MECÁNICA CUÁNTICA I - PCF, 2018-2

TAREA 3

Fecha de entrega lunes 12 de marzo del 2018

- **Problemas**

1. Demuestre que el conmutador del operador momento, $\hat{\boldsymbol{p}}$, con una función arbitraria del operador posición, $f(\hat{\boldsymbol{x}})$, está dado por

$$[f(\hat{\boldsymbol{x}}), \hat{\boldsymbol{p}}] = i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}} f(\hat{\boldsymbol{x}}).$$

2. Considere el método de iteración que resuelve la ecuación integral

$$\boldsymbol{T}(t, t_0) = \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} dt' \boldsymbol{V}_I(t') \boldsymbol{T}(t', t_0)$$

donde $\boldsymbol{T}(t, t_0)$ es el operador de evolución temporal y $\boldsymbol{V}_I(t)$ la parte del hamiltoniano llamada de interacción, ambos en el esquema de interacción.

a) Demuestre que la doble integral que aparece en el tercer término de la expansión,

$$\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \, \boldsymbol{V}_I(t') \boldsymbol{V}_I(t''),$$

puede escribirse como

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt'' \left[\boldsymbol{V}_I(t') \boldsymbol{V}_I(t'') \theta(t' - t'') + \boldsymbol{V}_I(t'') \boldsymbol{V}_I(t') \theta(t'' - t') \right],$$

donde las funciones escalón, $\theta(x)$, son esenciales debido a que $\boldsymbol{V}_I$ no necesariamente conmuta consigo mismo a tiempos diferentes.

b) Defina el operador de ordenamiento temporal $\mathcal{T}[\cdot]$, aquel que ordena un producto arbitario de operadores que tienen al tiempo como argumento, de tal modo que los operadores más viejos (más lejanos en el tiempo) aparecen a la izquierda de los más recientes. Demuestre entonces que

$$\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \, \boldsymbol{V}_I(t') \boldsymbol{V}_I(t'') = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt'' \, \mathcal{T} \left[\boldsymbol{V}_I(t') \boldsymbol{V}_I(t'') \right].$$

c) Demuestre que $\mathcal{T}$ es invariante ante el intercambio de argumentos, es decir $\mathcal{T}[\boldsymbol{O}(t_1) \cdots \boldsymbol{O}(t_i) \cdots \boldsymbol{O}(t_j) \cdots] = \mathcal{T}[\boldsymbol{O}(t_1) \cdots \boldsymbol{O}(t_j) \cdots \boldsymbol{O}(t_i) \cdots]$.

d) Muestre entonces que el operador de evolución temporal en el esquema de interacción puede escribirse como

$$\boldsymbol{T}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t} dt_n \mathcal{T} \left[\boldsymbol{V}_I(t_1) \cdots \boldsymbol{V}_I(t_n) \right].$$

3. Demuestre la siguiente identidad

$$\int d^N x \, \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbb{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right\} = (2\pi)^{N/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\mathbb{M}\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{y}\right\},$$

donde $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ son vectores de N dimensiones, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ denota el vector transpuesto de $\boldsymbol{x}$ y $\mathbb{M}$ es una matriz de $N \times N$ simétrica y positiva definida.

4. Calcule explícitamente el propagador cuántico de una partícula libre, $D_F^0(x_f, t_f; x_i, t_i)$, usando el método de la integral de trayectoria de Feynman.

5. Obtenga una expresión del propagador cuántico como integrales de trayectoria en el espacio fase (la expresión obtenida en clase es sobre trayectorias en el espacio de las coordenadas), es decir, demuestre que

$$D_F(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int \mathcal{D}[x(t)] \int \mathcal{D}[p(t)] \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}[x(t), p(t)]\right\},$$

donde

$$\mathcal{S}[x(t), p(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt \, [x(t)p(t) - H[x(t), p(t)]]$$

y H es el Hamiltoniano clásico.