MECÁNICA CUÁNTICA I - PCF, 2018-2

TAREA 6

Fecha de entrega lunes 23 de abril de 2018

- **Problemas**

  1. Suponga que las leyes de la física son invariantes ante una transformación que expande el espacio, es decir

     $$\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x}' = \Lambda \boldsymbol{x}$$

     con Λ un párametro continuo y positivo. Construya el operador unitario correspondiente a esta transformación así como el generador de expansiones del espacio $\hat{\Delta}$. Determine los conmutadores de $\hat{\Delta}$ con los generadores de: traslaciones espaciales, rotaciones, transformaciones entre sistemas de referencia inerciales, traslaciones temporales, y con el operador de paridad.
  2. Demuestre que si los generadores de rotaciones $\hat{\boldsymbol{J}}_i$, con $i = x, y, z$, son sustituidos por $(\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{p}})_i$, las relaciones de conmutación $[\hat{\boldsymbol{J}}_i, \hat{\boldsymbol{J}}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{J}}_k$, $[\hat{\boldsymbol{J}}_i, \hat{\boldsymbol{P}}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{P}}_k$ y $[\hat{\boldsymbol{J}}_i, \hat{\boldsymbol{G}}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{G}}_k$ siguen siendo válidas. Haga una interpretación física de esta afirmación.
  3. Considere la trasformación unitaria en SU(2)

     $$\hat{U} = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda/2}\cos(\mu/2)e^{-i\nu/2} & -e^{-i\lambda/2}\sin(\mu/2)e^{i\nu/2} \\ e^{i\lambda/2}\sin(\mu/2)e^{-i\nu/2} & e^{i\lambda/2}\cos(\mu/2)e^{i\nu/2} \end{pmatrix}.$$

     Calcule explícitamente los elementos de matriz de la transformación asociada $R(\hat{U})_{ij}$ en SO(3) dados por $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\hat{\sigma}_i\hat{U}\hat{\sigma}_j\hat{U}^{-1}\}$.
  4. Suponga que el Hamiltoniano de un sistema es invariante ante transformaciones de inversión temporal.

     a) Si $\hat{T}^2|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$, demuestre que los eigenvalores del Hamiltoniano tienen un grado de degeneración par.

     b) Demuestre que los eigenvalores de $\hat{T}$ no corresponden a una cantidad conservada.

- Problemas [adicional] Demuestre que la función de onda en la representación del momento $\psi(\boldsymbol{p}, t) = \langle \boldsymbol{p}|\psi(t)\rangle$ es transformada bajo inversión temporal a $\psi^*(-\boldsymbol{p}, -t)$.