MECÁNICA CUÁNTICA I - PCF, 2018-2

TAREA 2

Fecha de entrega miércoles 28 de febrero del 2018

- **Problemas**

1. Considere la variable dinámica $\boldsymbol{Q}$ representada por

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

y un estado normalizado arbitrario

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Exprese a $|\Psi\rangle$ como una superposición de los eigenvectores de $\boldsymbol{Q}$ y use los eigenvalores de $\boldsymbol{Q}$ para determinar $\langle \boldsymbol{Q}^2 \rangle$.
- Evalue directamente $\langle \boldsymbol{Q}^2 \rangle = \langle \Psi | \boldsymbol{Q}^2 | \Psi \rangle$.

2. Suponga que una variable dinámica es representada por el operador

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y considere los siguientes operadores de estado

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad \rho_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \rho_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Calcule $\mathrm{Prob}(\boldsymbol{M} = 0|\rho)$.

3. Considere un observable $\boldsymbol{Q}$ de espectro infinito pero numerable, es decir, el conjunto $\{|q_n\rangle\}$ con $n = 1, 2, \ldots$, forma un conjunto completo de eigenvectores de $\boldsymbol{Q}$ con eigenvalores discretos $\{Qn\}$ con Q una constante positiva. Calcule $\mathrm{Tr} e^{-\beta \boldsymbol{Q}}$ y $\langle \boldsymbol{Q} \rangle$ si ρ es el operador de estado dado por

$$\rho = \frac{e^{-\beta \boldsymbol{Q}}}{\mathrm{Tr} e^{-\beta \boldsymbol{Q}}},$$

donde β es otra constante positiva.

4. Calcule, usando el espacio de momentos, la función de onda de una partícula libre al tiempo t, $\psi(x,t)$, si inicialmente esta es

$$\psi(x,0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left\{ -\frac{(x-a)^2}{4\sigma^2} \right\}.$$

5. Use en este problema la función de onda calculada en el problema anterior.

a) Demuestre que

- $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x,t)|^2 = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 |\psi(x,t)|^2 = \sigma^2(t)$, donde $\sigma^2(t) = \sigma^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\sigma^2}$. Haga un análisis de este último resultado.

b) Calcule el tiempo que tarda el estado $\psi(x,0)$ (dado en el problema anterior) en ensancharse al doble de su ancho original. ¿Que valor numérico se obtendría con un electrón con energıa de 1 MeV y un ancho original $\sigma = 1$ mm.

c) Evalue la siguiente expansión

$$\psi(x,t) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(i\frac{\hbar t}{2m} \right)^l \frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2l}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{x^2}{4\sigma^2} \right)^n$$

y compare con la solución obtenida en el problema 1.

6. Ahora suponga que la función de onda inicial de una partícula libre es

$$\psi(x,0) = N \begin{cases} \exp\left(-\frac{a^2}{a^2-x^2}\right) & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} .$$

- Discuta sobre la continuidad de esta función de onda y de sus derivadas.
- Demuestre que $\psi(x,t)$ es cero a todo tiempo si $|x| \geq a$.
- ¿Esta función de onda se dispersa?
- Si es así, ¿cómo luce la función de onda al tiempo t?