpha\boldsymbol{O} + (\beta/2)^2 = 0$ con α y β escalares en el conjunto de los números reales. ¿Cuáles son las condiciones sobre la razón α/β que hacen a $\boldsymbol{O}$ un operador autoadjunto (Hermitiano)?
3. Si $\boldsymbol{O}$ es un operador Hermitiano que satisface la condición $\boldsymbol{O}^4 = -8\boldsymbol{O}$, ¿cuáles son sus posibles valores propios?