MECÁNICA CUÁNTICA I - PCF, 2018-2
TAREA 5
Fecha de entrega miércoles 11 de abril de 2018

- **Problemas**

1. Considere el operador $U_{rot}(t)$ como la transformación unitaria que lleva de un sistema de referencia en el laboratorio a otro que rota a través de:
$$|\psi_{rot}(t)\rangle = U_{rot}(t)|\psi_{lab}(t)\rangle.$$
Demuestra que $U_{rot}(t)$ satisface la ecuación
$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_{rot}\rangle = H_{rot}|\psi_{rot}\rangle$$
donde $H_{rot} = U_{rot}H_{lab}(t)U^{\dagger}_{rot} - i\hbar U_{rot}\frac{dU^{\dagger}_{rot}}{dt}$ y H_{lab} es el operador Hamiltoniano en el sistema de referencia de laboratorio.

2. Considere un sistema de dos niveles (una partícula de espín 1/2 por ejemplo) cuyo Hamiltoniano es el más general posible en el espacio de operadores del sistema.
   a) Argumente por qué dicho hamiltoniano es de la forma
   $$\hat{\boldsymbol{H}} = -\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}},$$
   donde $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es un vector en tres dimensiones con unidades de energía.
   b) Muestre que la ecuación de Heisenberg para el operador $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ es
   $$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t) = -\boldsymbol{\Omega}\times\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t)$$
   donde $\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\mathcal{E}}/\hbar$.
   c) Describa el significado físico de la ecuación diferencial anterior si $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ es considerado un vector de momento angular clásico.
   d) Obtenga $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_z(t)$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_y(t)$ y $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_z(t)$ en función de los correspondientes operadores iniciales cuando $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es paralelo a la dirección z de un sistema Cartesiano y de una interpretación física de las soluciones obtenidas.
   e) Use el operador de evolución temporal para calcular $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_z(t)$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_y(t)$ y $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_z(t)$.
   f) Repita los dos cálculos anteriores cuando $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es paralelo a la dirección x.

3. Si el Hamiltoniano en el sistema de labaratorio está dado por
$$\hat{\boldsymbol{H}} = -\mathcal{E}_0\hat{\boldsymbol{\sigma}}_z - \boldsymbol{\mathcal{E}}_1(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}},$$
donde
$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_1(t) = \mathcal{E}_1\left[\cos\omega t\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\omega t\,\hat{\mathbf{y}}\right] + \mathcal{E}_1\left[\cos(-\omega t)\,\hat{\mathbf{x}} + \sin(-\omega t)\,\hat{\mathbf{y}}\right],$$
el cual evidencia que una de las contribuciones de $\boldsymbol{\mathcal{E}}_1(t)$ rota en el mismo sentido de la precesión del sistema. En el caso $\mathcal{E}_0 \gg \mathcal{E}_1$ la componente que rota en sentido inverso al de la precesión del espín puede ignorarse.

a) Bajo estas condiciones, muestre que el Hamiltoniano en el sistema de referencia de laboratorio está dado por

$$\hat{\boldsymbol{H}}_{lab} = -\mathcal{E}_0 \hat{\boldsymbol{\sigma}}_z - \mathcal{E}_1 \cos\omega t\, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_x - \mathcal{E}_1 \sin\omega t\, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_y.$$

b) Demuestre que los dos últimos términos en la ecuación anterior pueden escribirse en un único término proporcional a

$$\exp\{-i\omega t\, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_z/2\}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_x/2)\exp\{i\omega t\, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_z/2\}$$

c) y por tanto, definiendo apropiadamente $\hat{\boldsymbol{U}}_{rot}$, el Hamiltoniano en un sistema de referencia que rota en la dirección de precesión es independiente del tiempo y puede escribirse como

$$\hat{\boldsymbol{H}}_{rot} = -\left(\mathcal{E}_0 - \frac{\hbar\omega}{2}\right)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_z - \mathcal{E}_1 \hat{\boldsymbol{\sigma}}_x.$$

Interprete físicamente la elección $\hbar\omega = 2\mathcal{E}_0$.

- Pregunta [adicional] ¿Cómo son las trayectorias sobre la esfera de Bloch que corresponden a la evolución temporal del estado $|0_z\rangle$ bajo la transformación unitaria:

    1. $\exp\{-i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_x \omega_x t/2\}$?
    2. $\exp\{-i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_y \omega_y t/2\}$?

  y cómo es la trayectoria sobre la esfera de Bloch que corresponde a la evolución temporal del estado $e^{-i\varphi/2}\cos(\theta/2)|0_z\rangle + e^{i\varphi/2}\sin(\theta/2)|1_z\rangle$ bajo la transformación unitaria $\exp\{-i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_z \omega_z t/2\}$?