FÍSICA ESTADÍSTICA FC

Serie de ejercicios 5

Fecha de entrega lunes 6 de mayo de 2019

- **Problemas**

1. Considere un sistema cuántico de dos niveles. En la base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, los elementos de matriz del operador Hamiltoniano son $H_{11} = 3\epsilon_0$, $H_{12} = i4\epsilon_0$, $H_{21} = -i4\epsilon_0$ y $H_{22} = -3\epsilon_0$, donde ϵ_0 es una energía característica del sistema.
   - Si en la misma base los elementos de matriz del operador densidad $\hat{\rho}$ son $\rho_{11} = 1$, $\rho_{12} = 0$, $\rho_{12} = 0$, $\rho_{22} = 0$, calcule los elementos de matriz de $\hat{\rho}$ después de un tiempo arbitrario t.
   - ¿Cuál es la probabilidad de hallar al sistema en el estado $|1\rangle$? y ¿en el estado $|2\rangle$?
   - Calcule la energía promedio al tiempo t, ¿Cuál es dicho valor a $t = 0$?
   - Responda a los mismas cuestiones si ahora los elementos de matriz del operador densidad son $\rho_{11} = 1/2$, $\rho_{12} = 0$, $\rho_{12} = 0$, $\rho_{22} = 1/2$.
   - Suponga ahora que la energía promedio es zero, ¿Cuál es el operador de estado $\hat{\rho}$ que hace máxima la entropía de estadística?
2. El modelo de Einstein de un sólido consiste de $3N_xN_yN_z$ osciladores armónicos simples independientes, idénticos pero dintinguibles, puestos en una red tridimensional de N_x sitios en la dirección x, N_y en la dirección y y N_z en la dirección z. Denote con ω la frecuencia de oscilación de cada oscilador. Si hay n_{ijk} cuántos de energía en el oscilador que ocupa el sitio (i, j, k) en la red, su energía es $\hbar\omega(n_{ijk} + \frac{1}{2})$.
   - Si el número total de cuántos de energía en el sistema es fijo, calcule la probabilidad $P(\{n_{ijk}\})$ de hallar al sistema en el microestado $\{n_{ijk}\}$, el cual denota el número de cuántos de energía en cada unos de los osciladores en la red.
   - Calcule la entropía del sistema en términos del número total de osciladores y del número total de cuántos de energía, y a apartir de esta, calcule la temperatura del sistema.
   - Considere ahora que el sistema intercambia energía con un baño térmico de temperatura T, es decir, los osciladores absorben cuantos de energía del baño o los emiten hacia el baño. Determine la probabilidad $P(\{n_{ijk}\})$.
   - Calcule la energía interna del sistema (energía promedio) y a partir de ella determine la capacidad calorífica. Determine los límites de bajas y altas temperaturas.
3. Demuestre que la densidad de estados en la energía ε, $g(\varepsilon)$, de una partícula confinada espacialmente por el potencial externo $U(\boldsymbol{x})$, puede escribirse en

tres dimensiones como

$$g(\varepsilon) = \frac{2\pi}{h^3} \int_{\widetilde{V}(\varepsilon)} d^3\boldsymbol{x} \sqrt{\varepsilon - U(\boldsymbol{x})}, \tag{1}$$

donde $\widetilde{V}(\varepsilon)$ denota el volumen espacial accesible cuando la partícula tiene una energía ε.

- Calcule $g(\varepsilon)$ cuando $U(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{x}^2$ compare con la expresión obtenida cuando el espectro de energía está dado por $\varepsilon_{n_x,n_y,n_z} = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z)$ (considere el límite de espectro de energía continuo).

4. Considere una red en una dimensión con N sitios. En cada sitio se localiza un espín clásico que puede tomar los valores $s_i = \pm 1$. El Hamiltoniano que describe el sistema corrresponde al Hamiltoniano de Ising $H = -J\sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1}$. Asuma condiciones de frontera periódicas tales que $s_{i+N} = s_i$.

   - Calcule la probabilidad $P(\{s_i\})$ de hallar al sistema en el microestado $\{s_i\}$, que denota el valor de la variable s_i de cada unos de los espínes en la red cuando $S = \sum_{i=0}^{N} s_i$ es fijo y cuando el sistema se halla en equilibrio térmico a temperatura T.
   - Calcule el promedio $\langle s \rangle$, se decir, el promedio sobre todos los espínes del valor promedio $\langle s_i \rangle$ a temperatura T. ¿Cuál es el valor de dicha cantidad en el régimen de altas temperaturas, $T \gg J/k_B$?