MECÁNICA CUÁNTICA I - PCF, 2018-2

TAREA 4

Fecha de entrega lunes 21 de marzo del 2018

- **Problemas**

1. Propagador para el potencial lineal. Considere una partícula de masa m que se mueve en una dimensión bajo la influencia de una fuerza constante $-f$. La Lagrangiana clásica es $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - fx$. Para calcular el propagador considere lo siguiente.

   - Encuentre la trayectoria clásica $x_{\rm cl}(t)$ que obedece la ecuación de Lagrange y calcule la acción clásica

     $$S[x_{\rm cl}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt'\, L\left(x_{\rm cl}(t'), \dot{x}_{\rm cl}(t')\right)$$

     para una trayectoria que satisface las condiciones $x_{\rm cl}(t_1) = x_1$, $x_{\rm cl}(t_2) = x_2$. Demuestre que

     $$S[x_{\rm cl}(t)] = \frac{m}{2}\frac{(x_2-x_1)^2}{(t_2-t_1)} - \frac{f}{2}(t_2-t_1)(x_2+x_1) - \frac{f^2}{24m}(t_2-t_1)^3.$$

     Construya la integral de trayectoria con el método de las trayectorias fluctuantes, es decir, considere

     $$x(t) = x_{\rm cl}(t) + \delta x(t).$$

     Demuestre que

     $$D_F(x_2,t_2;x_1,t_1) = J(t_2-t_1)\exp\left\{iS[x_{\rm cl}(t)]\right\},$$

     donde

     $$\begin{aligned} J(t_2-t_1) &= \int \mathcal{D}[\delta x(t)]\exp\left\{i\int_{t_1}^{t_2} dt'\frac{1}{2}m[\delta\dot{x}(t')]^2\right\} \\ &= D_F^0(0,t_2;0,t_1) \end{aligned}$$

     y D_F^0 es el propagador de partícula libre.

   - Calcule la integral de trayectoria haciendo una partición del intervalo $[t_1,t_2]$ en intervalos infinitesimales y haciendo las integrales, es decir,

     $$\begin{aligned} D_F(x_2,t_2;x_1,t_1) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\right)^{n/2}\prod_{i=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty} dx_i \times \\ \exp i\left\{\frac{m}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(x_j-x_{j-1})^2}{\epsilon} - \sum_{j=1}^{n-1}\epsilon f x_j\right\}. \end{aligned}$$

Demuestre que después de k integraciones se tiene

$$\left(\frac{m}{2\pi i(k+1)\epsilon}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{im}{\epsilon(k+1)}(x_{k+1}-x_0)^2 - i\epsilon f\frac{k}{2}(x_{k+1}+x_0)\right.$$
$$\left. -i\frac{\epsilon^3}{24m}k(k+1)(k+2)f^2\right\}$$

y que dicha expresión se reduce al obtenido en el inciso anterior en el límite $k \to \infty$.

Note que en esta tarea $\hbar = 1$.