MECÁNICA CUÁNTICA I - PCF, 2018-2

TAREA 8

Fecha de entrega lunes 14 de mayo de 2018

- **Problemas**

1. Considere el siguiente Hamiltoniano

$$\hat{\boldsymbol{H}} = A\hat{\boldsymbol{L}}^2 + B\hat{L}_z + C\hat{L}_x$$

donde A, B y C son constantes reales y $\hat{\boldsymbol{L}} = \left(\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z\right)$ denota al operador de momento angular orbital.

   a) Haga una interpretación de la situación física que describe dicho Hamiltoniano.

   b) Encuentre el espectro de energía y sus correspondientes vectores propios si $C = 0$.

   c) Considere que el sistema tiene momento angular orbital $l = 1$, y que $B = C = D/\sqrt{2}$, con $D > 0$. Determine los niveles de energía y sus correspondientes vectores propios.

   d) ¿Qué valores pueden obtenerse para la componente $\hat{L}_z$ y con qué probabilidad, si el sistema se halla en el estado de menor energía del inciso anterior?

2. Considere un sistema compuesto por dos partículas distinguibles de espín 1/2. $\{|+\rangle_1, |-\rangle_1\}$, $\{|+\rangle_2, |-\rangle_2\}$ denotan los vectores propios de $\{\hat{\boldsymbol{S}}_1^2, \hat{S}_{1z}\}$ y $\{\hat{\boldsymbol{S}}_2^2, \hat{S}_{2z}\}$ respectivamente. El sistema compuesto puede ser descrito en la base "desacoplada" $|ij\rangle = |i\rangle_1|j\rangle_2$, $i, j = +, -$

   a) Construya la matriz de densidad para el estado puro $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1|\chi\rangle_2$ donde

$$|\psi\rangle_1 = \alpha_1|+\rangle_1 + \beta|-\rangle_1$$
$$|\chi\rangle_2 = \alpha_2|+\rangle_2 + \beta|-\rangle_2$$

   en la base desacoplada.

   b) Considere el estado $\frac{1}{2}\{|++\rangle\langle++| + |--\rangle\langle--|\}$, ¿es éste puro? Justifique su respuesta.

   c) Calcule el valor medio de $\hat{S}_x^2$ en el estado anterior ($\hat{S}_x = \hat{S}_{1x} + \hat{S}_{2x}$).

   d) Construya la matriz de densidad reducida para la partícula uno correspondiente al mismo estado.

3. Considere ahora el Hamiltoniano

$$\hat{\boldsymbol{H}} = \omega_0\hat{S}_z + \frac{\lambda}{\hbar}\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2$$

con ω_0, λ y ω cantidades reales. Encuentre de manera exacta la probabilidad de transición del estado inicial $|+-\rangle$ a los estados $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$ y $|--\rangle$ al tiempo t.

4. Considere el siguiente espinor de una partícula de espín $\frac{1}{2}$ en la base de eigenvectores de $\hat{S}_z$ que se mueve bajo la influencia de un potencial esféricamente simétrico

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{15}{32\pi}}(x^2 - y^2)f(r) \\ \sqrt{\frac{5}{8\pi}}z^2 f(r) \end{pmatrix}$$

$f(r)$ es una función que solo depende de la varaible radial $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

a) Determine los resultados que pueden encontrarse, y con qué probabilidades, si se realiza una medición de la observables $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ y $\hat{J}_z$, donde $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$ es el momento angular total de la partícula.

b) Explique qué puede decir acerca de una medición de $\hat{J}_x$.