



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)  
INSTITUTO DE FÍSICA

DINÁMICA DE UN CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN  
EN UN BAÑO DE FERMI

PROTOCOLO DE INVESTIGACIÓN  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

**PRESENTA:**  
JAIME AUGUSTO FERNÁNDEZ ANGELES

**TUTOR PRINCIPAL**  
DR. FRANCISCO JAVIER SEVILLA PÉREZ  
INSTITUTO DE FÍSICA

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR  
DR. IVÁN SANTAMARÍA HOLEK  
FACULTAD DE CIENCIAS

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR  
DRA. ROSARIO PAREDES GUTIÉRREZ  
INSTITUTO DE FÍSICA

CIUDAD DE MÉXICO, JULIO, 2017

---

# Agradecimientos

La realización de este trabajo no hubiese sido posible sin el apoyo de la Dra. Laura Elena Rosales Zárate, el Dr. Ricardo Méndez Fragoso, la Dra. Vicenta Sánchez Morales y el Dr. Luis Antonio Pérez López, quienes accedieron a revisar mi trabajo en un periodo de tiempo muy corto. Agradezco también al Dr. Miguel Ángel Solís Atala, quien enriqueció mi trabajo con sus observaciones, y al Dr. Francisco Javier Sevilla Pérez, quien además de guiar mi trabajo se encargó de mi formación como maestro en ciencias.

Quisiera también agradecer a la Dra. Rosario Paredes Gutiérrez, quien estuvo siempre al pendiente de mi situación académica y me apoyó en gran medida. Además, quiero agradecer al Dr. Iván Santamaría Holek, quien formó parte de mi comité tutor. Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico que recibí para realizar mis estudios de maestría, así como al Dr. José David Vergara Oliver, al Dr. Pier Achille Mello Picco, al Dr. Wolf Luis Mochán Backal, al Dr. Rolando Pérez Castillo y al Dr. Maximino Aldana González, quienes siempre estuvieron dispuestos a resolver mis inquietudes.

No puedo terminar sin agradecer a mi familia y amigos, en cuyo estímulo constante y amor he confiado a lo largo de mis años de estudio. Agradezco mucho a Brenda Ortega, a su familia y a la mía el apoyo constante que recibí durante mis estudios de maestría. También agradezco a mis amigos, a Aldo, Daniel y a José Carlos, a quienes vi muy poco durante estos últimos años; a Diego, a Miguel y a Alicia, quienes siempre me animaron a seguir adelante; y a Adrián Bartolo, Ángel Castellanos, Ángela Camacho, Carlos Maciel, Natalia Sánchez, Alma López, Rafael Díaz, Homar Rivera, Manuel Velasco, Antonio Rojas, Guillermo Martínez, Juan García, Anahí Alvarado, René Rivas, Maxil Sánchez y a Adriana Pérez, por brindarme su

amistad y a lado de quienes estudié la maestría. Quiero también agradecer a Miguel Alejandro Pérez Contreras, quien estuvo presente durante la realización de este trabajo, y cuyos comentarios ayudaron al desarrollo del mismo. Es a ellos a quienes dedico este trabajo.

---

# Planteamiento General

En este trabajo estudiaremos una mezcla gaseosa formada por bosones y fermiones a temperatura cero. Consideramos que la componente bosónica de la mezcla se encuentra en el estado condensado y que el gas de Fermi es degenerado. Supondremos que los bosones pueden interactuar entre sí a través de un pseudopotencial y trabajaremos en el régimen de energía en el que no hay interacción fermión-fermión. Supondremos también que los bosones y los fermiones pueden interactuar entre sí y que la mezcla es confinada por potenciales armónicos. Buscaremos dar una descripción del sistema tratando de prescindir de las aproximaciones que aparecen normalmente en la literatura (e.g. la aproximación hidrodinámica, que será descrita más adelante).

Consideraremos el caso particular en el que la componente bosónica del sistema está inmersa en un baño de fermiones. Esperamos que el condensado de Bose-Einstein exhiba un comportamiento que extienda el modelo propuesto por Caldeira y Leggett de movimiento browniano cuántico y será dicha generalización el principal objetivo de este trabajo.

Con esto en mente presentaremos dos modelos que nos permitirán abordar el problema. En primer lugar, mencionaremos cómo es posible hacer uso de la integral funcional para derivar las ecuaciones dinámicas para los campos bosónicos y fermiónicos de la mezcla. De manera alternativa, explicaremos cómo pueden obtenerse las ecuaciones de evolución del sistema a partir de una aproximación hidrodinámica. Nuestro objetivo a largo plazo será prescindir de aproximaciones semiclásicas y abordar el problema desde un punto de vista cuántico.

Aunque éste problema no es nuevo, la forma en que lo abordaremos es original. En particular, aunque ya se han obtenido ecuaciones dinámicas para las componentes

del gas de Bose-Fermi no hemos encontrado trabajos que busquen extender las ideas que se tienen sobre el movimiento browniano cuántico para éste tipo de mezclas.

Una vez que se tengan las ecuaciones de evolución del sistema se intentará resolverlas de manera aproximada. Uno de nuestros objetivos principales será encontrar el efecto que tienen las fluctuaciones de la componente fermiónica en la dinámica del condensado de Bose-Einstein.

Otro de nuestros objetivos será estudiar la posibilidad de realizar una transformación que nos permita simplificar el problema y con la cual podamos obtener una solución aproximada. Hacemos énfasis en que la aproximación que implementaremos será, preferentemente, distinta de las que han sido usadas hasta el momento.

También buscaremos resolver de manera numérica el problema y esperamos que en el caso en que se pueda obtener una solución analítica aproximada los resultados obtenidos por ambos métodos puedan compararse. Esto se hará en primera instancia en el caso unidimensional.

---

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>2</b>
<b>Planteamiento General</b>	<b>i</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2 Condensación de Bose-Einstein</b>	<b>6</b>
2.1 El gas ideal de Bose . . . . .	6
2.2 Gas de bosones en un potencial armónico . . . . .	10
<b>3 La Ecuación de Gross-Pitaevskii</b>	<b>14</b>
3.1 Ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo . . . . .	14
3.2 Ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo . . . . .	17
<b>4 Gas de bosones y fermiones en interacción</b>	<b>21</b>
4.1 Integral funcional para la mezcla interactuante . . . . .	21
4.2 La aproximación hidrodinámica . . . . .	22
<b>Objetivos</b>	<b>34</b>
<b>Resultados Esperados</b>	<b>37</b>

---

# Antecedentes

---

# Capítulo 1

## Introducción

En 1926, el físico hindú Satyendra Nath Bose escribió una carta al ya famoso físico alemán Albert Einstein. En ella, derivaba la ley de radiación de Planck sin hacer uso de la electrodinámica clásica, y pedía ayuda a Einstein para traducir su deducción y que esta pudiera aparecer publicada en la revista *Zeitschrift für Physik* [1]. Einstein se dió cuenta de la importancia del trabajo de Bose e inmediatamente se enfocó en extenderlo. Esto resultó en un artículo en el que Einstein generalizó el trabajo de Bose para describir un gas monoatómico y predijo la existencia de un nuevo estado de la materia: el condensado de Bose-Einstein [2].

La predicción de la existencia del condensado de Bose-Einstein generó un gran interés académico y el fenómeno se volvió un tema estandar a tratar en los libros de física estadística. Sin embargo, no fué sino hasta 1995 que los grupos de Cornell y de Wieman lograron producir en el laboratorio dicho estado condensado [3]. La razón por la que pasaron casi 70 años para observar experimentalmente la condensación de Bose-Einstein es debido a que la temperatura crítica a la cual los átomos exhiben la transición de fase es increíblemente baja: por ejemplo, Cornell y Wieman bajaron la temperatura de átomos de rubidio a tan sólo  $1.7 \times 10^{-7} K$ .

Alcanzar experimentalmente la condensación de Bose-Einstein fue un gran logro para la física, a tal grado que Cornell y Wieman, junto con Wolfgang Ketterle, recibieron el premio Nobel de física en 2001. A partir de su realización experimental, la condensación de Bose-Einstein se ha explorado a un ritmo vertiginoso: se han logrado condensar isótopos, moléculas e incluso fotones [4]. Más aún, también ha

sido posible observar la condensación de Bose-Einstein a temperatura ambiente [5].

Los condensados de Bose-Einstein han resultado ser sistemas sobre los cuales se tiene un control sin precedentes. Resulta ser que una gran cantidad de parámetros de dichos sistemas, como son la temperatura, el número de átomos, y la fuerza de la interacción (así como su carácter), pueden ser ajustados en un rango de valores de varios órdenes de magnitud. La interacción entre partículas, que usualmente debería ser una característica sobre la que no se tiene control, en este caso puede modificarse: es posible controlar la magnitud de la interacción, y también es posible volver repulsiva una interacción que originalmente era atractiva, y viceversa [6–8].

Por otra parte, la transición de fase al estado condensado ocurre sin necesidad de que los bosones interactúen [9], i.e. es una transición de fase completamente cuántica. Podemos considerar entonces a los condensados de Bose-Einstein como sistemas modelo que exhiben fuertemente características inherentes de los gases cuánticos, y sobre los cuales tenemos un alto grado de controlabilidad.

Recientemente, ha incrementado el interés en la realización experimental de mezclas de bosones y fermiones, así como en su descripción teórica. Por ejemplo, se ha estudiado la posibilidad de enfriar simpatéticamente isótopos fermiónicos [10, 11], y se ha logrado atrapar átomos de  ${}^6\text{Li}$  y de  ${}^7\text{Li}$  con trampas optomagnéticas [12]. La realización experimental de una mezcla de  ${}^6\text{Li}$  y de  ${}^7\text{Li}$  también fue reportada en las Refs. [13, 14], y también se han realizado mezclas de  ${}^{23}\text{Na}$  y de  ${}^6\text{Li}$  [15], y de  ${}^{87}\text{Rb}$  y de  ${}^{40}\text{K}$  [16, 17]. Una de las razones por las cuales se ha buscado estudiar los gases de Bose-Fermi es debido a que el tiempo de relajación de la mezcla es significativamente menor que el del gas de Fermi, lo cual se debe a las colisiones entre los dos tipos de átomos que conforman la mezcla [18–20].

Como ya habíamos mencionado, el estudio de mezclas de Bose-Fermi no es algo nuevo, y el problema ha sido atacado teórica y experimentalmente. Por ejemplo, en la Ref. [21] se estudian inestabilidades que se presentan en condensados de bosón-fermión de átomos alcalinos atrapados debido a las interacciones atractivas entre las componentes de la mezcla. Por otro lado, en la Ref. [22] se estudia una mezcla de Bose-Fermi haciendo énfasis en el análisis del comportamiento de la energía cinética de la componente fermiónica. Las referencias anteriores se enfocan en el estudio de las propiedades estáticas de las mezclas de bosones y fermiones.

Sin embargo, en la actualidad ya se ha comenzado a estudiar la evolución temporal de las mezclas binarias. Un ejemplo de los avances que se han hecho en esta dirección se encuentran en la Ref. [23], donde se ha mostrado que es posible estudiar la dinámica del gas de Fermi haciendo uso de una aproximación de tipo hidrodinámica, en la cual las observables macroscópicas que lo describen obedecen ecuaciones de conservación similares a las de un fluido clásico. Además, se ha explorado bajo qué condiciones las fases de las componentes de la mezcla se separan en el caso en que se tiene un gas de Bose-Fermi confinado por una trampa cilíndrica, como puede verse en la Ref. [24]. Un trabajo más reciente, Ref. [25], establece la existencia y unicidad de la función de onda del estado base de una mezcla bosón-fermión para una pareja de ecuaciones tipo Gross-Pitaevskii, prescindiendo de la aproximación de Thomas-Fermi. La estructura de las mezclas binarias de bosones y fermiones confinadas por un potencial externo a temperatura cero ha sido también investigada, como puede verse en las Refs. [26, 27].

En algunos casos particulares, es posible resolver de forma exacta las ecuaciones acopladas que describen la evolución de la mezcla, e.g. las Ecs. (2.14) y (2.56) de la Ref.[23]. Esto ha dado lugar a la búsqueda aproximaciones que permitan la solución exacta de dichas ecuaciones, como puede verse en la Ref. [28].

Claramente, se han estudiado con bastante detalle algunas propiedades de las mezclas de Bose-Fermi. Sin embargo, un aspecto que nos gustaría explorar, y que da lugar a esta propuesta de investigación, es el siguiente. Supongamos que tenemos un condensado de Bose-Einstein que interactúa con un gas de Fermi degenerado. En el caso límite en que las dimensiones de la nube condensada son mucho menores que las del mar de Fermi, es razonable esperar que esta exhiba movimiento browniano cuántico, en el sentido de la Ref. [29]. La situación anterior no ha sido abordada en la literatura existente desde este punto de vista, y esta es una de las razones por las cuales consideramos importante estudiar las mezclas de Bose-Fermi.

La estructura del presente trabajo es la siguiente. En el capítulo 2 se introducen los conceptos básicos acerca de la condensación de Bose-Einstein. Esto se logra estudiando dos sistemas: un gas ideal de bosones, y un gas ideal de bosones confinado por una trampa armónica.

Posteriormente, en el capítulo 3, se deriva la ecuación de Gross-Pitaevskii, con

la cual será posible estudiar la función de onda del condensado. Aquí, se discutirán brevemente algunas aproximaciones que es posible hacer para extraer información sobre la función de onda, así como el rango de validez de estas .

La parte central de este trabajo es el capítulo 4, en el cual presentamos el modelo propuesto en la Ref. [23] para estudiar una mezcla bosón-fermión. La razón por la que esta descripción es relevante para nosotros es debido a que buscamos generalizarla, ya que aparentemente no ha habido un avance significativo en la descripción de mezclas binarias de gases cuánticos, a pesar de que en la actualidad se han podido realizar experimentalmente sistemas de este tipo, y que se conoce la utilidad de las mezclas de Bose-Fermi para reducir el tiempo de relajación de la componente fermiónica del sistema.

La parte final de este trabajo presenta tanto los objetivos generales del protocolo de investigación así como los resultados que se esperan obtener.

---

# Capítulo 2

## Condensación de Bose-Einstein

### 2.1 El gas ideal de Bose

El sistema más sencillo que exhibe el fenómeno de condensación de Bose-Einstein es el gas de bosones no interactuantes. Para estudiar un gas ideal de bosones, resulta conveniente utilizar el ensamble gran canónico. Supongamos entonces que tenemos un sistema de bosones idénticos, que no interactúan entre sí, contenidos en una caja de volumen  $V$  a una temperatura  $T$ . En esta situación, la gran función de partición del sistema de partículas descrito por el hamiltoniano  $\hat{H}$  y con operador de número  $\hat{N}$  estará dada por

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}\{e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\},$$

donde  $\beta = 1/k_{\text{B}}T$ , con  $k_{\text{B}}$  la constante de Boltzmann, y  $\mu$  es el potencial químico. Como los bosones no interactúan entre sí, podemos suponer que la energía de un bosón con momento  $\vec{k}$  estará dada por la relación de dispersión

$$E_{\vec{k}} = E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m},$$

donde  $m$  es la masa del bosón, y  $k^2 = \vec{k} \cdot \vec{k}$ . Es posible escribir entonces

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_k (E_k - \mu)\hat{n}_k,$$

donde  $\hat{n}_k$  es el operador de número de ocupación para partículas con vector de onda  $\vec{k}$ .

Así, podemos escribir la función de partición del sistema como

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_k\}^*} e^{-\beta \sum_k (E_k - \mu) n_k} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_k\}^*} \prod_k e^{-\beta (E_k - \mu) n_k},\end{aligned}$$

donde la suma  $\sum_{\{n_k\}^*}$  se realiza sobre todas las configuraciones de los números de ocupación compatibles con la restricción  $\sum_k n_k = N$ . Debido a que eventualmente tendremos que evaluar la suma  $\sum_{N=0}^{\infty}$ , podemos escribir, de manera equivalente,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_r} \dots \prod_k e^{-\beta (E_k - \mu) n_k} \\ &= \left( \sum_{n_1} e^{-\beta (E_1 - \mu) n_1} \right) \left( \sum_{n_2} e^{-\beta (E_2 - \mu) n_2} \right) \dots \left( \sum_{n_r} e^{-\beta (E_r - \mu) n_r} \right) \dots \\ &= \prod_k \left( \sum_{n_k} e^{-\beta (E_k - \mu) n_k} \right).\end{aligned}\tag{2.1}$$

La última suma en la Ec. (2.1) puede realizarse en el caso en que  $\mu < 0$ , pues  $n_k$  corre sobre todos los enteros no negativos. Tenemos entonces que

$$\mathcal{Z} = \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\beta (E_k - \mu)}},$$

donde la convergencia de la serie geométrica está garantizada por el hecho de que  $E_k \geq 0$  y  $\mu < 0$ , de modo que  $e^{-\beta (E_k - \mu)} < 1$ .

La información termodinámica del sistema está contenida en el gran potencial,

$$\begin{aligned}\Phi &= -k_B T \log \mathcal{Z} \\ &= k_B T \sum_k \log(1 - e^{-\beta (E_k - \mu)}) \\ &= \sum_k \Phi_k,\end{aligned}$$

donde definimos

$$\Phi_k = k_B T \log(1 - e^{-\beta(E_k - \mu)}).$$

Podemos calcular entonces, por ejemplo, el número promedio de partículas con vector de onda  $\vec{k}$ ,

$$\langle n_k \rangle = -\frac{\partial \Phi_k}{\partial \mu} = \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} - 1}, \quad (2.2)$$

y el número total de bosones

$$N = \sum_k n_k = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} - 1}. \quad (2.3)$$

A la Ec. (2.2) se le conoce como *distribución de Bose-Einstein*, pues determina la densidad de partículas que obedecen la estadística de Bose-Einstein. Debido al carácter microscópico de las partículas del sistema, usualmente no es posible modificar de manera directa el número total de partículas. Podemos, de manera alternativa, ajustar  $\mu$  para tener cualquier  $N$  deseado. Es interesante notar que en el límite de altas temperaturas,  $k_B T \gg E_k - \mu$ , recuperamos la distribución de Rayleigh-Jeans a partir de la Ec. (2.2).

Veamos ahora lo que ocurre con el número total de partículas del sistema en el límite termodinámico. Al hacer tender  $N$  y  $V$  a infinito, pero manteniendo la densidad de partículas  $N/V$  constante, podemos reescribir la Ec. (2.3) como

$$N = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} - 1} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} - 1}. \quad (2.4)$$

Si reducimos ahora la temperatura del sistema manteniendo  $N/V$  constante, el potencial químico debe aumentar, y habrá una temperatura, digamos  $T_c$ , a la cual  $\mu = 0$ . Así, la Ec. (2.4) toma la forma [8]

$$N = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{E_k/k_B T_c} - 1},$$

y haciendo el cambio de variable  $x = E_k/k_B T_c$ , obtenemos

$$\frac{N}{V} = \frac{(mk_B T_c)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}. \quad (2.5)$$

Para integrar la Ec. (2.5), hacemos uso de la fórmula

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(\nu)\zeta(\nu),$$

donde  $\Gamma(\nu)$  y  $\zeta(\nu)$  denotan a la función gamma y a la función zeta de Riemann, respectivamente, con lo que llegamos al siguiente resultado:

$$\frac{N}{V} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{mk_{\text{B}}T_c}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}.$$

De la ecuación anterior, podemos calcular la temperatura crítica,  $T_c$ , a la cual ocurre la transición de fase al estado condensado,

$$k_{\text{B}}T_c = \left(\frac{n}{\zeta(3/2)}\right)^{2/3} \frac{2\pi\hbar^2}{m}, \quad (2.6)$$

donde introdujimos la densidad de partículas  $n = N/V$ .

Podemos calcular también el número total de partículas a una temperatura distinta a la temperatura crítica haciendo uso de las llamadas *funciones de Bose-Einstein*, definidas como

$$g_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{\nu}}. \quad (2.7)$$

Introduciendo la fugacidad,  $z = e^{\beta\mu}$ , resulta inmediato que la densidad de partículas es

$$\begin{aligned} \frac{N}{V} &= \left(\frac{mk_{\text{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{z^{-1}e^x - 1} dx \\ &= \left(\frac{mk_{\text{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} g_{3/2}(z). \end{aligned} \quad (2.8)$$

De la Ec. (2.8) podemos ver que, a medida que la temperatura disminuye, el número de partículas también lo hace, pues  $N \sim T^{3/2}$ . Evidentemente, esto no puede ser correcto, pues querría decir que al enfriar un gas de bosones estos desaparecen. Notemos que la integral que calculamos para obtener el número total de partículas

es proporcional a  $x^{1/2} \sim E_k^{1/2}$ , de manera que la contribución a  $N$  debida a la energía del estado base se desvanece. Así, para poder introducir la contribución a  $N$  de dicho estado, hacemos uso de la distribución de Bose-Einstein:

$$n_0 = \frac{N_0}{V} = \frac{1}{z^{-1} - 1} \quad (2.9)$$

Vemos entonces que, a medida que  $z^{-1} \rightarrow 1$  (i.e. a medida que  $\mu \rightarrow 0$ ), el número de partículas en el estado base se vuelve una cantidad macroscópica. Tenemos entonces que una cantidad macroscópica de bosones se acumula en un mismo estado cuántico, el estado base, y es a esto a lo que se conoce como condensación de Bose-Einstein.

La condensación de Bose-Einstein ocurre cuando la longitud de onda térmica de los bosones se traslapa, es decir, cuando los efectos cuánticos se hacen evidentes [8]. Como acabamos de ver, para que un sistema exhiba condensación de Bose-Einstein no es necesario que haya interacción entre partículas: un gas ideal de bosones puede presentar esta transición de fase siempre que se reduzca lo suficiente la temperatura. Sin embargo, en este trabajo centraremos nuestra atención en gases atrapados por potenciales armónicos, razón por la cual estudiaremos un sistema de bosones confinado por una trampa de este tipo.

## 2.2 Gas de bosones en un potencial armónico

Consideremos entonces un sistema de  $N$  bosones idénticos de masa  $m$  que no interactúan entre sí, confinados por una trampa armónica. El hamiltoniano del sistema estará dado entonces por

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \sum_{i=1}^N \hat{r}_i^2 = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i,$$

donde supusimos que el potencial es isotrópico, i.e. la frecuencia de oscilación  $\omega$  es la misma en todas las direcciones, y  $\hat{H}_i$  denota al hamiltoniano de una sola partícula. Resolver el problema de eigenvalores  $\hat{H}_i|\psi\rangle = E_i|\psi\rangle$  nos lleva a que el espectro de

energía del sistema está dado por [30]

$$E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega (n_x + n_y + n_z) + E_0,$$

donde  $E_0 = 3\hbar\omega/2$  es la energía del estado base.

Al alcanzar el equilibrio térmico, los bosones se deben distribuir sobre los niveles de energía de acuerdo con la distribución de Bose-Einstein, Ec. (2.2), de manera que [8]

$$N_{n_x n_y n_z} = \frac{1}{\exp[\beta(E_{n_x n_y n_z} - \mu)] - 1}.$$

En este caso, el potencial químico se elige de modo que el número total promedio de partículas sea igual a  $N$ , es decir,

$$N = \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} \frac{1}{\exp[\beta(E_{n_x n_y n_z} - \mu)] - 1}. \quad (2.10)$$

En el límite de altas temperaturas, i.e. cuando  $k_B T \gg \hbar\omega$ , podemos calcular de manera aproximada la suma que aparece en la Ec. (2.10). En términos de la densidad de estados,  $g(E)$ , tenemos

$$N = \frac{1}{\exp[\beta(E_0 - \mu)] - 1} + \int_0^{\infty} dE \frac{g(E)}{\exp[\beta(E + E_0 - \mu)] - 1}. \quad (2.11)$$

Una vez más, separamos la contribución a  $N$  debida al estado base ya que será una cantidad macroscópica debajo de la temperatura crítica.

Notemos ahora que  $g(E)\hbar\omega$  es el número de puntos  $(n_x, n_y, n_z)$  que satisfacen  $E \leq \hbar\omega(n_x + n_y + n_z) < E + \hbar\omega$ . Suponiendo que  $n$  es el entero más grande que satisface  $n\hbar\omega < E$ ,  $g(E)\hbar\omega$  es simplemente el número de puntos  $(n_x, n_y, n_z)$  que satisfacen la restricción [8]

$$n_x + n_y + n_z = n. \quad (2.12)$$

Es posible probar que el número de formas en que podemos elegir los enteros no

negativos  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$  tales que su suma sea  $n$  es <sup>1</sup>

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2},$$

de modo que si aproximamos  $E \approx n\hbar\omega$ , tendremos que

$$g(E)\hbar\omega \approx \frac{1}{2} \left( \frac{E}{\hbar\omega} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{E}{\hbar\omega} + 1. \quad (2.13)$$

En el caso en que  $E \gg \hbar\omega$ , la Ec. (2.11) toma la forma

$$\begin{aligned} N = N_0 + \frac{1}{2(\hbar\omega)^3} \int_0^\infty dE \frac{E^2}{\exp[\beta(E + E_0 - \mu)] - 1} \\ + \frac{3}{2(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty dE \frac{E}{\exp[\beta(E + E_0 - \mu)] - 1}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

y si redefinimos la fugacidad como  $z = e^{\beta(\mu - E_0)}$ , podemos hacer uso de las funciones de Bose-Einstein, Ec. (2.7), para obtener

$$N = N_0 + \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(z) + \frac{3}{2} \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2 g_2(z). \quad (2.15)$$

Notemos que el número de partículas en el estado base puede escribirse, en términos de  $z$ , como

$$N_0 = \frac{1}{z^{-1} - 1},$$

y podemos invertir esta ecuación para obtener

$$z = \frac{N_0}{N_0 + 1}.$$

Para encontrar la temperatura crítica, hacemos  $z \approx 1$ , lo cual es válido para  $N_0 \gg 1$ , como puede verse de la ecuación anterior. Además, podemos despreciar  $N_0$  frente a  $N$ , i.e. podemos hacer  $N_0 = 0$  en la Ec. (2.15) [31, 32]. Así, resolvemos la

---

<sup>1</sup>En general, el número de formas en que podemos elegir  $k$  enteros no negativos tales que se satisfaga la constricción  $\sum_{i=1}^k x_i = x$  es  $\binom{x+k-1}{k-1}$ .

siguiente ecuación para  $T_c$

$$N = \left( \frac{k_B T_c}{\hbar \omega} \right)^3 \zeta(3) + \frac{3}{2} \left( \frac{k_B T_c}{\hbar \omega} \right)^2 \zeta(2),$$

donde utilizamos el hecho de que  $g_\nu(1) = \zeta(\nu)$ . De manera aproximada, podemos encontrar que

$$T_c \approx \frac{\hbar \omega}{k_B} \left( \frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)^{2/3} N^{1/3}} \right].$$

De la ecuación anterior, podemos notar que el límite termodinámico para el sistema atrapado puede obtenerse haciendo  $N \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow 0$ , pero manteniendo  $N\omega^3$  constante.

Determinamos entonces, de manera aproximada, la temperatura crítica a la cual el sistema atrapado exhibe la transición de fase al estado condensado. Usualmente, se calculan otras cantidades que son de gran importancia: la fracción condensada y la capacidad calorífica del condensado. Sin embargo, en este trabajo no mostramos cómo obtener dichas cantidades debido a que nos desviaríamos de nuestro objetivo principal: describir una mezcla de Bose-Fermi.

El siguiente paso que podemos dar para acercarnos a nuestro objetivo es determinar lo que ocurre con la función de onda del estado base. Nos gustaría entonces poder estudiar las propiedades dinámicas del estado base del sistema en el caso en que los bosones interactúan, y dedicaremos entonces el siguiente capítulo a derivar una ecuación que nos proporcionará esta información.

---

## Capítulo 3

# La Ecuación de Gross-Pitaevskii

### 3.1 Ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo

Como vimos en el capítulo anterior, el fenómeno de condensación de Bose-Einstein predice que, al reducir lo suficiente la temperatura de un sistema formado por bosones, estos se condensarán al estado base del sistema. En el caso en que se tiene un sistema no homogéneo de bosones, será posible describirlo haciendo uso de la ecuación de Gross-Pitaevskii, la cual tiene la forma de una ecuación de Schrödinger no lineal y que derivaremos a continuación.

Consideremos un sistema de  $N$  bosones idénticos, de masa  $m$ , en un potencial de un sólo cuerpo  $V(\vec{r}_i)$ , donde el subíndice  $i$  etiqueta a la  $i$ -ésima partícula. En el estado completamente condensado, todos los bosones se encuentran en el mismo estado de una partícula,  $\phi(\vec{r})$ , lo que nos permite escribir la función de onda de  $N$ -partículas como

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \prod_{i=1}^N \phi(\vec{r}_i). \quad (3.1)$$

Ésta es una aproximación de campo medio, y se conoce como aproximación de Hartree [30]. Usualmente, se requiere que las funciones de onda de una partícula estén normalizadas como

$$\int d^3r |\phi(\vec{r})|^2 = 1.$$

Al provenir de una aproximación de campo medio, la función de onda de Hartree no toma en cuenta las correlaciones producidas por la interacción entre átomos cercanos. Para poder tomar en cuenta dicha interacción haremos uso del pseudopotencial  $u_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ , donde  $u_0$  proporcional a la longitud de dispersión  $a$  del potencial de interacción, y está dada por [8, 33]

$$u_0 = \frac{4\pi a \hbar^2}{m}. \quad (3.2)$$

Así, vemos que el hamiltoniano del sistema se escribe como

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + V(\vec{r}_i) \right] + u_0 \sum_{i < j} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j).$$

Suponemos ahora que la función de onda total es un eigenestado del hamiltoniano del sistema, i.e.

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = E\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N),$$

por lo que si multiplicamos por  $\Psi^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$  la ecuación de eigenvalores anterior e integramos sobre todas las coordenadas obtenemos que la energía del sistema es simplemente el valor esperado del operador hamiltoniano:

$$E = \int \prod_{i=1}^N d^3r_i \Psi^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \hat{H}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N).$$

Es necesario calcular ahora de manera explícita los términos del valor esperado del hamiltoniano. Para los términos cinéticos, vemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} \right\rangle &= \sum_{i=1}^N \int d^3r_1 \cdots d^3r_N \phi^*(\vec{r}_1) \cdots \phi^*(\vec{r}_N) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 \right) \phi(\vec{r}_1) \cdots \phi(\vec{r}_N) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \int d^3r_i \phi^*(\vec{r}_i) \nabla_i^2 \phi(\vec{r}_i) \\ &= -\frac{\hbar^2 N}{2m} \int d^3r \phi^*(\vec{r}) \nabla^2 \phi(\vec{r}), \end{aligned}$$

y procediendo de manera análoga, resulta sencillo probar que el valor esperado del

potencial de un cuerpo es

$$\left\langle \sum_{i=1}^N V(\vec{r}_i) \right\rangle = N \int d^3r \phi^*(\vec{r}) V(\vec{r}) \phi(\vec{r}),$$

y que el valor esperado del término de interacción es

$$\begin{aligned} \left\langle u_0 \sum_{i<j} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right\rangle &= u_0 \sum_{i<j} \int d^3r_1 \cdots d^3r_N \phi^*(\vec{r}_1) \cdots \phi^*(\vec{r}_N) \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \phi(\vec{r}_1) \cdots \phi(\vec{r}_N) \\ &= u_0 \frac{N(N+1)}{2} \int d^3r d^3r' \phi^*(\vec{r}) \phi^*(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \phi(\vec{r}) \phi(\vec{r}') \\ &\approx \frac{1}{2} u_0 N^2 \int d^3r |\phi(\vec{r})|^4, \end{aligned}$$

donde hicimos la aproximación  $N+1 \approx N$ , válida en el límite termodinámico.

Si definimos ahora  $\psi(\vec{r}) = \sqrt{N} \phi(\vec{r})$ , podemos escribir la energía del sistema como

$$E[\psi, \psi^*] = \int d^3r \psi^*(\vec{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) + \frac{1}{2} u_0 |\psi|^2 \right) \psi(\vec{r}). \quad (3.3)$$

A la ecuación anterior se le conoce como *funcional de energía de Gross-Pitaevskii*. Notemos que estamos considerando a  $\psi$  y a  $\psi^*$  de manera independiente. Esto se debe a que  $\psi$  es una cantidad compleja de modo que tiene dos grados de libertad: su parte real y su parte imaginaria.

La forma óptima de la función de onda del condensado se obtiene requiriendo que la funcional de energía de Gross-Pitaevskii sea extremal sujeta a la condición de normalización

$$\int d^3r |\Psi|^2 = N.$$

Utilizando el método de multiplicadores de Lagrange, y variando la Ec. (3.3) sujeta a la restricción con respecto a  $\psi^*$  obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta}{\delta \psi^*} \left[ E[\psi, \psi^*] - \mu \left( \int d^3r |\psi|^2 - N \right) \right] \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) + u_0 |\psi|^2 - \mu \right) \psi(\vec{r}). \end{aligned}$$

Hemos derivado entonces la llamada *ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo* [34, 35],

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) + u_0 |\psi|^2 \right] \psi(\vec{r}) = \mu \psi(\vec{r}). \quad (3.4)$$

Esta ecuación tiene la forma de una ecuación de Schrödinger en la que el potencial que actúa sobre las partículas del gas puede escribirse como un potencial externo,  $V(\vec{r})$ , más un potencial de campo medio no lineal,  $u_0 |\psi|^2$ . Notemos que el eigenvalor de la Ec. (3.4) es el potencial químico y no la energía por partícula,  $E/N$ , a diferencia de la ecuación de Schrödinger usual [33].

## 3.2 Ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo

Si quisiéramos obtener información dinámica acerca del condensado es necesario utilizar la ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) + u_0 |\psi|^2 \right] \psi(\vec{r}). \quad (3.5)$$

Es posible hacer la identificación anterior debido a que la dependencia temporal de la función de onda condensada está gobernada por el potencial químico. Para probar la afirmación anterior basta con considerar el valor esperado del operador

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{\psi}(\vec{r}) e^{-i\hat{H}t/\hbar},$$

donde  $\psi(\vec{r})$  es el operador que aniquila un bosón en la posición  $\vec{r}$  en el esquema de Schrödinger. Para calcular dicho valor esperado suponemos que  $\hat{H}$  satisface la ecuación de eigenvalores  $\hat{H} |n_M, \{x_i\}\rangle = E_N |n_M, \{x_i\}\rangle$ , donde  $n_M$  es el número de partículas condensadas,  $\{x_i\}$  representa al resto de los números cuánticos, y  $N$  es el número total de partículas. Entonces,

$$\langle n_{M-1}, \{x_i\} | \hat{\psi}(\vec{r}, t) | n_M, \{x_i\} \rangle = \langle \hat{\psi}(\vec{r}) \rangle e^{-i(E_N - E_{N-1})t/\hbar},$$

y debido a que en el límite termodinámico podemos aproximar

$$E_N - E_{N-1} \approx \frac{\partial E_N}{\partial N} = \mu,$$

entonces podemos concluir que la evolución temporal de la función de onda condensada está determinada por el potencial químico [8]

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-1\mu t/\hbar}.$$

Por otra parte, es posible derivar la Ec. (3.5) tomando como punto de partida el principio de mínima acción. Consideremos entonces la acción dada por

$$S[\psi, \psi^*] = \int dt \int d^3r \psi^*(\vec{r}) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V(\vec{r}) - u_0 |\psi|^2 \right) \psi(\vec{r}).$$

Variando la ecuación anterior con respecto a  $\psi^*$  obtenemos

$$\frac{\delta S}{\delta \psi^*} = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V(\vec{r}) - u_0 |\psi|^2 \right) \psi(\vec{r}) = 0,$$

lo cual coincide justamente con la ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo [8].

Una vez que hemos obtenido una ecuación para describir la dinámica del condensado nos gustaría saber lo que ocurre con las soluciones de dicha ecuación. Debido a que la Ec. (3.5) tiene un término no lineal, en general no será posible resolverla. Sin embargo, es posible hacer algunas aproximaciones para poder extraer la información dinámica del sistema. Por ejemplo, si consideramos la ecuación de Gross-Pitaevskii en una dimensión, es posible mostrar que se pueden formar solitones en el condensado y dependiendo del carácter de la interacción entre los bosones se tendrán solitones brillantes u oscuros [33]. Otra aproximación que suele utilizarse es la de Thomas-Fermi, que en este contexto consiste en despreciar el término cinético en la ecuación de movimiento del condensado.

Ahora que contamos con la ecuación de Gross-Pitaevskii, nos gustaría generalizarla de modo tal que podamos estudiar los efectos producidos por la interacción entre un gas de bosones y uno de fermiones. A lo largo del siguiente capítulo, pre-

sentaremos una forma en que es posible estudiar mezclas de gases cuánticos cuyas componentes obedecen distintas estadísticas.

No siempre es posible utilizar la ecuación de Gross-Pitaevskii, pues para derivarla supusimos que la interacción entre las partículas del condensado es a través de colisiones binarias. Una buena parte de los condensados de Bose-Einstein puede aproximarse de este modo: la ecuación de Gross-Pitaevskii puede describir apropiadamente condensados diluidos tridimensionales. Sin embargo, en el caso en que no es posible suponer que las partículas del condensado interactúan a través de un potencial de contacto, la ecuación de Gross-Pitaevskii deberá modificarse [36]. Eso ocurre en sistemas como condensados de Bose-Einstein en menor dimensión, condensados densos y clusters superfluidos [37, 38].

Una vez que nos hemos dado una idea de cómo puede estudiarse la función de onda de las partículas condensadas en el caso en que estas interactúan quisiéramos generalizar estos resultados para poder incluir en nuestro sistema una componente fermiónica. Así, en el siguiente capítulo, mostraremos cómo se puede describir una mezcla bosón-fermión.

---

# Metodología

---

# Capítulo 4

## Gas de bosones y fermiones en interacción

### 4.1 Integral funcional para la mezcla interactuante

Para estudiar una mezcla de bosones y fermiones interactuantes, uno puede proceder de distintas maneras. Por ejemplo, en las Refs. [39, 40] se aborda este problema tomando como punto de partida la gran función de partición

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi_B^*(\vec{r}, t) \mathcal{D}\psi_B(\vec{r}, t) \mathcal{D}\psi_F^*(\vec{r}, t) \mathcal{D}\psi_F(\vec{r}, t) e^{-S_E[\psi_B^*, \psi_B, \psi_F^*, \psi_F]/\hbar},$$

donde  $S_E$  es la acción euclídea<sup>1</sup>, los campos complejos  $\psi_B^*$  y  $\psi_B$  representan a los bosones y son periódicas en el intervalo de tiempo imaginario  $[0, \beta\hbar]$ , y  $\psi_F^*$  y  $\psi_F$  son campos de Grassman, antiperiódicos en el mismo intervalo [39–42].

Con el fin de considerar el hecho de que la componente bosónica de la mezcla puede condensarse, se hace uso del llamado “*background method*”. Al utilizar este método para la componente bosónica, suponemos que es posible escribir los campos

---

<sup>1</sup>La acción euclídea se obtiene a partir de la acción de Minkowski haciendo la rotación de Wick  $t = -i\tau$ . La acción de Minkowski es

$$S_M[\psi_B^*, \psi_B, \psi_F^*, \psi_F] = \int dt \int d^3r \mathcal{L}[\psi_B^*, \psi_B, \psi_F^*, \psi_F],$$

donde  $\mathcal{L}[\psi_B^*, \psi_B, \psi_F^*, \psi_F]$  es la densidad lagrangiana que describe al sistema.

cuánticos correspondientes como [42–45]

$$\psi_{\text{B}}^*(\vec{r}, t) = \psi_0^*(\vec{r}, t) + \delta\psi_{\text{B}}^*(\vec{r}, t), \quad \text{y} \quad \psi_{\text{B}}(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}, t) + \delta\psi_{\text{B}}(\vec{r}, t), \quad (4.1)$$

donde los campos  $\psi_0^*(\vec{r}, t)$  y  $\psi_0(\vec{r}, t)$  son tales que podemos identificar la densidad de los bosones condensados con  $|\psi_0(\vec{r}, t)|^2$ , y los términos  $\delta\psi_{\text{B}}^*(\vec{r}, t)$  y  $\delta\psi_{\text{B}}(\vec{r}, t)$  representan pequeñas fluctuaciones que toman en cuenta el hecho de que en un gas real habrá partículas que se encuentran en estados excitados [33]. Es importante mencionar que las fluctuaciones deben obedecer la condición de consistencia [41]

$$\int d^3r \psi_0^*(\vec{r}) \delta\psi_{\text{B}}(\vec{r}, t) + \int d^3r \psi_0(\vec{r}) \delta\psi_{\text{B}}^*(\vec{r}, t) = 0.$$

Al hacer esto, y debido a que consideramos que las fluctuaciones  $\delta\psi_{\text{B}}^*(\vec{r}, t)$  y  $\delta\psi_{\text{B}}(\vec{r}, t)$  son pequeñas, podremos desarrollar la acción euclídea alrededor de los campos de fondo. En la Ref. [40] se muestra que la aproximación a orden cero del desarrollo es equivalente a la teoría de Gross-Pitaevskii, mientras que la aproximación a segundo orden corresponde a la teoría de Bogoliubov.

En las Refs. [39, 40] se estudia la mezcla de Bose-Fermi haciendo uso únicamente de la aproximación de menor orden, i.e. la teoría de Gross-Pitaevskii, y se muestra que la dinámica de la componente bosónica de la mezcla depende de la función de Green fermiónica, y viceversa. Este enfoque podría ser de utilidad para nuestros propósitos, sin embargo exploraremos con mayor detalle una descripción alternativa del gas de Bose-Fermi interactuante.

## 4.2 La aproximación hidrodinámica

Existen otros métodos para describir una mezcla de bosones y fermiones. Por ejemplo, podemos también hacer uso de dos ecuaciones de campo medio, una para el parámetro de orden de los bosones, i.e.  $\psi(\vec{r}, t)$ , y otra para la densidad de fermiones  $n(\vec{r}, t) = n_0(\vec{r}) + \delta n(\vec{r}, t)$ , donde  $n_0(\vec{r}, t)$  es la densidad de número del estado base para los fermiones, y  $\delta n(\vec{r}, t)$  son pequeñas fluctuaciones para la densidad de número.

Buscamos derivar las ecuaciones de evolución antes mencionadas, y procederemos como en la Ref. [23], tomando entonces como punto de partida el hamiltoniano

del sistema en el formalismo de segunda cuantización. Para una mezcla lo suficientemente diluida, es posible considerar que los átomos interactúan únicamente por medio de colisiones binarias. Además, en el caso en que el alcance de la interacción es mucho menor que la distancia interatómica media, es posible aproximar el potencial de interacción por un potencial de contacto [8]. Si además suponemos que la temperatura del sistema es lo suficientemente baja, es posible considerar únicamente la dispersión de ondas  $s$ , lo cual implica que debido al principio de exclusión de Pauli, no habrá interacción entre fermiones [27]. Al igual que en la sección anterior, trabajaremos con la componente bosónica en el estado condensado, y supondremos que el gas de Fermi es degenerado y que la componente espinorial de este se encuentra polarizada.

Así, el hamiltoniano de la mezcla puede escribirse de la siguiente manera:

$$\hat{H} = \hat{H}_B + \hat{H}_F + \hat{H}_{\text{int}},$$

donde el hamiltoniano para los bosones es

$$\hat{H}_B = \int d^3r \left[ \hat{\psi}_B^\dagger \left( -\frac{\hbar^2}{2m_B} \nabla^2 + V_B(\vec{r}) \right) \hat{\psi}_B + \frac{g_1}{2} \hat{\psi}_B^\dagger \hat{\psi}_B^\dagger \hat{\psi}_B \hat{\psi}_B \right], \quad (4.2)$$

la contribución al hamiltoniano para la componente fermiónica es

$$\hat{H}_F = \int d^3r \left[ \hat{\psi}_F^\dagger \left( -\frac{\hbar^2}{2m_F} \nabla^2 + V_F(\vec{r}) \right) \hat{\psi}_F \right], \quad (4.3)$$

y el hamiltoniano de interacción es

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int d^3r \ g_2 \ \hat{\psi}_B^\dagger \hat{\psi}_F^\dagger \hat{\psi}_B \hat{\psi}_F, \quad (4.4)$$

con  $m_B$  y  $m_F$  la masa de los bosones y la masa de los fermiones, respectivamente, y las constantes  $g_1 = 4\pi\hbar^2 a_{bb}/m_B$  y  $g_2 = 4\pi\hbar^2 a_{bf}/m_R$  son tales que caracterizan las interacciones de dos cuerpos. En las expresiones anteriores,  $a_{bb}$  y  $a_{bf}$  son las longitudes de dispersión que caracterizan las colisiones bosón-bosón y bosón-fermión, y  $m_R$  es la masa reducida. Además,  $V_B(\vec{r})$  y  $V_F(\vec{r})$  son potenciales externos que confinan a los bosones y a los fermiones, respectivamente, y usualmente se pueden

aproximar como potenciales armónicos.

Resulta entonces bastante sencillo obtener las ecuaciones de evolución para los operadores  $\hat{\psi}_B$  y  $\hat{\psi}_F$ . Para ello, recordamos que en el formalismo de segunda cuantización, los operadores de creación y aniquilación para bosones obedecen las reglas de conmutación

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\psi}_B(\vec{r}, t), \hat{\psi}_B(\vec{r}', t) \right] &= 0 = \left[ \hat{\psi}_B^\dagger(\vec{r}, t), \hat{\psi}_B^\dagger(\vec{r}', t) \right], \\ \left[ \hat{\psi}_B(\vec{r}, t), \hat{\psi}_B^\dagger(\vec{r}', t) \right] &= \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Por otra parte, los operadores de creación y aniquilación fermiónicos obedecen relaciones de anticonmutación:

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{\psi}_F(\vec{r}, t), \hat{\psi}_F(\vec{r}', t) \right\} &= 0 = \left\{ \hat{\psi}_F^\dagger(\vec{r}, t), \hat{\psi}_F^\dagger(\vec{r}', t) \right\}, \\ \left\{ \hat{\psi}_F(\vec{r}, t), \hat{\psi}_F^\dagger(\vec{r}', t) \right\} &= \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Es importante notar que tanto las relaciones de conmutación como las de anticonmutación deben ser evaluadas a tiempos iguales. Además, los operadores de creación y aniquilación bosónicos conmutan con los operadores fermiónicos. Podemos ahora obtener la ecuación de evolución para el operador de aniquilación bosónico partiendo de la ecuación de Heisenberg:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}_B(\vec{r}, t) &= \left[ \hat{\psi}_B(\vec{r}, t), \hat{H} \right] \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m_B} \nabla^2 + V_B(\vec{r}) + g_1 \hat{\psi}_B^\dagger \hat{\psi}_B + g_2 \hat{\psi}_F^\dagger \hat{\psi}_F \right) \hat{\psi}_B. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por otro lado, la ecuación de evolución para el operador de aniquilación fermiónico puede obtenerse haciendo uso de la identidad  $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \{\hat{A}, \hat{B}\}\hat{C} - \hat{B}\{\hat{A}, \hat{C}\}$ :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}_F(\vec{r}, t) &= \left[ \hat{\psi}_F(\vec{r}, t), \hat{H} \right] \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m_F} \nabla^2 + V_F(\vec{r}) + g_2 \hat{\psi}_B^\dagger \hat{\psi}_B \right) \hat{\psi}_F. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Desde el punto de vista formal, hemos resuelto el problema, pues tenemos dos

ecuaciones acopladas con dos incógnitas: los operadores de aniquilación para bosones y para fermiones. Sin embargo, resolver las Ecs. (4.7) y (4.8) es una tarea increíblemente complicada, y en general no será posible hacerlo de manera exacta. Así pues, recurrimos a hacer una aproximación de campo medio para poder extraer información de esta pareja de ecuaciones.

La aproximación de campo medio que utilizaremos consiste en considerar que la Ec. (4.7) se mantiene válida para el valor esperado del operador de aniquilación bosónico, y en reemplazar los valores esperados por funciones complejas:

$$\langle \hat{\psi}_B(\vec{r}, t) \rangle \equiv \psi(\vec{r}, t), \quad \langle \hat{\psi}_B^\dagger(\vec{r}, t) \rangle \equiv \psi^*(\vec{r}, t). \quad (4.9)$$

Es importante notar, en primer lugar, que no siempre es posible identificar al valor esperado de  $\hat{\psi}_B$  con el parámetro de orden de los bosones. Para que la aproximación sea válida, requerimos que el valor esperado del operador de aniquilación sea distinto de cero, lo cual no sucede por ejemplo en el caso en que se tiene una cantidad finita de átomos condensados. Además, es posible interpretar la aproximación como una ruptura de simetría, pues el hamiltoniano dado por las Ecs. (4.2)-(4.4) es invariante bajo la transformación global  $\hat{\psi}_B \rightarrow \hat{\psi}_B e^{i\theta}$ , mientras que el valor esperado de los operadores de creación y aniquilación de los bosones no lo es [46].

Consideramos entonces que es posible hacer las aproximaciones

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_B^\dagger \hat{\psi}_B \hat{\psi}_B \rangle &\approx \langle \hat{\psi}_B^\dagger \rangle \langle \hat{\psi}_B \rangle \langle \hat{\psi}_B \rangle \\ &= |\psi(\vec{r}, t)|^2 \psi(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\langle \hat{\psi}_F^\dagger \hat{\psi}_F \hat{\psi}_B \rangle \approx \langle \hat{\psi}_F^\dagger \hat{\psi}_F \rangle \langle \hat{\psi}_B \rangle = n(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t), \quad (4.11)$$

donde definimos

$$n(\vec{r}, t) \equiv \langle \hat{n}(\vec{r}, t) \rangle = \langle \hat{\psi}_F^\dagger \hat{\psi}_F \rangle. \quad (4.12)$$

Al utilizar las aproximaciones anteriores en la Ec. (4.7) recuperamos la ecuación de Gross-Pitaevskii con potenciales externos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m_B} \nabla^2 + V_B(\vec{r}) + g_1 |\psi(\vec{r}, t)|^2 + g_2 n(\vec{r}, t) \right) \psi(\vec{r}, t). \quad (4.13)$$

Por otra parte, no es posible obtener una ecuación de evolución para los fermiones análoga a la Ec. (4.13) puesto que el principio de exclusión de Pauli impide que los fermiones se condensen a un mismo estado de una partícula. Describimos entonces la evolución temporal de la componente fermiónica de la mezcla a través de la evolución temporal de cantidades macroscópicas que pueden medirse, como la densidad de número, la densidad de corriente y la presión [23].

Queremos obtener ahora ecuaciones de tipo hidrodinámico para estudiar las cantidades macroscópicas antes mencionadas. Con este fin, multiplicamos la Ec. (4.8) por la izquierda por el operador  $\hat{\psi}_F^\dagger$  y por otro lado multiplicamos por la derecha al conjugado hermítico de esta misma ecuación por  $\hat{\psi}_F$ , y restamos las ecuaciones resultantes. Hacer esto nos lleva a la ecuación de conservación para la densidad de número de los fermiones

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial t} = -\nabla \cdot \hat{j}, \quad (4.14)$$

donde definimos el operador de corriente  $\hat{j}$  como

$$\hat{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2im_F} \left( \hat{\psi}_F^\dagger \nabla \hat{\psi}_F - (\nabla \hat{\psi}_F^\dagger) \hat{\psi}_F \right). \quad (4.15)$$

Suponemos ahora que es posible hacer la aproximación [47]

$$\langle \hat{n} \rangle \approx n_0(\vec{r}) + \delta n(\vec{r}, t), \quad (4.16)$$

$$\langle \hat{j} \rangle \approx n_0(\vec{r}) \vec{u}(\vec{r}, t), \quad (4.17)$$

donde  $n_0(\vec{r})$  es la densidad de número del estado base para los fermiones, y  $\delta n(\vec{r}, t)$  y  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  son las fluctuaciones de la densidad de número y de la velocidad, respectivamente. Si consideramos ahora que el efecto de la interacción entre bosones y fermiones es lo suficientemente pequeña como para poder ser despreciada al considerar la aproximación a orden cero para la densidad de número de los fermiones, entonces será posible utilizar la aproximación de Thomas-Fermi para determinar  $n_0(\vec{r})$  [23].

Nosotros sabemos que la estadística de los fermiones requiere que todos los estados estén ocupados hasta un estado con una energía máxima, y por lo tanto con un momento  $k_F$ . Además, la relación de incertidumbre entre la posición y el momento

dicta que en cada celda del espacio fase de volumen  $\hbar^3$  cabrán a lo más dos electrones con espines distintos, lo cual se traduce en que en un volumen del espacio fase  $d^3r d^3k$  cabrán a lo más  $d^3r d^3k / (2\pi)^3$  fermiones. Podemos calcular ahora la cantidad de fermiones que hay en el estado base,

$$\begin{aligned} N(\vec{r}) &= \int \frac{d^3r d^3k}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{4}{3}\pi \frac{k_F^3(\vec{r})}{(2\pi)^3} V, \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde  $V$  es el volumen sobre el que estamos integrando. Obtenemos entonces la siguiente expresión para la densidad de fermiones del estado base:

$$\frac{4}{3}\pi k_F^3(\vec{r}) = (2\pi)^3 n_0(\vec{r}) \quad (4.19)$$

En la posición  $\vec{r}$ , el fermión más energético tendrá una energía

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2(\vec{r})}{2m_F} + V(\vec{r}), \quad (4.20)$$

considerando que los fermiones se mueven como partículas clásicas en un potencial local común  $V(\vec{r})$ . Observemos que, si bien tanto la energía cinética como la potencial dependen de la posición, su suma deberá permanecer constante en equilibrio, pues de otro modo los fermiones fluirían de regiones con mayor energía hasta que la energía máxima fuese la misma en todas partes.

Utilizando las Ecs. (4.19) y (4.20), podemos expresar la densidad de fermiones del estado base en términos de la energía de Fermi [48],

$$n_0(\vec{r}) = \frac{1}{6\pi^2} \left( \frac{2m_F}{\hbar^2} (E_F - V(\vec{r})) \right)^{3/2}. \quad (4.21)$$

Como habíamos mencionado anteriormente, supondremos que la Ec. (4.14) se mantiene válida para los valores esperados de la densidad de número y de corriente, y si hacemos uso de las aproximaciones hidrodinámicas dadas por las Ecs. (4.16) y

(4.17), entonces obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n(\vec{r}, t) = -\nabla \cdot (n_0(\vec{r}) \vec{u}(\vec{r}, t)). \quad (4.22)$$

Por otra parte, si tomamos la derivada con respecto al tiempo del operador de corriente, Ec. (4.15), y utilizamos la ecuación de evolución para el operador fermiónico y su conjugado hermítico, obtenemos que

$$m_F \frac{\partial}{\partial t} \hat{j}_k = - \sum_l \partial_l \hat{T}_{kl} - \partial_k \left( V_F(\vec{r}) + g_2 \hat{\psi}_B^\dagger \hat{\psi}_B \right) \hat{n}, \quad (4.23)$$

donde definimos al operador de dos índices,  $\hat{T}_{kl}$ , como

$$\hat{T}_{kl} = -\frac{\hbar^2}{4m_F} \left( \hat{\psi}_F^\dagger \partial_k \partial_l \hat{\psi}_F + \partial_k \partial_l \hat{\psi}_F^\dagger \hat{\psi}_F - \partial_k \hat{\psi}_F^\dagger \partial_l \hat{\psi}_F - \partial_l \hat{\psi}_F^\dagger \partial_k \hat{\psi}_F \right), \quad (4.24)$$

y si suponemos que la Ec. (4.23) se mantiene válida para el valor esperado de las cantidades que en ella aparecen, obtenemos la ecuación

$$m_F n_0(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial t} u_k = -\partial_k P(\vec{r}, t) - \sum_l \partial_l (m_F n u_k u_l) - n \partial_k (V_F(\vec{r}) + g_2 |\psi|^2). \quad (4.25)$$

Para obtener la ecuación anterior, se hizo la suposición de que el sistema es rotacionalmente invariante, con lo cual es posible hacer, en analogía con la hidrodinámica, la aproximación [47]

$$\langle \hat{T}_{kl} \rangle \approx m_F n(\vec{r}, t) u_k(\vec{r}, t) u_l(\vec{r}, t) + \delta_{kl} P(\vec{r}, t), \quad (4.26)$$

donde  $u_i(\vec{r}, t)$  denota la  $i$ -ésima componente de la fluctuación de la velocidad,  $\vec{u}(\vec{r}, t)$ , y la cantidad  $P$  se define como el valor esperado del operador

$$\hat{P}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar^2}{3m_F} \nabla \hat{\psi}_F^\dagger \cdot \nabla \hat{\psi}_F. \quad (4.27)$$

Esta cantidad puede identificarse como la presión de Fermi del gas [47], y al igual

que la densidad de fermiones del estado base, puede descomponerse como

$$P(\vec{r}, t) \approx P_0(\vec{r}) + \delta P(\vec{r}, t). \quad (4.28)$$

Además, fue necesario hacer uso de la aproximación

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \partial_k (\hat{\psi}_B^\dagger \hat{\psi}_B) \rangle &\approx \langle \hat{n} \rangle \partial_k (\langle \hat{\psi}_B^\dagger \rangle \langle \hat{\psi}_B \rangle) \\ &= n(\vec{r}, t) \partial_k |\psi(\vec{r}, t)|^2. \end{aligned}$$

Debido a que en la Ec. (4.23) aparece un término cuadrático en las fluctuaciones, a saber  $-\sum_l \partial_l (m n u_k u_l)$ , será posible despreciarlo frente a los términos que son de primer orden en las fluctuaciones, y al hacer esto y utilizando las aproximaciones mencionadas anteriormente, la ecuación de evolución para el operador de corriente se reduce a

$$m_F n_0 \frac{\partial u_k}{\partial t} = -\partial_k P_0 - \partial_k \delta P - (n_0 + \delta n) \partial_k (V_F(\vec{r}) + g_2 |\psi|^2). \quad (4.29)$$

Es razonable pensar que la ecuación anterior se satisface por separado para los términos de orden cero y de primer orden en las fluctuaciones [23], de manera que si consideramos únicamente los términos de orden cero en las fluctuaciones obtendremos la ecuación

$$\nabla P_0(\vec{r}) = -n_0(\vec{r}) \nabla V_F(\vec{r}), \quad (4.30)$$

mientras que para los términos lineales en las fluctuaciones obtenemos

$$m_F n_0(\vec{r}) \frac{\partial \vec{u}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \delta P(\vec{r}, t) - g_2 n_0(\vec{r}) \nabla |\psi(\vec{r}, t)|^2 - \delta n(\vec{r}, t) \nabla V_F(\vec{r}). \quad (4.31)$$

La ecuación anterior corresponde a la ecuación de Euler en hidrodinámica [23], y si la comparamos con esta última podemos interpretar a los dos últimos términos en la Ec. (4.31) como una fuerza externa que proviene de un potencial [49]. Por otra parte, es posible resolver, con ayuda de la Ec. (4.21), la ecuación de orden cero en

las fluctuaciones:

$$\begin{aligned}
 P_0(\vec{r}) &= \frac{(6\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_F} [n_0(\vec{r})]^{5/3} \\
 &= \frac{\hbar^2}{30\pi^2 m_F} \left[ \frac{2m_F}{\hbar^2} (E_F - V_F(\vec{r})) \right]^{5/2}.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Obtuvimos entonces una expresión cerrada para el orden cero de la presión de los fermiones en el régimen en que la aproximación de Thomas-Fermi es válida, y procedemos entonces a encontrar una ecuación de evolución para el operador de presión. De manera análoga a como se obtuvieron las ecuaciones de evolución anteriores, tomamos la derivada parcial con respecto al tiempo de la Ec. (4.27) y utilizamos la ecuación de evolución de los operadores de creación y aniquilación fermiónicos. Al hacer esto, obtenemos la ecuación [23]

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{P} = - \sum_k \left[ \frac{\hbar^3}{6im_F^2} \sum_l \left( \partial_l \hat{\psi}_F^\dagger \partial_k \partial_l \hat{\psi}_F - \partial_k \partial_l \hat{\psi}_F^\dagger \partial_l \hat{\psi}_F \right) \right] - \frac{2}{3} \nabla \left( V_F(\vec{r}) + g_2 \hat{\psi}_B^\dagger \hat{\psi}_B \right) \cdot \hat{j}. \tag{4.33}$$

Una vez más, supondremos que la ecuación de evolución para el operador  $\hat{P}$  se mantiene válida para los valores esperados de las cantidades que en ella aparecen. Hacemos uso entonces de las aproximaciones que introducimos anteriormente, y adicionalmente suponemos que es posible aproximar [23, 47]

$$\frac{\hbar^3}{6im_F^2} \sum_l \left( \partial_l \hat{\psi}_F^\dagger \partial_k \partial_l \hat{\psi}_F - \partial_k \partial_l \hat{\psi}_F^\dagger \partial_l \hat{\psi}_F \right) \approx u_k \left[ \frac{1}{3} m_F u^2 (n_0 + \delta n) + \frac{5}{3} (P_0 + \delta P) \right], \tag{4.34}$$

donde  $u^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ . Esto nos permite escribir la Ec. (4.33) como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \delta P(\vec{r}, t) &= - \sum_k \partial_k u_k \left[ \frac{1}{3} m_F u^2 (n_0 + \delta n) + \frac{5}{3} (P_0 + \delta P) \right] \\
 &\quad - \frac{2}{3} n_0(\vec{r}) \vec{u}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \left( V_F(\vec{r}) + g_2 |\psi(\vec{r}, t)|^2 \right),
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

y si despreciamos los términos de segundo orden en adelante en la ecuación anterior

obtenemos que las fluctuaciones de la presión obedecen la ley de evolución

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta P(\vec{r}, t) = -\frac{5}{3} \nabla \cdot [P_0(\vec{r}) \vec{u}(\vec{r}, t)] - \frac{2}{3} n_0(\vec{r}) \vec{u}(\vec{r}, t) \cdot \nabla V_F(\vec{r}). \quad (4.36)$$

Notemos ahora que es posible condensar la información contenida en las Ecs. (4.22), (4.29) y (4.36) en una sola ecuación. Para ello, derivamos con respecto al tiempo la ecuación de evolución para las fluctuaciones de la densidad de número, Ec. (4.22), y utilizamos la versión cuántica de la ecuación de Euler, Ec. (4.29). Esto nos lleva a la ecuación

$$m_F \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n = \nabla^2 \delta P + \nabla \cdot (g_2 n_0 |\psi|^2 + \delta n \nabla V_F). \quad (4.37)$$

Es posible resolver, de manera independiente, la Ec. (4.36) si sustituimos las expresiones que habíamos obtenido ya para  $n_0$  y  $P_0$ , junto con la ecuación de evolución para las fluctuaciones de la densidad de número. Así, la Ec. (4.36) nos lleva a [23]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta P(\vec{r}, t) &= -\frac{\hbar^2}{3m_F} [6\pi^2 n_0(\vec{r})]^{2/3} \nabla \cdot [n_0(\vec{r}) \vec{u}(\vec{r}, t)] \\ &= \frac{\hbar^2}{3m_F} [6\pi^2 n_0(\vec{r})]^{2/3} \frac{\partial}{\partial t} \delta n(\vec{r}, t). \end{aligned}$$

Esta última ecuación puede integrarse inmediatamente con respecto al tiempo, de manera que obtenemos

$$\delta P(\vec{r}, t) = \frac{\hbar^2}{3m_F} [6\pi^2 n_0(\vec{r})]^{2/3} \delta n(\vec{r}, t). \quad (4.38)$$

Si introducimos ahora la Ec. (4.38) en la Ec. (4.37), e introducimos el valor de  $n_0$  obtenido en la aproximación de Thomas-Fermi, obtendremos entonces la siguiente ecuación de movimiento para las fluctuaciones en la densidad de número [23]

$$m_F \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n = \nabla \cdot \left[ n_0(\vec{r}) \nabla \left( \frac{(6\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{3m_F n_0(\vec{r})^{1/3}} \delta n(\vec{r}, t) + g_2 n_0 |\psi|^2 \right) \right]. \quad (4.39)$$

La Ec. (4.39), junto con la ecuación de Gross-Pitaevskii, Ec. (4.13), dan la evolución temporal tanto de la función de onda del condensado de Bose-Einstein como de las fluctuaciones de la densidad de número para los fermiones.

Tomando estas ecuaciones como punto de partida es posible, por ejemplo, descri-

bir una mezcla de Bose-Fermi en la cual los espines de la componente fermiónica están polarizados, y el número de fermiones es mucho mayor al número de bosones. Un sistema tal, atrapado en una trampa anisotrópica puede ser descrito por una ecuación de Schrödinger no lineal para la componente bosónica, y por una ecuación de onda no homogénea para la componente fermiónica, y dependiendo del tipo de interacciones que haya entre los bosones y los fermiones admitirán soluciones solitónicas de distintos tipos [28].

Hemos mostrado entonces cómo es posible estudiar mezclas de Bose-Fermi interactuantes, y serán estos los modelos que utilizaremos como guía para abordar el problema, y que esperamos generalizar. En la siguiente parte de este trabajo, presentaremos los objetivos del protocolo de investigación, así como de los resultados que se espera obtener.

---

## **Objetivos y Resultados Esperados**

---

# Objetivos

Como mencionamos anteriormente, esperamos poder dar una descripción de una mezcla de Bose-Fermi en la cual la componente bosónica se encuentra en el estado condensado y el gas de Fermi es degenerado. Consideraremos también que tanto los bosones como los fermiones son confinados por trampas armónicas. En particular, quisieramos evitar hacer uso de la aproximación de Thomas-Fermi, así como de la aproximación hidrodinámica, que se utilizan frecuentemente. Nos enfocaremos en estudiar los efectos que tienen las fluctuaciones del mar de Fermi sobre la componente bosónica de la mezcla.

Esperamos también encontrar que el condensado de Bose-Einstein exhibe movimiento browniano cuántico, o bien que generaliza este concepto. Esto suena plausible, ya que de entrada el hamiltoniano de nuestro sistema puede escribirse como

$$\hat{H} = \hat{H}_B + \hat{H}_F + \hat{H}_I,$$

donde  $\hat{H}_B$ ,  $\hat{H}_F$  y  $\hat{H}_I$  son los hamiltonianos de la componente bosónica, de la componente fermiónica, y de la interacción, respectivamente, y están dados por las Ecs. (4.2)-(4.4). Buscamos determinar las condiciones que deben imponerse sobre dichos hamiltonianos para que el sistema exhiba movimiento browniano cuántico (en el sentido de la Ref. [29]), o bien que su comportamiento extienda la definición de movimiento browniano para este tipo de sistemas.

Para estudiar los efectos que tienen las fluctuaciones de la densidad fermiónica sobre la componente bosónica, tomaremos como punto de partida las Ecs. (4.13)

y (4.39),

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m_B} \nabla^2 + V_B(\vec{r}) + g_1 |\psi(\vec{r}, t)|^2 + g_2 n(\vec{r}, t) \right) \psi(\vec{r}, t), \\ m_F \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n &= \nabla \cdot \left( n_0(\vec{r}) \nabla \left( \frac{(6\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{3m_F n_0(\vec{r})^{1/3}} \delta n(\vec{r}, t) + g_2 n_0 |\psi|^2 \right) \right), \end{aligned}$$

que están acopladas a través de la definición para la densidad fermiónica:  $n(\vec{r}, t) = n_0(\vec{r}) + \delta n(\vec{r}, t)$ . Resolver de manera aproximada estas ecuaciones nos permitirá obtener el campo bosónico,  $\psi(\vec{r}, t)$ , a partir del cual podemos calcular distintas propiedades del sistema. Por ejemplo, una de las cantidades que estudiaremos es la función de correlación

$$\chi(\vec{r}, t) = \int d^3 r' \psi(\vec{r}, t) \psi(\vec{r} - \vec{r}', t).$$

Buscaremos en primera instancia dar una solución analítica aproximada del sistema en una dimensión antes de pasar a más dimensiones. Además, también en el caso unidimensional, resolveremos las ecuaciones dinámicas del sistema de manera numérica, y buscaremos comparar los resultados obtenidos con ambos métodos. Trataremos también de resolver el problema prescindiendo por ejemplo de la aproximación hidrodinámica dando una descripción completamente cuántica, utilizando las herramientas teóricas dadas en las Refs. [41, 50].

Para resolver el problema numéricamente, se espera poder utilizar algoritmos de Monte Carlo cuánticos, cuya eficacia puede verse e.g. en la Ref.[26]. Además, en la misma referencia, un algoritmo de este tipo fue utilizado para resolver un problema de mezclas binarias como el que queremos abordar, lo cual es un indicio de la utilidad de estos en el contexto que nos interesa.

Finalmente, esperamos poder hacer uso de alguna transformación para simplificar el estudio de la mezcla. Es bien sabido que, al estudiar gases cuánticos unidimensionales, es posible representar un problema de bosones en términos de fermiones (a través de una transformación llamada fermionización), o bien un problema de fermiones en términos de bosones (a través de la bosonización). Lo anterior es una consecuencia directa de la transmutabilidad de Fermi-Bose, puesto que la estadística cuántica de partículas idénticas es un concepto ambiguo en una dimensión [51, 52].

---

Esperamos, por ejemplo que al bosonizar la componente fermiónica el hamiltoniano del sistema pueda diagonalizarse, y para ello esperamos que las técnicas presentadas en las Refs. [51–53] sean de utilidad. Probablemente, aún después de la transformación el sistema no sea soluble de manera exacta, pero esperamos que al menos sea más sencillo resolver de forma aproximada este sistema.

---

# Resultados Esperados

En la sección anterior, mencionamos que es posible que la componente bosónica de la mezcla efectúe movimiento browniano cuántico. Esperamos poder determinar bajo qué condiciones (tipo de interacción entre bosones y fermiones, intensidad de la interacción, etc.) será posible que éste efecto se haga presente.

Los bosones, al encontrarse en el estado condensado, exhiben correlaciones de largo alcance. Por ello, los efectos de las fluctuaciones no se verán únicamente de manera local, i.e. en una vecindad de la región donde ocurre la interacción. Esperamos entonces que la dinámica de las fluctuaciones influya fuertemente a la de la nube condensada.

Otro de los resultados que esperamos obtener en éste trabajo es que la estabilidad del condensado dependerá de la densidad de partículas del baño de Fermi. En particular, se espera que las fluctuaciones sean las que determinen si el condensado es estable o no. Así mismo, podemos anticipar que la estabilidad del condensado dependerá de la razón entre el número de fermiones y el número de bosones, así como de la intensidad y el carácter de la interacción bosón-fermión.

En el hamiltoniano modelo del sistema, incluimos potenciales externos que afectan a los bosones y a los fermiones por separado. Antes de explorar el caso en el que se tienen, por ejemplo, potenciales de atrapamiento, estudiaremos el caso en el que se tiene un mar de Fermi casi uniforme y se introduce una componente bosónica. Si el gas de Fermi presenta perturbaciones localizadas, el sistema exhibirá oscilaciones de Friedel. Se espera que, al introducir el gas de bosones, los modos de oscilación de los fermiones se acoplen con aquellos de los bosones. En particular, esperamos encontrar la forma en que las oscilaciones del termostato perturban al condensado.

De manera puntual, al realizar éste trabajo esperamos:

- Adaptar las ideas de movimiento browniano cuántico que se tienen al problema de un condensado de Bose-Einstein en interacción con un mar de Fermi.
- Hallar la dependencia de la estabilidad del condensado como función de las fluctuaciones del gas de Fermi, de la razón entre el número de fermiones y el número de bosones, y de la intensidad y carácter de las interacciones bosón-bosón y bosón-fermión.
- Determinar cómo es que las oscilaciones de Friedel de la componente fermiónica excitan los modos colectivos del condensado.

---

# Bibliografía

- [1] S. N. Bose, *Z. Phys.* **26**, 178 (1924)
- [2] K. C. Wali, *Satyendra Nath Bose: his life and times (selected works with commentary)*, Singapore: World Scientific (2009)
- [3] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995)
- [4] J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger and M. Weitz, *Nature* **468** 7323 (2010)
- [5] J. D. Plumhof, T. Stöferle, L. Mai, U. Scherf and R. F. Mahrt *Nat. Mat.* **13** (2014)
- [6] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H. -J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, *Nature* **392**, 151 (1998)
- [7] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1795 (2000)
- [8] M. Ueda, *Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation*, World Scientific, (2010)
- [9] A. Einstein, S. B. Preuss, *Akad. Wiss. Phys. Mat. Klasse* **13**, 3 (1925)
- [10] F. A. van Abeelen, B. J. Verhaar and A. J. Moerdijk, *Phys. Rev. A* **55** (1997)
- [11] R. Côté, A. Dalgarno, H. Wang and W. C. Stwalley, *Phys. Rev. A* **57** (1998)
- [12] M.-O. Mewes, G. Ferrari, F. Schreck, A. Sinatra, and C. Salomon, *Phys. Rev. A* **61** (2000)

- 
- [13] A. G. Truscott, K. E. Strecker, W. I. McAlexander, G. Partridge, and R. Hulet, *Science* **291**, 2570 (2001)
- [14] F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).
- [15] Z. Hadzibabic, C.A. Stan, K. Dieckmann, S. Gupta, M.W. Zwierlein, A. Görlitz, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 160401 (2002)
- [16] G. Roati, F. Riboli, G. Modugno, M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 150403 (2002)
- [17] J. Goldwin, S. B. Papp, B. DeMarco and D. S. Jin, *Phys. Rev. A* **65**, 021402 (2002)
- [18] C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 586 (1997)
- [19] E. Timmermans and R. Côté, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3419 (1998)
- [20] W. Geist, L. You and T. A. B. Kennedy, *Phys. Rev. A* **59**, 1500 (1999)
- [21] T. Miyakawa, K. Oda, T. Suzuki, and H. Yabu, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **69** (2000)
- [22] M. Amoruso, A. Minguzzi, S. Stringari, M. P. Tosi and L. Vichi, *Eur. Phys. J. D* **4**, 261-265 (1998)
- [23] T. Tsurumi and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* **69**, 97 (2000)
- [24] Z. Akdeniz, P. Vignolo, A. Minguzzi and M. P. Tosi, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35**, L105 (2002)
- [25] Y. Cai and H. Wang, *Siam J. Appl. Math.* **73**, 2 (2013)
- [26] R. Roth, *Phys. Rev. A* **66**, 013614 (2002)
- [27] R. Roth, H. Feldmeier, *Phys. Rev. A*, **65**, 021603 (2002)
- [28] J. Santhanam, V. M. Kenkre, and V. V. Konotop, *Phys. Rev. A* **73** 013612 (2006)

- 
- [29] A. O. Caldeira, A. J. Leggett *Physica A* **121**, 587 (1983)
- [30] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Dover Publications, Inc. (2014)
- [31] W. Ketterle and N. J. van Druten, *Phys. Rev. A* **54**, 656 (1996)
- [32] V. Bagnato, D. E. Pritchard, and D. Kleppner, *Phys. Rev. A* **35**, 4354 (1987)
- [33] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Second Edition, Cambridge, (2008).
- [34] L.P. Pitaevskii, *Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961)
- [35] E.P. Gross, *J. Math. Phys.* **4**, 195 (1963)
- [36] S. T. Beliaev, *Soviet Phys. JETP* **7**, 289 (1958)
- [37] L. Salasnich, A. Parola, and L. Reatto, *Phys. Rev. A.* **65** 4, (2002)
- [38] A. V. Avdeenkov and K. G. Zlochchastiev, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44** 195303, (2011)
- [39] S. Röthel, (2006) *Ultracold Dilute Boson-Fermion Mixtures* (Tesis Doctoral, Departamento de Física de la Libre Universidad de Berlín, Alemania)
- [40] S. Röthel and A. Pelster, *Eur. Phys. J. B* **59**, 343 (2007)
- [41] H. T. C. Stoof, K. B. Gubbels, Dennis B. M. Dickerscheid, *Ultracold Quantum Fields*, Springer, Dordrecht (2009)
- [42] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, Fourth Edition, World Scientific, Singapore (2006)
- [43] B. De Witt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach, New York (1965)
- [44] R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **9**, 1686 (1974)
- [45] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of  $\phi^4$ -Theories*, World Scientific, Singapore (2001)

- 
- [46] A. S. Parkins and D. F. Walls, *Phys. Rep.* **303** (1998) 1.
- [47] L. P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, W. A. Benjamin, New York, (1962).
- [48] N. Nygaard and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **59** (1999) 2974.
- [49] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd English Edition, Revised, Elsevier Butterworth Heinemann, Oxford (1987)
- [50] A. L. Fetter and J. D. Walecka *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, Dover Publications, Inc. (2003)
- [51] A. Altland and B. Simons, *Condensed Matter Field Theory*, Cambridge University Press (2010)
- [52] G. Mussardo, *Statistical Field Theory: An Introduction to Exactly Solved Models in Statistical Physics*, Oxford University Press (2009)
- [53] P. DiFrancesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer-Verlag New-York, Inc. (1997)