



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

SUSCEPTIBILIDADES  
TERMODINÁMICAS  
DE  
UN GAS DE FERMI  
IDEAL Y RELATIVISTA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

OMAR PIÑA PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO JAVIER SEVILLA PÉREZ



ENERO DE 2013

## Hoja de datos del jurado

### 1. Datos del alumno

Piña

Pérez

Omar

56 67 00 50

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

304326323

### 2. Datos del tutor

Dr. Francisco Javier

Sevilla

Pérez

### 3. Datos del sinodal 1

Dr. José Ignacio

Jiménez

Mier y Terán

### 4. Datos del sinodal 2

Dr. Gerardo

Carmona

Ruiz

### 5. Datos del sinodal 3

Dra. Gabriela

Murguía

Romero

### 6. Datos del sinodal 4

Dr. Mauricio

Fortes

Besprosvani

### 7. Datos de la tesis

Susceptibilidades termodinámicas de un gas de Fermi ideal y relativista

95 p.

2013

## **DEDICATORIA**

A mis padres Sofía y José, que son los pilares de mi vida académica. Su amor y apoyo se ven reflejados en la culminación de ésta tesis que pone en alto los ideales que me han inculcado.

Siempre salir adelante desde los principios más humildes.

## AGRADECIMIENTOS

Hago un reconocimiento de manera general a toda mi familia, compañeros, profesores y amigos que contribuyeron en mi formación como físico y persona a lo largo de la carrera de física en la Facultad de Ciencias.

A mi asesor y amigo Francisco por haberme dado la oportunidad de trabajar como su estudiante en el servicio social y en la tesis, por sus incontables consejos y motivaciones en mi formación como físico y persona. A mis amigos físicos de la generación Alejandro, Ana, Arturo, Luis Carlos, Luis Javier, Mariana, Nahum, Ollin, Ricardo, Yunuen, con quienes encontré un gran lugar de respaldo bajo aquel árbol, en la carrera y en la vida. Agradezco también a Sebastián, Gibrán y el grupo de amigos que me apoyaron de incontables formas fuera de la vida académica, con sus observaciones y consejos tan objetivos en el pasado reciente de mi vida. Agradezco a todas las persona que se pararon en mi camino y funcionaron como una motivación Gustavo, Silvana, Juan, Axel, pues su presencia me forzó a ser mejor persona y reflejan la última etapa de este trabajo para mi titulación.

A todas aquellas personas que aquí no incluyo, sin dejar de ser importantes, les agradezco infinito.

Una mención especial por el apoyo económico otorgado por la Universidad Nacional Autónoma de México a través del proyecto de DGAPA: PAPPIT IN-117010, el cual me permitió desarrollar el mejor trabajo posible en la tesis que aquí se presenta.

# Índice general

0.1. Resumen . . . . .	4
<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. El gas ideal clásico . . . . .	7
<b>2. El gas ideal de Fermi no relativista</b>	<b>13</b>
2.1. Generalidades . . . . .	14
2.1.1. La densidad de estados . . . . .	21
2.1.2. El desarrollo de Sommerfeld . . . . .	22
2.2. La termodinámica del gas ideal de Fermi . . . . .	27
2.3. El potencial químico $\mu$ . . . . .	28
2.3.1. Aproximación a bajas temperaturas de $\mu$ . . . . .	29
2.4. El calor específico a volumen constante $C_V$ . . . . .	32
2.5. La compresibilidad isotérmica $K_T$ . . . . .	33
<b>3. El gas ideal de Fermi ultrarelativista</b>	<b>38</b>
3.1. La ecuación de número . . . . .	39
3.1.1. Aproximación a bajas temperaturas . . . . .	40
3.2. El calor específico a volumen constante $C_V$ . . . . .	43
3.3. La compresibilidad isotérmica $K_T$ . . . . .	44
3.4. La creación de pares partícula-antipartícula . . . . .	46
3.5. El calor específico con antipartículas . . . . .	51
3.6. La compresibilidad isotérmica con antipartículas . . . . .	54

3.7. La razón entre partículas y antipartículas como función de la temperatura . . . . .	57
<b>4. El gas ideal de Fermi relativista</b>	<b>59</b>
4.1. La ecuación de número . . . . .	59
4.1.1. Aproximación a bajas temperaturas . . . . .	61
4.2. El calor específico a volumen constante $C_V$ . . . . .	64
4.3. La compresibilidad isotérmica $K_T$ . . . . .	67
4.4. La creación de pares partícula-antipartícula . . . . .	69
4.5. El calor específico a volumen constante con antipartículas . . . . .	71
4.6. La compresibilidad isotérmica con antipartículas . . . . .	73
4.7. La razón entre partículas y antipartículas como función de la temperatura . . . . .	76
<b>5. Conclusiones</b>	<b>78</b>
<b>6. Apéndice</b>	<b>81</b>
6.1. Funciones elementales de Fermi-Dirac . . . . .	81
6.2. Cálculo de $K_{T=0}$ para GIF-NR . . . . .	83
6.3. Cálculo de $K_{T=0}$ para GIF-UR . . . . .	85
6.4. Cálculo de $K_{T=0}$ para GIF-R . . . . .	86
6.5. Cálculo de $\left(\mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right)$ en $C_V$ para GIF-R . . . . .	87
6.6. Análisis de $\sigma(\epsilon, \mu)$ y de $\left(\mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right)$ en el GIF-R-PAP . . . . .	88

# Índice de figuras

1.1. El potencial químico $\mu$ gas ideal clásico en tres dimensiones. . . . .	12
2.1. El potencial químico $\mu$ gas ideal de Fermi en tres dimensiones. . . . .	19
2.2. La derivada de la distribución de Fermi-Dirac. . . . .	23
2.3. El potencial químico $\mu$ no relativista. . . . .	30
2.4. El calor específico $C_V$ no relativista. . . . .	34
2.5. La compresibilidad isotérmica $K_T$ no relativista. . . . .	37
3.1. El potencial químico $\mu$ ultrarelativista. . . . .	41
3.2. El calor específico $C_V$ ultrarelativista. . . . .	45
3.3. La compresibilidad isotérmica $K_T$ ultrarelativista. . . . .	47
3.4. El potencial químico $\mu$ con antipartículas ultrarelativista. . . . .	49
3.5. El calor específico $C_V$ con antipartículas ultrarelativista. . . . .	53
3.6. La compresibilidad isotérmica $K_T$ con antipartículas ultrarelativista. . . . .	56
3.7. La razón entre partículas $N$ y antipartículas $\bar{N}$ del gas ultrarelativista. . . . .	58
4.1. El potencial químico $\mu$ relativista. . . . .	63
4.2. El calor específico $C_V$ relativista. . . . .	66
4.3. La compresibilidad isotérmica $K_T$ relativista. . . . .	68
4.4. El potencial químico $\mu$ con antipartículas relativista. . . . .	70
4.5. El calor específico $C_V$ con antipartículas relativista. . . . .	73
4.6. La compresibilidad isotérmica $K_T$ con antipartículas relativista. . . . .	75
4.7. La razón entre antipartículas $\bar{N}$ y partículas $N$ del gas relativista. . . . .	77

## 0.1. Resumen

Se realizó un trabajo de investigación bajo el marco de la física estadística, acerca de las susceptibilidades termodinámicas en un gas de Fermi ideal y relativista en dimensiones arbitrarias. La motivación fue extender el estudio al caso relativista del potencial químico  $\mu$  del gas ideal de Fermi, el cual presenta un comportamiento anómalo para dimensiones  $d < 2$ . La anomalía se ve reflejada de manera general en el comportamiento del calor específico a volumen constante  $C_V$  y la compresibilidad isotérmica  $K_T$ .

Para analizar este sistema se recurrió a la ecuación de número con la ayuda del gran potencial, donde se relaciona el número de partículas con el potencial químico  $\mu$ , el volumen del sistema  $V$  y la temperatura  $T$ , sin embargo, no es posible encontrar en el caso general una relación explícita de  $\mu = \mu(T, V, N)$  en términos de las demás variables del sistema. Por esta razón los resultados presentados se obtienen a través de la solución numérica a cada una de las expresiones que describen las diferentes propiedades termodinámicas. En particular se utilizó el programa “Mathematica”, que permitió evaluar varias de las relaciones que se utilizaron, particularmente las funciones de Fermi-Dirac  $f_\nu(z)$ , a través de la función especial Polilogaritmo  $\text{PolyLog}[\nu, z]$ . En el capítulo 3 se consideró el caso del gas ideal de Fermi ultrarelativista, que describe sistemas donde la masa en reposo  $mc^2$  es muy pequeña comparada con  $E_F$  la energía de Fermi. En los casos no relativista como en el ultrarelativista fue posible un tratamiento de forma general a través de la representación de la función de Fermi-Dirac, con lo que se encontró que las susceptibilidades  $C_V$  y  $K_T$  tienen un comportamiento similar, en ambos casos, como función de la temperatura.

La creación de pares de partícula-antipartícula es un efecto muy importante que se debe considerar en sistemas con una relación de dispersión relativista a altas energías. Estos sistemas cuánticos relativistas están descritos por la ecuación de Dirac a partir de la cual se obtienen soluciones positivas y negativas para los niveles de energía. Lo anterior se analiza con más detalle en la sección 3.4, en donde se considera la creación de las antipartículas y sus consecuencias en las susceptibilidades termodinámicas del gas ideal de Fermi ultrarelativista.



Por último se consideró la masa en reposo de las partículas de un sistema de fermiones en donde también es posible la creación de pares de partícula-antipartícula en un régimen de altas temperaturas. De esta manera fue posible hacer una descripción de las propiedades termodinámicas así como su dependencia con el valor de masa en reposo  $mc^2$  y la dimensión  $d$  del sistema. Se llegó a la conclusión de que el gas ideal de Fermi relativista es susceptible a los valores de la masa en reposo de los fermiones y a la dimensión de sistema, además de la temperatura. Se encontró también las condiciones necesarias para que la anomalía observada en el caso no relativista también fuera posible.

En este trabajo también se incluye la discusión acerca de la equivalencia entre los gases de Fermi y de Bose sólo para algunos casos determinados y las condiciones necesarias para que se esto sea posible en las susceptibilidades termodinámicas.

# Capítulo 1

## Introducción

El potencial químico  $\mu$ , en un sistema de muchas partículas indistinguibles, es una variable termodinámica con mucha relevancia puesto que aparece como un parámetro natural junto con la temperatura  $T$  y el volumen  $V$ . Estas variables definen el ensam-  
ble gran canónico el cual puede calcularse explícitamente tomando en cuenta la es-  
tadística de Fermi-Dirac y de Bose-Einstein, el gran potencial termodinámico está da-  
do por  $q(z, V, T) \equiv PV/\kappa_B T = (1/a) \sum_{\epsilon} \ln(1 + az \exp(-\beta\epsilon))$ , donde  $z = \exp(\beta\mu)$  es  
la fugacidad,  $\beta = (\kappa_B T)^{-1}$  con  $\kappa_B = 1.3806488 \times 10^{-23} \text{J/K}$  la constante de Boltzman  
Ref. [1] y  $a = +1$  para un gas de Fermi y  $a = -1$  para un gas de Bose, Ref. [2].

Para el análisis del gas ideal de fermiones, comenzamos por entender el significado  
de  $\mu$  para el caso del gas ideal clásico, porque genera una idea cualitativa de la  
física involucrada. Después, en el capítulo 2 se estudia el gas ideal de Fermi no  
relativista en dimensión arbitraria, para luego considerar los casos más generales en  
los capítulos 3 y 4 cuando se toman en cuenta la relación de dispersión relativista y  
finalmente la creación de pares de partícula-antipartícula, que se deben considerar a  
altas temperaturas, Ref. [3].

Cuando se considera el caso relativista se estudian los efectos de la masa en reposo  
en la densidad de estados Ref. [4] y por ende en las propiedades termodinámicas.  
Generalmente en la literatura los estudios que consideran los efectos relativistas lo  
hacen en el caso en que la masa en reposo es cero, es decir, en el límite ultrarelati-

vista, Ref. [5]. En astrofísica, es de interés académico el estudio de las propiedades termodinámicas y estadísticas de un gas ionizado como el sistema de  $e^+e^-\gamma$ , Ref. [6], porque puede ser analizado desde el marco teórico en el que se desarrolla esta tesis. También en una descripción simple, se han analizado a las estrellas enanas blancas en el límite ultrarelativista en el caso a  $T = 0$ , Ref. [7] y en dimensión arbitraria. Ciertos análisis teóricos de las funciones termodinámicas de un gas ideal de Fermi relativista han sido realizados en la región cuántica intermedia donde la fugacidad es  $z \simeq 1$ , Ref. [8], pero sin la inclusión de la creación de pares partícula-antipartícula la cual cambia el comportamiento de dichas funciones como se hará ver más adelante. Otros análisis teóricos respecto a  $\mu$  se centran en la “equivalencia” termodinámica que se ha encontrado para el gas de Fermi y Bose no relativistas en dos dimensiones, Ref. [9],[10].

En la siguiente sección se estudia el caso del gas ideal clásico como un preámbulo para el gas ideal de Fermi.

## 1.1. El gas ideal clásico

Partiendo de la representación de la energía interna  $U(S, V, N)$ , que depende de la entropía  $S$ , de  $V$  y de  $N$ , se obtiene la identidad termodinámica, Ref. [11], que simplemente expresa la conservación de energía y se le conoce como la primera ley de la termodinámica:

$$dU = TdS - pdV + \mu dN,$$

donde el potencial químico queda definido como:

$$\mu = \left( \frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V}, \quad (1.1)$$

que es el cambio de la energía interna  $U$  debido al cambio del número de partículas  $N$ , a entropía  $S$  y volumen  $V$  constantes.

A partir de la expresión (1.1) se puede dar un argumento que hace ver que el potencial químico del GIC es negativo. De manera breve, la entropía del sistema con  $N_0$

partículas, volumen  $V_0$  y energía  $U_0$  está dada por la siguiente expresión, Ref. [12]:

$$S_0 = N_0 \kappa_B \left\{ \frac{5}{2} + \ln \left[ \frac{V_0}{N_0} \left( \frac{2 U_0}{3 N_0} \frac{2m\pi}{\hbar^2} \right)^{3/2} \right] \right\}.$$

Al aumentar el número de partículas a  $N_0 + \Delta N$ , a entropía y volumen constantes y  $\Delta N \ll N_0$ , necesariamente la energía interna del sistema debe cambiar. Si denotamos con  $U_0 + \mu\Delta N$  el nuevo valor de la energía, se tiene que:

$$S_0 = (N_0 + \Delta N) \kappa_B \left\{ \frac{5}{2} + \ln \left[ \frac{V_0}{(N_0 + \Delta N)} \left( \frac{2 (U_0 + \mu\Delta N)}{3 (N_0 + \Delta N)} \frac{2m\pi}{\hbar^2} \right)^{3/2} \right] \right\}.$$

y de esta manera se encuentra, después de un proceso algebraico (ver Ref. [13]), que el potencial químico  $\mu$  debe ser negativo.

De este modo se puede concluir que al aumentar el número de partículas en el sistema a  $S$  y  $V$  constantes, su temperatura  $T_0 = (2/3)U_0/(\kappa_B N_0)$  disminuye a  $T = (2/3)(U_0 + \mu\Delta N)/[\kappa_B(N_0 + \Delta N)]$ , es decir, el sistema se enfría.

A continuación se presenta el análisis para el GIC en el marco teórico de la física estadística donde se discute el potencial químico  $\mu$ . Se utilizan las funciones de partición para describir como se distribuyen los microestados de las partículas y encontrar la ecuación fundamental o los potenciales termodinámicos de donde se obtienen las propiedades termodinámicas del sistema.

El problema a resolver es obtener la ecuación de estado que describa el comportamiento como función de la temperatura de  $\mu$  en el caso del GIC. Así se considera un sistema ideal de partículas clásicas distinguibles las cuales resultan como el límite del caso cuántico cuando la longitud de onda de De Broglie  $\lambda = (2\pi\hbar^2/m\kappa_B T)^{1/2}$ , es mucho menor que la distancia promedio  $l = (V/N)^{1/3}$  entre partículas. En la expresión para  $\lambda$ ,  $\hbar = h/2\pi$  con  $h = 6.62606957 \times 10^{-34}$ J. s, Ref. [1] es la constante de Planck y  $m$  la masa de las partículas. En este límite semi-clásico el espacio-fase de una partícula está cuantizado en elementos de volumen  $h^3$ , debido al principio de incertidumbre de Heisenberg.

Manteniendo fijo el volumen  $V$ , el número de partículas  $N$  y la temperatura  $T$ ,

la energía libre de Helmholtz  $F = -\kappa_B T \ln(Q_N)$ , es el logaritmo de la función de partición  $Q_N$  multiplicado por la temperatura.

En la aproximación semi-clásica la función de partición canónica esta dada por:

$$Q_N(V, T) = \int d^3r_1 \cdots d^3r_N \int d^3P_1 \cdots d^3P_N \frac{\exp(-\beta \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{P}))}{N! h^{3N}},$$

donde  $\beta = 1/\kappa_B T$ , la cantidad  $h^{3N}$  es el elemento de volumen de la celda mínima en el espacio fase y  $N!$  es el factor de corrección de Gibbs.

La función Hamiltoniana clásica  $\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{P})$  está dada por:

$$\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{P}) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\vec{P}_i^2}{2m_i} + \mathcal{U}(\vec{r}_i) \right],$$

con  $\mathcal{U}(\vec{r}_i)$  algún potencial externo que confina a las partículas en el espacio. Para un potencial de tipo caja impenetrable, es decir:

$$\mathcal{U}(\vec{r}_i) = \begin{cases} 0 & \text{dentro del volumen } V \\ \infty & \text{fuera del volumen } V, \end{cases}$$

se sigue que:

$$Q_N(V, T) = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \int d^3P_1 \cdots \int d^3P_N \exp \left[ \frac{-\beta}{2m} (\vec{P}_1^2 + \cdots + \vec{P}_N^2) \right],$$

donde se utilizó que el potencial es nulo dentro del volumen y las integrales sobre  $d^3r$  son las mismas, a decir:

$$V^N = \int d^3r_1 \exp(-\beta U(\vec{r}_1)) \cdots \int d^3r_N \exp(-\beta U(\vec{r}_N)).$$

Considerando que los límites de integración para cada una de las partículas es el

mismo, entonces la integral en  $Q_N$  puede calcularse como:

$$Q_N(V, T) = \frac{V^N}{N!h^{3N}} \left[ \int d^3P \exp\left(\frac{-\beta \vec{P}^2}{2m}\right) \right]^N,$$

al expresar el vector de momento en términos de sus componentes  $\vec{P}^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$ , se realiza el cambio de variable  $x^2 = \beta P_x^2/2m$  para identificar la integral Gaussiana:

$$Q_N(V, T) = \frac{V^N}{N!h^{3N}} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3N/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2)\right)^{3N},$$

entonces la función de partición resulta ser:

$$Q_N(V, T) = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2m\pi}{\beta h^2}\right)^{3N/2} = \frac{N^N}{N!} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^{3N}.$$

De manera general, el encontrar una relación explícita de la función de partición es difícil Ref. [14], cuando se consideran las situaciones realistas donde las interacciones no pueden ignorarse. Aunque recientemente el desarrollo de los métodos experimentales para manipular átomos, ha abierto la posibilidad de considerar sistemas casi ideales, Ref. [15].

La termodinámica del GIC se obtiene a partir del potencial termodinámico de Helmholtz dado por  $F(T, V, N) = -\kappa_B T \ln(Q_N)$ . El potencial termodinámico de Helmholtz es la transformada de Legendre de la energía interna  $U$ , por lo que al cambiar de representación la definición de  $\mu$  en la ecuación (1.1) cambia a:

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T, V},$$

introduciendo la función de partición, se sigue que:

$$\mu = -\kappa_B T \frac{\partial}{\partial N} \ln \left[ \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2m\pi}{\beta h^2}\right)^{3N/2} \right].$$

Al manipular la expresión anterior con las propiedades de los logaritmos e introduciendo la aproximación de Stirling para el logaritmo del factorial de un número grande,  $\ln N! \simeq N \ln N - N$ , se sigue que:

$$\mu = -\kappa_B T \frac{\partial}{\partial N} \left\{ \ln \left[ V \left( \frac{2m\pi}{\beta h^2} \right)^{3/2} \right]^N - N \ln N + N \right\},$$

operando la derivada parcial respecto a  $N$ , resulta el potencial químico  $\mu$  para un gas ideal clásico en tres dimensiones que es:

$$\mu = -\kappa_B T \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{2m\pi\kappa_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right], \quad (1.2)$$

o también:

$$\mu = -\kappa_B T \ln \left[ \frac{l^3}{\lambda^3} \right],$$

donde  $l$  es la distancia promedio entre partículas y  $\lambda$  la longitud de onda térmica de De Broglie, como se mencionó anteriormente.

Como escala de energía para  $\mu$  se considera la energía de Fermi  $E_F$ , que corresponde al nivel de energía más alto ocupado a  $T = 0$  para un gas ideal de Fermi. La temperatura de Fermi se introduce como  $T_F = E_F/\kappa_B$  y se discute en el siguiente capítulo. Al observar la Figura (1.1) donde se grafica la ecuación (1.2), se encuentra que el comportamiento de  $\mu$  es el de una función que decrece monótonamente de manera sub-lineal, a valores negativos cuando la temperatura  $T$  aumenta.

En la ecuación (1.2), el volumen  $V$  del sistema está fijo y también el número de partículas  $N$  por lo que al aumentar la temperatura  $T$  el argumento del logaritmo siempre es positivo, de esta manera el potencial químico  $\mu$  decrece cuando aumenta la temperatura.

Este comportamiento de  $\mu$  debe esperarse para un gas de bosones y un gas de fermiones a altas temperaturas, pues en el límite  $T \rightarrow \infty$  la degeneración cuántica desaparece cuando  $\lambda \ll l$  y ambos gases se comportan como el gas ideal clásico. A bajas temperaturas los efectos de indistinguibilidad son importantes y forman la

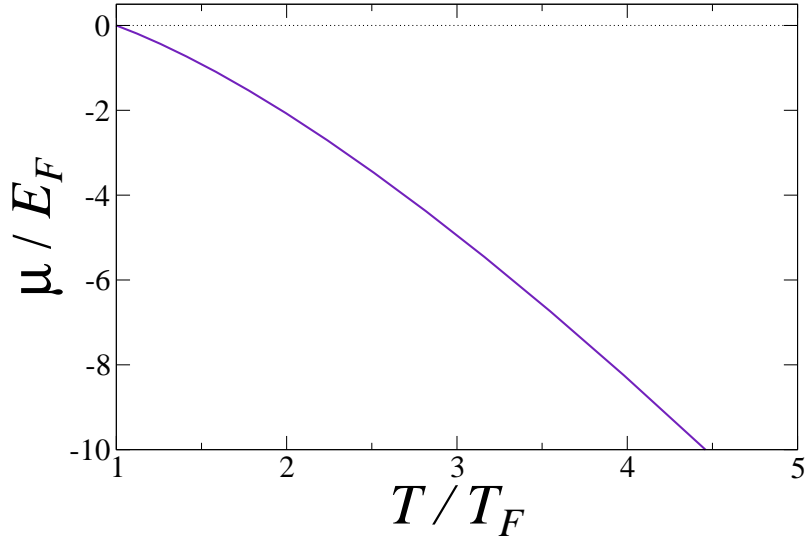


Figura 1.1: Se presenta el comportamiento del potencial químico  $\mu$  como función de la temperatura en unidades de la temperatura de Fermi  $T_F$ .

base de la tercera ley de la termodinámica.

Otras ecuaciones de estado para el GIC pueden ser derivadas a partir de la energía libre de Helmholtz  $F = -\kappa_B T \ln(Q_N)$ . La entropía se encuentra como  $S = -(\partial F / \partial T)_{V,N}$  y resulta ser la llamada ecuación de Sackur-Tetrode, Ref. [11]:

$$S = N\kappa_B \left\{ \frac{5}{2} + \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{2m\pi\kappa_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right] \right\}.$$

Por otro lado, la presión se calcula como  $P = -(\partial F / \partial V)_{T,N}$  y resulta ser  $P = N\kappa_B T / V$ . Con lo anterior se puede calcular las susceptibilidades termodinámicas para el gas ideal clásico como el calor específico  $C_V = (\partial U / \partial T)_V$  y la compresibilidad isotérmica  $K_T = -1/V(\partial V / \partial P)_T$ , que resultan ser  $C_V = 3N\kappa_B/2$  y  $K_T = 1/P$  respectivamente.



# Capítulo 2

## El gas ideal de Fermi no relativista

Se presenta el estudio de las propiedades termodinámicas de un gas ideal de Fermi no relativista (GIF-NR) donde no se considera el espín y dejando a un lado las interacciones de las partículas, en lo que se conoce como aproximación de partícula independiente. El GIF-NR considera la relación de dispersión que se obtiene de resolver la ecuación de Schrödinger para una partícula libre no relativista.

En el límite clásico, cuando  $T$  y  $N$  son muy grandes, el gas de Fermi y el gas de Bose deben comportarse clásicamente, es decir, para altas temperaturas  $\mu$  de GIF-NR debe comportarse como la ecuación (1.2). Sin embargo el comportamiento de  $\mu$  para Fermi y Bose a bajas temperaturas es diferente, Ref. [13], como se discute en este capítulo para el gas de Fermi.

Existe también la equivalencia entre los gases de Fermi y Bose no relativistas solo para dimensión igual a dos, donde los calores específicos son los mismos en la misma temperatura. Esta equivalencia se establece gracias a la formulación unificada de la termodinámica estadística de los gases ideales a través de la función Poli-logaritmo, Ref. [9].

La representación de las funciones de Fermi-Dirac a través del Poli-logaritmo, permite un tratamiento general para los sistemas de Fermi y de Bose debido a que las fugacidades, en el caso de 2 dimensiones, están relacionadas por una transformación de Euler:  $z_B = z_F/1 + z_F$ , donde  $z_B$  es la fugacidad del gas de Bose y  $z_F$  es la fugacidad del gas de Fermi. Con esta relación se ha demostrado que la energía interna del

gas de Bose  $U_B$ , difiere de la energía interna del gas de Fermi  $U_F$  por una constante que corresponde a la energía en el estado base del GIF-NR, Ref. [10].

Se muestra también el formalismo teórico, para extrapolar al caso de dimensión arbitraria y los comportamientos de las propiedades termodinámicas para diferentes dimensiones, lo que nos interesa para analizar el caso de bajas dimensiones debido a la anomalía que se ha reportado en  $\mu$  para  $d = 1$ , Ref. [17].

## 2.1. Generalidades

Para encontrar las expresiones que permiten conocer la termodinámica del GIF-NR, es necesario encontrar primero la relación de dispersión no relativista lo que nos permite determinar la densidad de estados del sistema. Con ello, es posible aplicar los resultados bien conocidos de la física estadística para determinar la ecuación de número y la energía interna promedio. Con la densidad de estados  $g(\epsilon)$  es posible encontrar la ecuación de estado que relaciona el número de partículas  $N$  con el potencial químico  $\mu$ , el volumen  $V$  y la temperatura  $T$ .

En este caso se tiene una diferencia importante respecto al gas ideal clásico, ahora se consideran  $N$  partículas indistinguibles cuyas funciones de onda obedecen la ecuación de Schrödinger y al principio de exclusión de Pauli. Los fermiones están contenidos en una caja cúbica cuyos lados son de longitud  $L$ , por lo que el volumen es  $V = L^3$  en el caso de tres dimensiones.

El operador Hamiltoniano de una partícula en dicha caja está dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{P}^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2,$$

al considerar la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo  $\hat{\mathcal{H}}\psi = \epsilon\psi$ , se introduce la función de onda que es  $\psi = A \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r})$ :

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} \psi = 0,$$

y entonces:

$$-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} = 0,$$

donde los valores propios del vector de onda  $k_x, k_y, k_z$ , se obtienen al considerar las condiciones a la frontera que hacen que la función de onda  $\psi$  se anule en la superficie de la caja.

Al cumplir con esa condición se obtienen los valores propios para el vector de onda que son,  $k_i = \pi n_i/L$ . El momento de la partícula está relacionado con el vector de onda a través de  $\vec{P} = \hbar\vec{k}$ . Entonces la relación de dispersión para la energía de la partícula no relativista queda como:

$$\epsilon = \frac{\vec{P}^2}{2m} = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m}, \quad (2.1)$$

donde la relación de dispersión depende del volumen  $\epsilon = \epsilon(V)$ , debido a la relación entre  $k_i$  y  $L$ . En el GIF-NR las partículas tienen acceso a diferentes niveles cuantizados de energía determinados por la relación (2.1) que a su vez están determinados por la cantidad entera positiva  $n_i$ . De esta forma, al especificar el estado cuántico se determina un punto específico en el espacio  $k$ .

Si el volumen  $V$  del sistema es muy grande entonces esos niveles son muy cercanos entre sí. Como consecuencia existe un gran número de niveles de energía en un intervalo razonable de  $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$ . Por esta razón cuando  $V \rightarrow \infty$ , entonces  $\epsilon$  se puede considerar como una variable continua.

Para describir las propiedades termodinámicas en este capítulo se recurre a los resultados bien conocidos de la literatura, Ref. [2], donde se usa el formalismo del ensamble gran canónico, debido a que el cálculo de la función de partición canónica es complicado como se muestra en Ref. [14].

El gran potencial termodinámico para el GIF-NR es  $q(z, V, T) \equiv PV/\kappa_B T = \sum_{\epsilon} \ln(1 + z \exp(-\beta\epsilon))$ , donde  $P$  es la presión,  $V$  el volumen,  $T$  es la temperatura,  $\kappa_B$  es la constante de Boltzmann y donde la cantidad  $z = \exp(\beta\mu)$  es la fugacidad que se entiende como la “volatilidad” del sistema o como la tendencia de las partículas de “huir”, Ref. [2].

A partir del gran potencial  $q(z, V, T)$  se obtiene la ecuación de número que relaciona  $\mu$  con  $N$ :

$$N \equiv z \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right)_{V,T} = \int_0^{\infty} d\epsilon \, g(\epsilon) n_{\epsilon}, \quad (2.2)$$

donde  $n_{\epsilon}$  es la distribución de Fermi-Dirac y se exhibe la dependencia de la densidad de estados  $g(\epsilon)$  en la ecuación de número.

Las propiedades estadísticas de un sistema de  $N$  fermiones están directamente asociados a la distribución de Fermi-Dirac representada por  $n_{\epsilon} = (1 + \exp[\beta(\epsilon - \mu)])^{-1}$ , que es la cantidad promedio de partículas que ocupan el nivel de energía  $\epsilon$ .

Es necesario conocer la densidad de estados  $g(\epsilon)$  para determinar las propiedades termodinámicas del GIF-NR, para ello se utiliza el espacio  $k$ , que se relaciona con la energía de las partículas a través de la relación de dispersión (2.1). Cada estado entre los intervalos de  $[k_i, k_i + dk_i]$  está directamente relacionado con el cambio en los valores propios de  $n_i$ . A la cantidad  $g(k_x, k_y, k_z) \Delta n_x, \Delta n_y, \Delta n_z$ , se le denomina la densidad de estados translacionales, Ref. [18]. Al determinar condiciones a la frontera periódicas para una caja cúbica, llamada condición de Born-Von Karman:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \psi(x + L, y, z) \\ \psi(x, y, z) &= \psi(x, y + L, z) \\ \psi(x, y, z) &= \psi(x, y, z + L), \end{aligned}$$

y considerando que en el límite termodinámico el volumen de la caja es muy grande, entonces los valores para el vector de onda cambian de manera infinitesimal por:

$$dk_x = \frac{2\pi}{L} \Delta n_x, \quad dk_y = \frac{2\pi}{L} \Delta n_y, \quad dk_z = \frac{2\pi}{L} \Delta n_z,$$

por lo que la densidad de estados en el espacio  $k$  queda como:

$$g(k_x, k_y, k_z) dk_x dk_y dk_z = \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 dk_x dk_y dk_z.$$

Para analizar las propiedades de un gas, es apropiado extender el uso de la densidad

de estados a los estados caracterizados por la energía  $\epsilon_{k_x, k_y, k_z}$ . Esto simplifica los cálculos dado que  $\epsilon_{k_x, k_y, k_z}$  depende sólo de la magnitud de  $(k_x, k_y, k_z)$  y no de su dirección.

La densidad de estados de energía se obtiene integrando sobre el ángulo sólido de todos los vectores de onda que tienen energía  $\epsilon$  en una diferencial de volumen dada por el cascarón esférico de radio  $k$  y ancho  $dk$ . La esfera de radio  $(2mE_F/\hbar^2)^{1/2}$  define el mar de Fermi en el espacio  $k$ , que contiene a todos los estados ocupados a  $T = 0$ . Si  $\Omega$  es el ángulo sólido,  $S$  es la superficie y  $|k|$  es el radio en el caso general, entonces:

$$\Omega = \frac{S}{|k|^2} \Rightarrow dS = |k|^2 d\Omega,$$

si en general el cambio en el elemento de superficie se calcula como  $dS = d^2k$ , entonces la expresión se modifica como sigue:

$$g(k_x, k_y, k_z) dk_x dk_y dk_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 |k|^2 dk d\Omega,$$

considerando que  $L^3$  es el volumen, entonces al integrar respecto al ángulo sólido nos queda:

$$g(k) dk = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi |k|^2 dk.$$

En esta deducción el factor  $4\pi |k|^2 dk$ , representa el volumen de un cascarón esférico de radio  $|k|$  y ancho  $dk$ . La densidad de estados  $g(k)$  siempre depende del volumen. Significa que no depende de la forma de la caja dado que el tamaño del elemento mínimo de volumen es muy pequeño cuando el tamaño del sistema es muy grande. Dada la relación de dispersión (2.1) se introduce en la densidad de estados en el espacio  $k$  y se obtiene:

$$g(\epsilon) d\epsilon = \frac{V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon, \quad (2.3)$$

que es la densidad de estados para el caso del gas ideal de Fermi en tres dimensiones. Al introducir la cantidad anterior en la ecuación de número (2.2) se encuentra una

expresión que es una relación trascendental para  $\mu$  por lo que no es posible expresar a  $\mu$  de forma explícita como función de  $N$ ,  $V$  y  $T$ , en contraste con el caso del gas clásico. En su lugar se obtiene una expresión que se puede resolver numéricamente para  $\mu$  al mantener fijo el volumen  $V$  y el número de partículas  $N$ , a decir:

$$N = \frac{V}{(2\pi)^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{1 + z^{-1} \exp(\beta\epsilon)}. \quad (2.4)$$

En el caso a  $T = 0$ ,  $\mu$  se puede resolver analíticamente como función de  $V$  porque a esa temperatura la distribución de Fermi-Dirac es constante igual a uno para energías menores que la energía de Fermi. Como en el sistema se consideran fermiones, cada nivel de energía, desde el estado base se ocupa con sólo una partícula por el principio de exclusión de Pauli. De esta forma el nivel más alto corresponde a  $E_F$ , la energía de Fermi.

La energía de Fermi y la temperatura de Fermi son respectivamente:

$$E_F = [6\pi^2 n]^{2/3} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right), \quad T_F = \frac{E_F}{\kappa_B},$$

donde  $n = N/V$  es la densidad de partículas en el sistema, por lo que  $E_F$  es proporcional a  $n^{2/3}$ , en tres dimensiones.

La ecuación (2.4) depende de varias cantidades, por esta razón, para conocer el comportamiento de  $\mu$  se hace adimensional al considerar los cocientes  $\epsilon/E_F$  y  $T/T_F$ . Por otro lado se observa que el argumento de la exponencial es adimensional con el siguiente análisis:

$$\exp[\beta(\epsilon - \mu)] = z^{-1} \cdot \exp\left(\frac{\epsilon \cdot E_F}{\kappa_B T E_F}\right) = z^{-1} \cdot \exp\left(\frac{\epsilon \cdot T_F}{T \cdot E_F}\right).$$

Realizando el cambio de variable  $x = (\epsilon T_F / T E_F)$ , es posible mostrar una represen-

tación en las integrales de Fermi-Dirac, Ref. [2]:

$$1 = \frac{3}{2} \left( \frac{T}{T_F} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{1/2}}{1 + z^{-1} \exp(x)},$$

donde el cálculo numérico de la ecuación anterior para encontrar el comportamiento de  $\mu$ , y que se presenta en la Figura (2.1), se realiza al encontrar la raíz de  $z$  en la integral cuando se varía la temperatura.

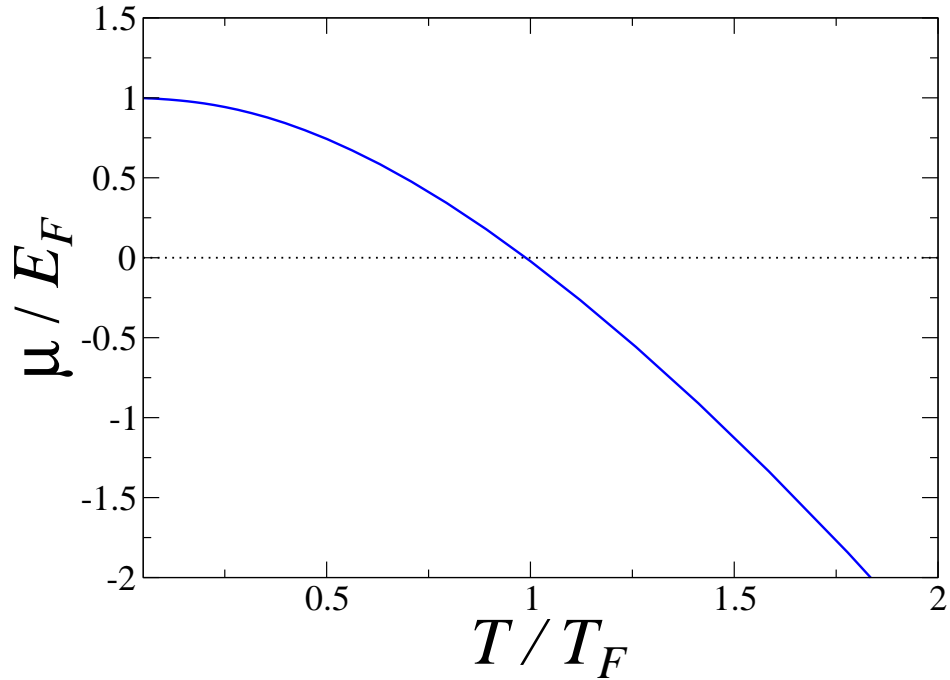


Figura 2.1: Se presenta el comportamiento del potencial químico  $\mu$  para el GIF-NR en tres dimensiones, que se hizo adimensional con el valor de  $E_F$ , como función de la temperatura  $T$  en unidades de la temperatura de Fermi. La temperatura en la que  $\mu = 0$  está dada por  $T = [(4/3)\sqrt{\pi}f_{3/2}(1)]^{2/3}T_F = [(4/3)\sqrt{\pi}(1 - 1/\sqrt{2})\zeta(1)]^{2/3}T_F = 0.98 T_F$ .

El análisis futuro en este tipo de integrales se realiza a través de las funciones Poli-

logaritmo conocidas como  $Li_m(z)$  o como  $f_m(z) = -Li_m(-z)$  que es la función de Fermi-Dirac de  $z$  de orden  $m$ , como se utilizan en Ref. [9]. La definición de  $f_m(z)$  es:

$$f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty dx \frac{x^{m-1}}{1 + z^{-1} \exp(x)},$$

las relaciones de recurrencia y otras propiedades de dichas funciones se analizan de manera general en el Apéndice (6.1). La ecuación adimensional se modifica como sigue:

$$1 = \frac{3}{2} \left( \frac{T}{T_F} \right)^{3/2} \Gamma(3/2) f_{3/2}(z).$$

En la Figura 2.1 se observa el comportamiento de  $\mu$  para el GIF-NR, donde a altas temperaturas y en el límite termodinámico se comporta como el gas ideal clásico. Esto se puede demostrar a partir de la representación de la función de Fermi-Dirac, cuando  $T \rightarrow \infty$  entonces  $f_m(z) \simeq z$ , por lo que:

$$1 = \frac{3\pi^{1/2}}{4} \left( \frac{T}{T_F} \right)^{3/2} \exp(\beta\mu),$$

despejando a  $\mu$ :

$$\mu = \kappa_B T \ln \left[ \frac{4}{3\pi^{1/2}} \left( \frac{T_F}{T} \right)^{3/2} \right],$$

y al invertir el argumento de la función logaritmo e introduciendo el valor de la energía de Fermi se obtiene:

$$\mu = -\kappa_B T \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{2m\pi\kappa_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right],$$

con lo que se demuestra el mismo comportamiento que en la ecuación (1.2) que corresponde al GIC en el régimen de altas temperaturas.

Cuando  $T = 0$  todos los niveles de energía están ocupados por los fermiones hasta el nivel más alto que es por definición  $E_F$ . Cuando  $T$  aumenta, la energía interna



promedio también se incrementa y algunos de los fermiones comienzan a ocupar estados excitados cercanos a  $E_F$ . La entropía  $S$  del sistema también se incrementa debido a que un número mayor de microestados se vuelven accesibles.

Para satisfacer la ecuación (1.1), la entropía  $S$  no debe incrementar cuando una nueva partícula es añadida, Ref. [13], por lo que la nueva partícula debe ocupar alguno de los niveles cercanos a  $E_F$  que son los primeros que se desocupan. Por esta razón a bajas temperaturas el cambio en la energía interna del GIF-NR es del orden de  $\mu$  pero más pequeña que  $E_F$ , cuando la temperatura sigue aumentando  $\mu$  es cada vez más decreciente hasta comportarse como el GIC en el régimen de altas temperaturas.

### 2.1.1. La densidad de estados

El análisis subsecuente de GIF-NR depende en gran medida de la densidad de estados, por ello nos interesa tomar el caso más general para extrapolar a dimensión arbitraria. Si se considera un sistema de  $N$  partículas libres, de masa  $m$ , confinadas en una hipercaja de lado  $L$ , en dimensión arbitraria  $d$ , entonces se tienen funciones propias tales que:

$$\psi_k(x) = \left(\frac{1}{L}\right)^d \prod_{i=1}^d \exp(\vec{k}_i \cdot \vec{x}_i),$$

donde  $\vec{x}$ ,  $\vec{k}$  son vectores y el índice  $i$  etiqueta cada dimensión en el sistema. Con las condiciones a la frontera periódicas de la hipercaja, se obtiene la densidad de estados  $g(k)$ , para alguna dimensión arbitraria de manera análoga que en el caso de tres dimensiones:

$$g(k_x, k_y, \dots, k_d) dk_x dk_y \dots dk_d = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d k^{d-1} dk d\Omega_d,$$

donde  $d\Omega_d$  corresponde al elemento de ángulo sólido de la hipercaja y es análogo al caso de tres dimensiones que se discutió en la sección anterior. La integral del elemento de ángulo sólido  $d\Omega_d$ , es bien conocida en la literatura Ref. [2] y con ello se

obtiene  $g(k)$  la densidad de estados en el espacio  $k$ , como se muestra:

$$g(k)dk = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} k^{d-1}dk \quad (2.5)$$

y al introducir la relación de dispersión (2.1) se obtiene  $g(\epsilon)$ , la densidad de estados energéticos correspondiente:

$$g(\epsilon)d\epsilon = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{d/2} \epsilon^{d/2-1}d\epsilon. \quad (2.6)$$

El cálculo de  $g(\epsilon)$  para cada sistema es muy importante para encontrar las susceptibilidades termodinámicas. La información que se obtiene de  $g(\epsilon)$  adquiere mayor relevancia si se usa en la aproximación de Sommerfeld que se puede utilizar para describir muchos sistemas físicos en donde la temperatura del sistema es mucho menor que la temperatura de Fermi,  $T \ll T_F$ . Por lo que esta aproximación resulta ser válida en la mayoría de los sistemas fermiónicos como el caso de los metales, Ref. [16].

### 2.1.2. El desarrollo de Sommerfeld

Utilizando el formalismo de la física estadística, Ref. [2], se obtienen las expresiones para el cálculo de la energía interna y del número de partículas:

$$U \equiv - \left( \frac{\partial q(z, V, T)}{\partial \beta} \right)_{z, V} = \int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon g(\epsilon) n_{\epsilon}, \quad (2.7)$$

y

$$N \equiv z \left( \frac{\partial q(z, V, T)}{\partial z} \right)_{V, T} = \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) n_{\epsilon}, \quad (2.8)$$

respectivamente. Ambas expresiones dependen de la densidad de estados y de la distribución de Fermi-Dirac. En general resultan expresiones que no pueden resolverse de manera analítica y se opta por un análisis numérico. Sin embargo, la aproximación de Sommerfeld permite obtener relaciones explícitas para el cálculo de  $U$  y  $N$  a

temperaturas menores que la temperatura de Fermi, Ref. [16] y permite obtener una forma explícita para  $\mu$  como función de  $T$ .

La aproximación de Sommerfeld considera que si la densidad de estados no varía demasiado rápido en un rango de energías del orden de  $\kappa_B T$  alrededor de  $\mu$ , entonces la dependencia en  $T$  de la ecuación de número debería estar bien aproximada al reemplazar  $g(\epsilon)$  por los primeros términos de su expansión en series de Taylor alrededor de  $\epsilon = \mu$ . Sin embargo, el comportamiento de  $n_\epsilon$  no considera una región significativa de  $g(\epsilon)$  cuando varía la temperatura. Sommerfeld se dió cuenta que la derivada que  $\partial n_\epsilon / \partial \epsilon$ , representa con mayor claridad la región de interés alrededor de  $\epsilon = \mu$ .

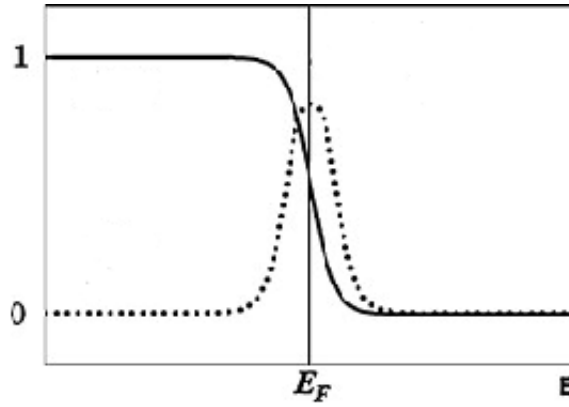


Figura 2.2: Se presenta en línea sólida la distribución de Fermi-Dirac y en línea punteado la derivada de la distribución de Fermi-Dirac respecto a  $\epsilon$ .

Por ello se define una función que permita aprovechar el comportamiento de  $\partial n_\epsilon / \partial \epsilon$  cuando se integre por partes la ecuación de número. Se define  $g(\epsilon) = \partial h(\epsilon) / \partial \epsilon$ , de modo que:

$$h(\epsilon) = \int_0^\epsilon g(\epsilon') d\epsilon',$$

recordando que la interpretación de  $g(\epsilon') d\epsilon'$  es el número de microestados por unidad de energía, entonces podemos interpretar la integral como el número total de microestados en el intervalo de cero a  $\epsilon$ .

Al integrar por partes la ecuación de número e identificando la nueva función  $h(\epsilon)$ :

$$N = \int_0^{\infty} d\epsilon \ g(\epsilon)n_{\epsilon} = n_{\epsilon}h(\epsilon) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} d\epsilon \ h(\epsilon) \frac{\partial n_{\epsilon}}{\partial \epsilon},$$

donde el primer término de la expresión anterior es nulo debido al comportamiento de la distribución de Fermi-Dirac en los límites de integración. Cuando  $\epsilon = 0$ ,  $h(\epsilon) = 0$  y en infinito  $n_{\epsilon} = 0$ , entonces:

$$N = \int_0^{\infty} d\epsilon \ h(\epsilon) \left( -\frac{\partial n_{\epsilon}}{\partial \epsilon} \right).$$

Al expandir en series de Taylor la nueva función  $h(\epsilon)$  alrededor de  $\epsilon = \mu$  resulta:

$$h(\epsilon) = h(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d^n}{d\epsilon^n} h(\epsilon) \right]_{\epsilon=\mu} \frac{(\epsilon - \mu)^n}{n!},$$

y sustituyendo en la integral:

$$N = \int_0^{\infty} d\epsilon \ \left( h(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d^n}{d\epsilon^n} h(\epsilon) \right]_{\epsilon=\mu} \frac{(\epsilon - \mu)^n}{n!} \right) \left( -\frac{\partial n_{\epsilon}}{\partial \epsilon} \right).$$

La derivada de la distribución de Fermi-Dirac juega un papel importante en esta expresión, pues  $\partial n_{\epsilon}/\partial \epsilon$  es una función par de  $(\epsilon - \mu)$  y solo términos pares de  $h(\epsilon)$  contribuyen a la relación. Además, sólo es diferente de cero en un intervalo alrededor de  $\mu$  porque se comporta como una función muy “picuda” aldedor de  $\epsilon = \mu$ , como se muestra en la Figura (2.2). Cuando la energía cambia en un orden de magnitud  $\kappa_B T$ , la distribución de Fermi-Dirac comienza a modificarse del caso  $T = 0$ .

Tomando sólo las potencias pares del desarrollo en serie se sigue que:

$$N = \int_0^{\infty} d\epsilon \ h(\mu) \left( -\frac{\partial n_{\epsilon}}{\partial \epsilon} \right) + \int_0^{\infty} d\epsilon \ \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d^{2n}}{d\epsilon^{2n}} h(\epsilon) \right]_{\epsilon=\mu} \frac{(\epsilon - \mu)^{2n}}{(2n)!} \right) \left( -\frac{\partial n_{\epsilon}}{\partial \epsilon} \right),$$

donde en el primer término, la función  $h(\mu)$  no depende de  $\epsilon$ , y la integral de la derivada de la función de Fermi es igual a uno.

Si la suma sobre  $n$  es homogénea sale de la integral y re-expresando  $h(\epsilon)$  en términos de  $g(\epsilon)$  se obtiene el desarrollo de Sommerfeld:

$$N = \int_0^{\mu} d\epsilon g(\epsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\epsilon \left( \left[ \frac{d^{2n-1}}{d\epsilon^{2n-1}} g(\epsilon) \right]_{\epsilon=\mu} \frac{(\epsilon - \mu)^{2n}}{(2n)!} \right) \left( -\frac{\partial n_{\epsilon}}{\partial \epsilon} \right). \quad (2.9)$$

Para utilizar la información del desarrollo anterior se realiza el cambio de variable  $x = (\epsilon - \mu)/\kappa_B T$ :

$$N = \int_0^{\mu} d\epsilon g(\epsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\kappa_B T)^{2n} \left[ \frac{d^{2n-1}}{d\epsilon^{2n-1}} g(\epsilon) \right]_{\epsilon=\mu},$$

donde los coeficientes de la suma son:

$$a_n = - \int_0^{\infty} dx \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{d}{dx} \frac{1}{1 + \exp(x)},$$

que pueden ser expresados en términos de la función zeta de Riemann, Ref. [16].

En general los términos de orden superior no contribuyen a las propiedades termodinámicas de interés en el régimen de bajas temperaturas. Por esta razón sólo se considera el primer término de este desarrollo y por lo tanto:

$$N = \int_0^{\mu} d\epsilon g(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6} (\kappa_B T)^2 g'(\mu) + \mathcal{O}(T^4),$$

expresión que podemos resolver para  $\mu$  como función de  $T$ . El primer término puede evaluarse notando que a  $T = 0$  el valor del potencial químico corresponde al valor de la energía de Fermi,  $\mu = E_F$ , Ref. [13]. El sistema de  $N$  fermiones se encuentra en su estado base con todos los niveles de energía ocupados y la energía necesaria para poder ocupar un estado excitado inmediato corresponde a la energía de Fermi.

Si la temperatura es pequeña pero no cero, entonces la diferencia entre  $g(\mu)$  y  $g(E_F)$  es del orden de  $T^2$ . Se debe escribir esta aproximación de Taylor a segundo orden  $g(\epsilon) + g'(\epsilon)(\mu - E_F)$ , alrededor de  $E_F$  y al introducirlo en la integral:

$$\int_0^{\mu} d\epsilon g(\epsilon) = \int_0^{E_F} d\epsilon g(\epsilon) + (\mu - E_F)g(E_F),$$

se sigue que:

$$N = \int_0^{E_F} d\epsilon g(\epsilon) + (\mu - E_F)g(E_F) + \frac{\pi^2}{6}(\kappa_B T)^2 g'(E_F) + \mathcal{O}(T^4).$$

Dado que tanto el volumen del sistema como el número de partículas son constantes, la densidad del sistema no cambia. La integral representa el valor de  $N$  en el estado base y la expresión anterior resulta:

$$0 = (\mu - E_F)g(E_F) + \frac{\pi^2}{6}(\kappa_B T)^2 g'(E_F)$$

Al despejar  $\mu$  se obtiene una expresión que depende del comportamiento de la densidad de estados:

$$\mu = E_F - \frac{\pi^2}{6}(\kappa_B T)^2 \left( \frac{g'(\epsilon)}{g(\epsilon)} \right) \Big|_{\epsilon=E_F}, \quad (2.10)$$

donde presenta explícitamente una relación para  $\mu$  como función de la temperatura, y que tan alejados son sus valores de  $E_F$ .

Otro resultado que se obtiene del desarrollo de Sommerfeld es una expresión para la energía interna a bajas temperaturas, Ref. [16]:

$$U = U^0 + \frac{\pi^2}{6}(\kappa_B T)^2 g(\epsilon)|_{\epsilon=E_F}, \quad (2.11)$$

donde  $U^0$  corresponde a la energía en el estado base del sistema de  $N$  fermiones y está dado por  $U^0 = (2m/\hbar^2)^{3/2} 2V E_F^{5/2} / 5(2\pi)^2$ .

## 2.2. La termodinámica del gas ideal de Fermi

En termodinámica, los estados de equilibrio están caracterizados por un máximo de la entropía o por un mínimo de los diferentes potenciales termodinámicos. Debido a esto, se pueden derivar algunas condiciones de estabilidad a partir de las segundas derivadas de los potenciales termodinámicos, los cuales son conocidos como susceptibilidades termodinámicas y que pueden medirse experimentalmente.

La compresibilidad isotérmica  $K_T$  es la razón de cambio, por unidad de volumen, del volumen respecto a la presión. Lo que significa que en equilibrio, un pequeño cambio espontáneo del volumen ( $\partial V < 0$ ), tiene como efecto un cambio en la presión ( $\partial P > 0$ ). De esta forma el sistema regresa por sí mismo al estado de equilibrio, de manera que  $K_T \geq 0$ :

$$K_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (2.12)$$

De forma similar el calor específico  $C_V$  es la razón con la que cambia la energía interna  $U$  del sistema, respecto a la temperatura  $T$ . Un incremento espontáneo de la temperatura ( $\partial T > 0$ ) está asociado a un incremento en la energía ( $\partial U > 0$ ), de manera que  $C_V \geq 0$ :

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (2.13)$$

Estas dos condiciones son requerimientos especiales que se siguen del principio de Braun-Le Chatelier: “Si un sistema está en equilibrio estable, entonces todos los cambios espontáneos de los parámetros deben involucrar procesos que lleven al sistema de vuelta al equilibrio, es decir, que realicen un proceso en contra de dichos cambios”, Ref. [12].

A continuación se presenta un análisis para encontrar el comportamiento de estas propiedades termodinámicas del GIF-NR de manera general en dimensión arbitraria. Con esto se pretende entender los efectos de la dimensionalidad del sistema en  $\mu$ ,  $C_V$  y  $K_T$ .

### 2.3. El potencial químico $\mu$

El cálculo de  $\mu$  en el caso GIF-NR para dimensión arbitraria  $d$ , se realiza a partir de la ecuación de número que se introdujo en la sección (2.1). Esta ecuación relaciona la densidad de estados y el número promedio de partículas que se encuentren en un nivel de energía determinado.

$$N = \lambda_{NR} \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon^{d/2-1}}{1 + z^{-1} \exp(\beta\epsilon)}, \quad (2.14)$$

donde la constante no relativista  $\lambda_{NR}$  que se muestra,

$$\lambda_{NR} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{d/2},$$

es diferente para cada dimensión del sistema. Si se considera el caso de la temperatura a  $T = 0$ , donde la distribución de Fermi-Dirac es una constante igual a uno para energías menores que la energía de Fermi, entonces se puede encontrar la energía de Fermi en términos de la constante no relativista. La energía de Fermi es  $E_F = (dN/2\lambda_{NR})^{2/d}$ .

La forma adimensional de la relación anterior se encuentra al tomar el cociente de  $\epsilon$  por la energía de Fermi, de esta forma se obtiene la siguiente representación en la integrales de Fermi-Dirac:

$$1 = \frac{d}{2} \tau^{d/2} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{d/2-1}}{1 + z^{-1} \exp(x)}, \quad (2.15)$$

donde  $\tau = T/T_F$ . El cálculo numérico de  $\mu$  a partir de la relación anterior se muestra en la Figura (2.3).

Al expresar la ecuación (2.14) en términos de la función de Fermi-Dirac  $f_\nu(z)$ , cuya definición se introduce en el Apéndice (6.1), se obtiene:

$$N = \lambda_{NR} \Gamma(d/2) (\kappa_B T)^{d/2} f_{d/2}(z), \quad (2.16)$$



donde aparece la dependencia con la temperatura  $T$  para una cantidad fija de  $N$  y  $V$ . Si se consideran altas temperaturas entonces  $f_\nu(z) \simeq z$ , por lo que la expresión (2.16) se aproxima como:

$$N = \lambda_{NR} \Gamma(d/2) (\kappa_B T)^{d/2} \exp(\beta\mu),$$

despejando a  $\mu$ :

$$\mu = \kappa_B T \ln \left[ \frac{N}{\lambda_{NR} \Gamma(d/2) (\kappa_B T)^{d/2}} \right],$$

y al invertir el argumento del logaritmo e introduciendo el valor de la constante no relativista  $\lambda_{NR}$  se obtiene:

$$\mu = -\kappa_B T \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{2m\pi\kappa_B T}{h^2} \right)^{d/2} \right]$$

que es la expresión para  $\mu$  en el régimen de altas temperaturas, en particular se encuentra que para el caso  $d = 3$  es la misma expresión que la ecuación (1.2), coincidiendo con el comportamiento del GIC.

### 2.3.1. Aproximación a bajas temperaturas de $\mu$

Para encontrar  $\mu$  como función de  $T$  en el régimen de bajas temperaturas, se utiliza el resultado obtenido en el desarrollo de Sommerfeld, donde la cantidad de interés es el cociente:

$$\frac{g'(\epsilon)}{g(\epsilon)} = \frac{(d/2 - 1)\epsilon^{d/2-2}}{\epsilon^{d/2-1}} = \frac{(d/2 - 1)}{\epsilon},$$

sustituyendo esta cantidad en la ecuación (2.10) se encuentra que:

$$\mu = E_F - \frac{\pi^2}{6} (\kappa_B T)^2 \frac{(d/2 - 1)}{E_F},$$

y de manera adimensional al dividir por la energía de Fermi:

$$\frac{\mu}{E_F} = 1 - \frac{\pi^2}{12} (d - 2) \left( \frac{T}{T_F} \right)^2.$$

El comportamiento de  $\mu$  en el régimen de bajas temperaturas no puede ser descrito para el caso de  $d = 2$  porque la densidad de estados es constante y la derivada de  $g(\epsilon)$  en el desarrollo de Sommerfeld sería cero. Por otro lado, cuando  $d > 2$  se observa que  $\mu$  decrece monótonamente como función de  $T$  a valores negativos. En el desarrollo de Sommerfeld se encuentra que para valores  $d < 2$ ,  $\mu$  se comporta como una función creciente cuando  $T$  aumenta, ver Figura (2.3).

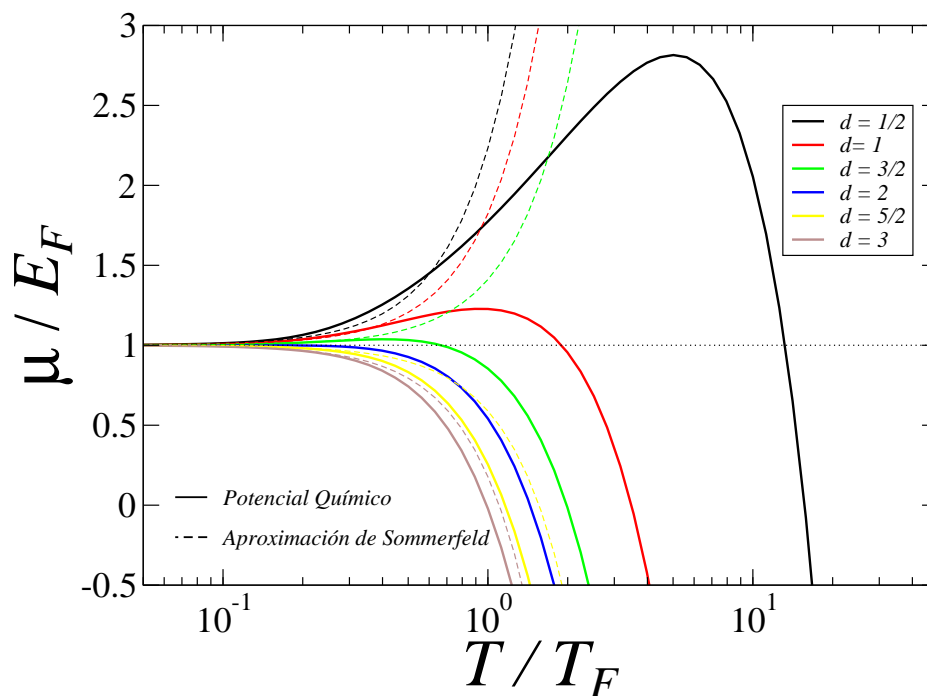


Figura 2.3: Gráfica del potencial químico  $\mu$  para el GIF-NR como función de la temperatura en unidades de la temperatura de Fermi  $T_F$  para diferentes dimensiones, representado por las líneas sólidas. Se presenta además la aproximación de Sommerfeld, representado por las líneas punteadas.

La importancia de la aproximación de Sommerfeld es que predice el comportamiento anómalo de  $\mu$  en una región para valores de  $T$  donde  $\mu > 0$  como se reporta en Ref. [17].

**Solución en dimension igual a dos.** En el caso particular de dos dimensiones es posible encontrar  $\mu$  de manera explícita, debido que la densidad de estados es una constante  $g(\epsilon) = mL^2/2\pi\hbar^2$ , se puede realizar la integral en la ecuación de número. El análisis con la aproximación de Sommerfeld no es posible, pues en este caso la derivada de  $g(\epsilon)$  es cero.

La ecuación de número adimensional en dos dimensiones es:

$$1 = \tau \int_0^{\infty} dx \frac{1}{1 + z^{-1} \exp(x)},$$

donde  $\tau = T/T_F$ . Al multiplicar por la identidad apropiada se transforma en una integral completa

$$1 = \tau \int_0^{\infty} dx \frac{z \exp(-x)}{z \exp(-x) + 1} = \tau \ln(1 + z).$$

De esta manera  $\mu$  como función de  $T$  queda como sigue:

$$\exp(1/\tau) = 1 + z,$$

$$\mu = \kappa_B T \ln[\exp(1/\tau) - 1],$$

y entonces:

$$\frac{\mu}{E_F} = 1 + \frac{T}{T_F} \ln \left[ 1 - \exp \left( \frac{-T_F}{T} \right) \right],$$

lo que muestra que en este caso se puede encontrar  $\mu$  de forma explícita como función de  $T$ .

## 2.4. El calor específico a volumen constante $C_V$

Para calcular el calor específico se necesita conocer la energía  $U$  del sistema que está dada por la definición que proviene del gran potencial en la ecuación (2.7):

$$U = \lambda_{NR} \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon^{d/2}}{1 + z^{-1} \exp(\beta\epsilon)}. \quad (2.17)$$

Expresando la integral en la representación de la función de Fermi-Dirac  $f_\nu(z)$ , se obtiene:

$$U = \lambda_{NR} \Gamma(d/2 + 1) (\kappa_B T)^{d/2+1} f_{d/2+1}(z).$$

Al aplicar la derivada parcial respecto a  $T$ , se obtiene:

$$C_V = \lambda_{NR} \Gamma(d/2 + 1) \left[ (d/2 + 1) \kappa_B (\kappa_B T)^{d/2} f_{d/2+1}(z) + (\kappa_B T)^{d/2+1} \frac{\partial}{\partial T} f_{d/2+1}(z) \right],$$

calculando por separado la derivada parcial de  $f_{d/2+1}(z)$  respecto a  $T$ :

$$\frac{\partial}{\partial T} f_{d/2+1}(z) = f_{d/2}(z) \left( \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right),$$

donde la cantidad  $\partial z / z \partial T$ , se obtiene al derivar la ecuación de número 2.16 respecto a  $T$ . Dado que  $N$  no varía con la temperatura, entonces:

$$0 = \frac{\partial}{\partial T} \left( (\kappa_B T)^{d/2} f_{d/2}(z) \right),$$

que después de un poco de álgebra resulta:

$$-(d/2) \kappa_B (\kappa_B T)^{d/2-1} f_{d/2}(z) = (\kappa_B T)^{d/2} f_{d/2-1}(z) \left( \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right)$$

y se obtiene que:

$$\left( \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right) = -(d/2) \kappa_B (\kappa_B T)^{-1} \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2-1}(z)}.$$

Al sustituir en la expresión para  $C_V$  queda:

$$C_V = \lambda_{NR} \Gamma(d/2 + 1) \kappa_B (\kappa_B T)^{d/2} \left[ (d/2 + 1) f_{d/2+1}(z) - (d/2) \frac{f_{d/2}^2(z)}{f_{d/2-1}(z)} \right],$$

que depende de el valor de  $\lambda_{NR}$ . Para hacer adimensional la expresión anterior se considera el conciente de  $C_V$  por  $dN\kappa_B/2$ , que corresponde al límite de altas temperaturas de Dulong-Pettit para el gas GIF-NR, Ref. [16]:

$$\frac{C_V}{dN\kappa_B/2} = \frac{d}{2} \left[ \left(1 + \frac{2}{d}\right) \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)} - \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2-1}(z)} \right], \quad (2.18)$$

expresión que se puede graficar como función de  $T$  para distintas dimensiones.

En la gráfica que describe el comportamiento de  $C_V$  en la Figura (2.4), se observa que para bajas temperaturas esta cantidad se aproxima a cero de manera lineal. Dado que el calor específico es  $C_V = T(\partial S/\partial T)_V$ , entonces de acuerdo con la tercera ley de la termodinámica cuando  $T \rightarrow 0$  la entropía también tiende a cero.

Al hacer uso de la aproximación de Sommerfeld se muestra que  $C_V$  para el GIF-NR decrece linealmente hasta cero, Ref. [16]. De la ecuación (2.11) se obtiene  $C_V$  para bajas temperaturas al derivar respecto a  $T$ . En este límite el calor específico  $C_V = (2\lambda_{NR}/3)\pi^2\kappa_B^2 E_F^{d/2-1} T$ , es proporcional a  $T$  en el régimen de bajas temperaturas. A altas temperaturas se aproxima a una constante  $dN\kappa_B/2$  conocida como límite de Dulong-Pettit, Ref. [2],[16], en la gráfica se observa que tiende a uno por la forma en la que se hizo adimensional.

## 2.5. La compresibilidad isotérmica $K_T$

Para poder describir el comportamiento de  $K_T$  en la representación de la función de Fermi-Dirac  $f_\nu(z)$ , es necesario modificar la ecuación (2.12).

Recordando el cambio en la energía libre de Helmholtz  $dF = -SdT - PdV + \mu dN$ ,

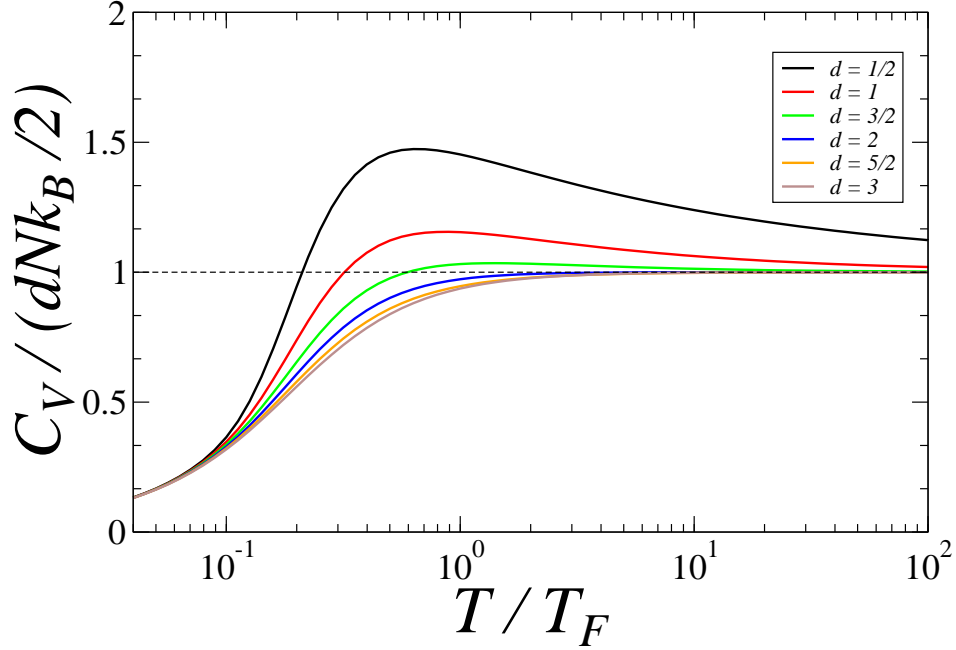


Figura 2.4: Gráfica del calor específico como función de la temperatura para diferentes dimensiones. Ambas cantidades se hicieron adimensionales con las cantidades  $dN\kappa_B/2$  y  $T_F$  respectivamente.

entonces algunas relaciones de Maxwell son:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}, \quad -\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{V,N}, \quad -\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{T,N}.$$

Al considerar la tercera relación de Maxwell se puede introducir  $V$  del lado izquierdo de la igualdad y  $N$  del lado derecho debido a que son variables constantes respecto a las derivadas parciales:

$$-\frac{V}{V} \left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{T,V} = \frac{N}{N} \left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{T,N},$$

$$-\frac{1}{V} \left( \frac{\partial P}{\partial(N/V)} \right)_{T,V} = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial \mu}{\partial(V/N)} \right)_{T,N},$$

introduciendo la densidad de partículas como  $n = N/V$ , queda:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_T = -\frac{1}{n} \left( \frac{\partial \mu}{\partial(1/n)} \right)_T. \quad (2.19)$$

Regresando a la definición de  $K_T$ , se realiza un ajuste conveniente para introducir la densidad de partículas, entonces:

$$K_T = -\frac{1}{V} \frac{N}{N} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{N}{V} \left( \frac{\partial(V/N)}{\partial P} \right)_T = -n \left( \frac{\partial(1/n)}{\partial P} \right)_T,$$

realizando la derivada parcial de  $1/n$  respecto a  $P$ , se sigue que:

$$K_T = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial P} \right)_T,$$

donde al identificar la igualdad (2.19) se sigue que:

$$K_T = -\frac{\partial(1/n)}{\partial \mu},$$

realizando la derivada parcial de  $(1/n)$  respecto a  $\mu$  se obtiene la expresión para la compresibilidad isotérmica:

$$K_T = \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_T. \quad (2.20)$$

Con esta expresión introducimos la información de la densidad de partículas en términos  $f_\nu(z)$  como se muestra:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\lambda_{NR}}{V} \Gamma(d/2) (\kappa_B T)^{d/2} f_{d/2}(z),$$

que al derivar respecto a  $\mu$ , se introduce la dependencia con la fugacidad:

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = \frac{\lambda_{NR}}{V} \Gamma(d/2) (\kappa_B T)^{d/2} \left( \frac{\partial z}{\partial \mu} \right) \frac{\partial}{\partial z} f_{d/2}(z),$$

y haciendo uso de la derivada de  $f_{d/2}(z)$  que se analiza en el Apéndice (6.1), se llega a que:

$$K_T = \frac{1}{n\kappa_B T} \frac{f_{d/2-1}(z)}{f_{d/2}(z)}. \quad (2.21)$$

Para hacer adimensional la relación anterior se considera  $K_{T=0}$  que se ha calculado por separado en el Apéndice (6.2):

$$K_{T=0} = \left( \frac{\lambda_{NR}}{V} \frac{4}{d^2} E_F^{d/2+1} \right)^{-1},$$

y se encuentra

$$\frac{K_T}{K_{T=0}} = \frac{4}{d^2 \Gamma(d/2)} \frac{1}{(T/T_F)^{d/2+1}} \frac{f_{d/2-1}(z)}{(f_{d/2}(z))^2}, \quad (2.22)$$

que es la expresión adimensional de la compresibilidad isotérmica para el GIF-NR en función de la temperatura. Se observa que aparece la dependencia en la fugacidad de la representación de  $f_\nu(z)$ .

En la Figura (2.5) se presenta el comportamiento de la compresibilidad isotérmica para diferentes dimensiones. Se observa que para dimensiones  $d < 2$  el comportamiento de  $K_T$  refleja la anomalía que se predice al analizar  $\mu$ , haciendo que  $K_T$  se comporte como una función creciente en un intervalo de temperaturas y después se comporta de forma regular decreciente como función de  $T$ . En el régimen de altas temperaturas la energía cinética de las partículas debida al incremento de  $T$  es muy grande, de esta manera el GIF-NR se hace menos compresible.



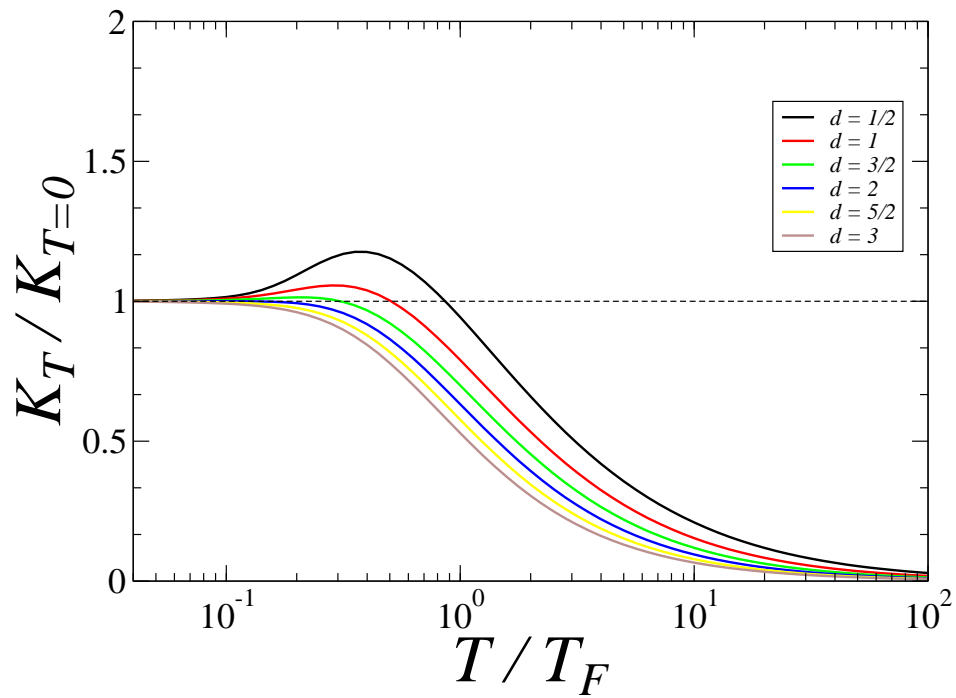


Figura 2.5: Gráfica de la compresibilidad isotérmica como función de la temperatura para diferentes dimensiones.  $K_T$  y  $T$  son adimensionales con los valores de  $K_{T=0}$  y  $T_F$  respectivamente.

# Capítulo 3

## El gas ideal de Fermi ultrarelativista

En la primera parte de este capítulo se discuten las propiedades termodinámicas de un gas de  $N$  fermiones sin espín y ultrarelativistas. Recientemente en el contexto de la termodinámica estadística de los gases ideales a bajas temperaturas y dimensión arbitraria, se ha observado que la densidad del número de partículas puede expresarse en términos de la función de Fermi Dirac  $f_\nu(z)$ , Ref. [19],[6]. Esto muestra un panorama general entre los casos de gases ideales de Bose, de Fermi (como se mostró en el capítulo anterior) y con los correspondientes casos ultrarelativistas. Por ejemplo, se ha encontrado una equivalencia en las propiedades termodinámicas de un gas ideal de Bose y de Fermi en  $d = 2$  cuando estos no son relativistas y en  $d = 1$  cuando son ultrarelativistas, Ref. [20].

Existen varios sistemas en donde se puede despreciar la masa en reposo de las partículas. Un ejemplo bien conocido es un gas de electrón-positrón ( $e^-e^+\gamma$ ), que está en equilibrio termodinámico a través de la emisión y absorción de fotones, Ref. [6]. Sin embargo, en este caso los fotones están considerados de manera indirecta como el baño térmico en el que está inmerso el sistema de fermiones. Otros sistemas que pueden ser estudiados en la aproximación ultrarelativista son las estrellas enanas blancas, Ref. [7], donde se consideran los efectos de la dimensionalidad espacial del

sistema.

En este capítulo la masa en reposo es exactamente cero. Se analiza el potencial químico  $\mu$  a partir de la ecuación de número, de forma análoga que en el capítulo anterior, porque es posible la representación a través de la función de Fermi-Dirac  $f_\nu(z)$ . También se calculan el calor específico a volumen constante  $C_V$  y la compresibilidad isotérmica  $K_T$ . En la segunda parte se incluyen las antipartículas que deben ser consideradas a altas temperaturas, Ref. [5],[4], y se analizan los efectos de estas en las propiedades termodinámicas.

### 3.1. La ecuación de número

El estudio del gas ideal de Fermi ultrarelativista (GIF-UR), permite entender de manera aproximada el caso del gas relativista donde se considera la relación de dispersión dada por  $\epsilon_k = \sqrt{\hbar^2 c^2 k^2 + m^2 c^4}$ , Ref. [11],[5]. En condiciones donde la energía de Fermi  $E_F$  es mucho mayor que la masa en reposo  $mc^2$ , se obtiene la relación de dispersión ultrarelativista que es  $\epsilon_k \approx \hbar ck$ . Al considerar la densidad de estados en su forma más general en el espacio  $k$ , dada por la ecuación (2.5), se obtiene la densidad de estados correspondiente al gas ideal de Fermi ultra-relativista (GIF-UR) para dimensión arbitraria  $d$ :

$$g(\epsilon) = \lambda_R \epsilon^{d-1}, \quad (3.1)$$

donde la constante relativista que se muestra  $\lambda_R$  es:

$$\lambda_R = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \left(\frac{1}{\hbar c}\right)^d,$$

y depende explícitamente de la dimensión con unidades de [Energía] $^{-d}$ .

El análisis de  $\mu$  para este caso se realiza con el mismo tratamiento que en el GIF-NR, donde se encuentra la ecuación de número que relaciona  $N$  con  $\mu$ ,  $V$  y  $T$ . En el límite termodinámico cuando  $N, V \rightarrow \infty$ , la densidad de partículas  $n = N/V$  permanece constante de manera que podemos considerar la ecuación de densidad de partículas

como:

$$n = \frac{\lambda_R}{V} \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon^{d-1}}{1 + z^{-1} \exp(\beta\epsilon)}. \quad (3.2)$$

Cuando  $T = 0$ , se encuentra que la energía de Fermi  $E_F = [dN/\lambda_R]^{1/d}$  es proporcional a  $n^{1/d}$ . Al considerar el cociente de  $\epsilon$  por la energía de Fermi se encuentra la forma adimensional de la ecuación anterior, que es:

$$1 = d\tau^d \int_0^{\infty} dx \frac{x^{d-1}}{1 + z^{-1} \exp(x)},$$

donde  $\tau = T/T_F$ . De esta forma es posible encontrar  $\mu$  como función de  $T$  al mantener fijo la densidad de partículas  $n$  y cuyo comportamiento está representado en la Figura (3.1) para diferentes dimensiones.

Es conveniente representar a  $n$  en términos de la función de Fermi-Dirac debido a que existe un tratamiento general en este tipo de funciones especiales. A decir:

$$n = \frac{\lambda_R}{V} \Gamma(d) (\kappa_B T)^d f_d(z), \quad (3.3)$$

donde se exhibe que el gas ideal de Fermi ultrarelativista tiene la misma estructura matemática que en el caso no relativista, donde solo cambia el orden de  $f_\nu(z)$  y el exponente de  $(\kappa_B T)^\nu$ . Por esta razón el tratamiento con la función de Fermi Dirac que se analiza en Ref. [9] es el mismo.

### 3.1.1. Aproximación a bajas temperaturas

Anteriormente se utilizó el desarrollo de Sommerfeld para analizar el comportamiento de  $\mu$  a bajas temperaturas de un gas ideal de Fermi no relativista. Se obtuvo una expresión para  $\mu$  en la ecuación (2.10), que sólo depende de la razón entre  $g'(\epsilon)$  y  $g(\epsilon)$ . De manera que la cantidad de interés en este caso es el cociente  $g'(\epsilon)/g(\epsilon) = (d-1)/\epsilon$ . Al usar la aproximación de Sommerfeld, se obtiene una forma explícita del potencial

químico para dimensión arbitraria en el caso ultrarelativista:

$$\mu = E_F - \frac{\pi^2}{6} (\kappa_B T)^2 \frac{(d-1)}{E_F},$$

y al introducir las variables adimensionales  $\mu/E_F$  y  $T/T_F$  queda:

$$\frac{\mu}{E_F} = 1 - \frac{\pi^2}{6} (d-1) \left( \frac{T}{T_F} \right)^2,$$

donde se muestra que  $\mu$  decrece monótonamente si  $d > 1$ . El potencial químico  $\mu$

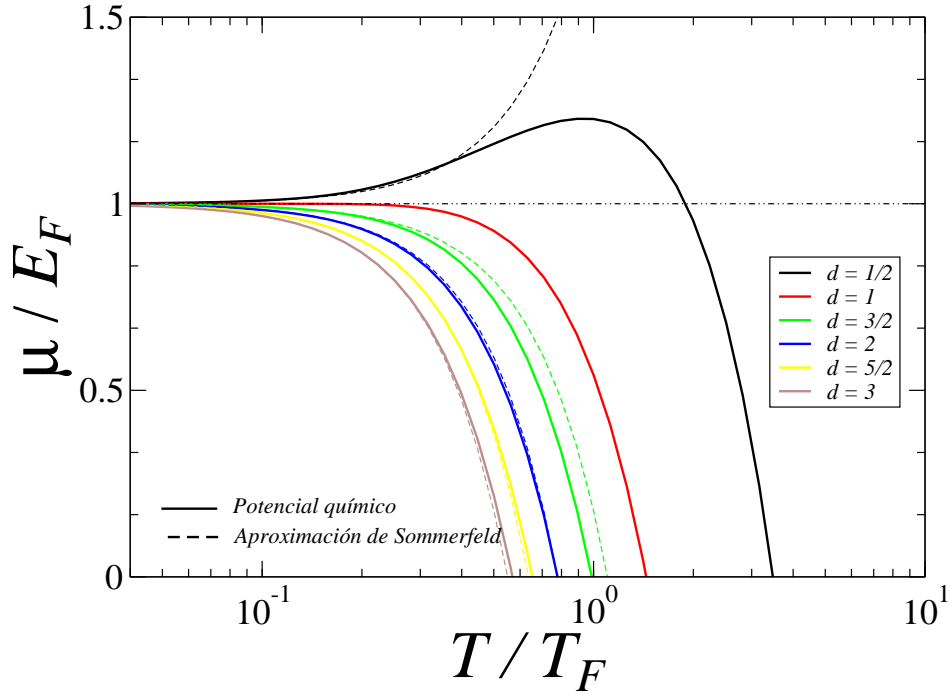


Figura 3.1: Se presenta el comportamiento de  $\mu$  como función de  $T$  para dimensión arbitraria. Se hizo adimensional con el valor de  $E_F$  y  $T_F$ .

se hace más negativo cuando  $T$  es grande para dimensiones  $d > 1$ , el argumento es comparable con GIF-NR, donde al aumentar la temperatura la energía  $U$  debe de-

crecer para mantener a la entropía  $S$  constante. Con la expresión anterior se muestra que para  $d = 1$  no es posible realizar la aproximación de Sommerfeld, puesto que la densidad de estados (3.1) es constante.

Por otro lado, cuando  $d < 1$  se predice un comportamiento anómalo de  $\mu$  debido a que en un intervalo de bajas temperaturas donde la energía interna  $U$  domina en la energía libre de Helmholtz  $F = U - TS$ , el potencial químico se comporta como una función creciente, hasta alcanzar un valor máximo como se observa en la Figura (3.1). Cuando la temperatura es muy grande, la entropía  $S$  domina en la energía libre de Helmholtz y  $\mu$  decrece monótonamente para comportarse como en el gas ideal clásico.

El cálculo del valor de la temperatura donde  $\mu$  alcanza su máximo para dimensiones  $d < 1$  no se incluye en esta revisión, sin embargo, se puede aproximar a través de una análisis numérico.

**Dimensión igual a uno.** Como ya se mencionó, el caso particular de una dimensión no se puede tratar con la aproximación de Sommerfeld, debido a que la densidad de estados es una constante  $g(\epsilon) = L/\pi\hbar c$ . Sin embargo, se puede resolver la integral de manera analítica al multiplicar por la identidad apropiada, como se muestra:

$$1 = \tau \int_0^{\infty} dx \frac{z \exp(-x)}{z \exp(-x) + 1} = \tau \ln[z + 1],$$

de manera que:

$$\mu = \kappa_B T \ln[\exp(T_F/T) - 1],$$

y de forma adimensional:

$$\frac{\mu}{E_F} = 1 + \left(\frac{T}{T_F}\right) \ln \left[1 - \exp\left(\frac{-T_F}{T}\right)\right].$$

Se observa que  $\mu$  parte de una constante igual a uno cuando  $T = 0$ , por la forma en la que se hizo adimensional. El argumento del logaritmo es menor que uno cuando aumenta la temperatura por lo que  $\mu$  es decreciente como función de  $T$ . Para  $T \ll T_F$ ,

$\mu$  difiere de  $E_F$  por una cantidad exponencialmente pequeña con  $T/T_F$ .

### 3.2. El calor específico a volumen constante $C_V$

Para calcular  $C_V$  se debe utilizar la expresión para la energía considerando la relación de dispersión ultrarelativista. Se tiene que la energía promedio total es:

$$U = \lambda_R \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon^d}{1 + z^{-1} \exp(\beta\epsilon)},$$

donde  $\lambda_R$  es la constante relativista. En la representación de la función de Fermi-Dirac, se encuentra:

$$U = \lambda_R \Gamma[d + 1] (\kappa_B T)^{d+1} f_{d+1}(z), \quad (3.4)$$

y entonces al tomar la derivada parcial de  $U$  respecto a  $T$  para calcular  $C_V$  resulta:

$$C_V = \lambda_R \Gamma[d + 1] \left[ (d + 1)(\kappa_B T)^d \kappa_B f_{d+1}(z) + (\kappa_B T)^{d+1} \frac{\partial}{\partial T} f_{d+1}(z) \right]. \quad (3.5)$$

Calculando por separado la derivada de  $f_{d+1}(z)$  respecto a  $T$ , se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial T} f_{d+1}(z) = \left( \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right) f_d(z),$$

para conocer explícitamente la cantidad  $\partial z / z \partial T$  se utiliza la ecuación de densidad de partículas (3.3). Dado que  $n$  es independiente de  $T$  entonces:

$$\frac{\partial n}{\partial T} = 0 = \frac{\lambda_R}{V} \Gamma(d) \frac{\partial}{\partial T} [(\kappa_B T)^d f_d(z)],$$

al desarrollar la derivada parcial:

$$0 = d(\kappa_B T)^{d-1} \kappa_B f_d(z) + (\kappa_B T)^d \frac{\partial}{\partial T} f_d(z),$$

y después de un poco de álgebra:

$$\left(\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T}\right) = -d\kappa_B(\kappa_B T)^{-1} \frac{f_d(z)}{f_{d-1}(z)}.$$

Por lo que  $C_V$  queda como:

$$C_V = \lambda_R \Gamma[d+1] \left[ (d+1)(\kappa_B T)^d \kappa_B f_{d+1}(z) - d(\kappa_B T)^d \kappa_B \frac{f_d^2(z)}{f_{d-1}(z)} \right],$$

donde al dividir por el valor de la ley de Dulong y Pettit para cada dimensión  $dN\kappa_B$  se obtiene su forma adimensional:

$$\frac{C_V}{dN\kappa_B} = d \left[ \left(\frac{d+1}{d}\right) \frac{f_{d+1}(z)}{f_d(z)} - \frac{f_d(z)}{f_{d-1}(z)} \right], \quad (3.6)$$

que se puede observar en la Figura (3.2) como función de la temperatura.

En la Figura (3.2) se observa que el comportamiento de  $C_V$  es muy similar en las diferentes dimensiones consideradas, excepto para el caso  $d < 1$  donde se observa un comportamiento anómalo que es similar al que se encontró para  $\mu$  en la sección (3.1). Se puede utilizar el desarrollo de Sommerfeld para la energía, como se muestra en la ecuación (2.11) y demostrar que  $C_V$  decrece linealmente a cero a temperaturas muy bajas. Se obtiene que  $C_V = \lambda_R \pi^2 \kappa_B^2 T E_F^{d-1} / 3$  para el GIF-UR lo que exhibe su comportamiento lineal como función de  $T$  en el régimen de bajas temperaturas. A altas temperaturas cuando  $T \rightarrow \infty$ , se observa que  $C_V$  tiende a la constante  $dN\kappa_B$  conocida como la ley de Dulong-Pettit, Ref. [16].

### 3.3. La compresibilidad isotérmica $K_T$

Calculamos  $K_T$  con la relación (2.20) que se obtuvo anteriormente, donde se utiliza la expresión (3.3) para la densidad de partículas. Aplicando la derivada parcial respecto a  $\mu$  se sigue que:

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = \frac{\lambda_R}{V} \Gamma(d) (\kappa_B T)^d \frac{\partial}{\partial \mu} f_d(z).$$



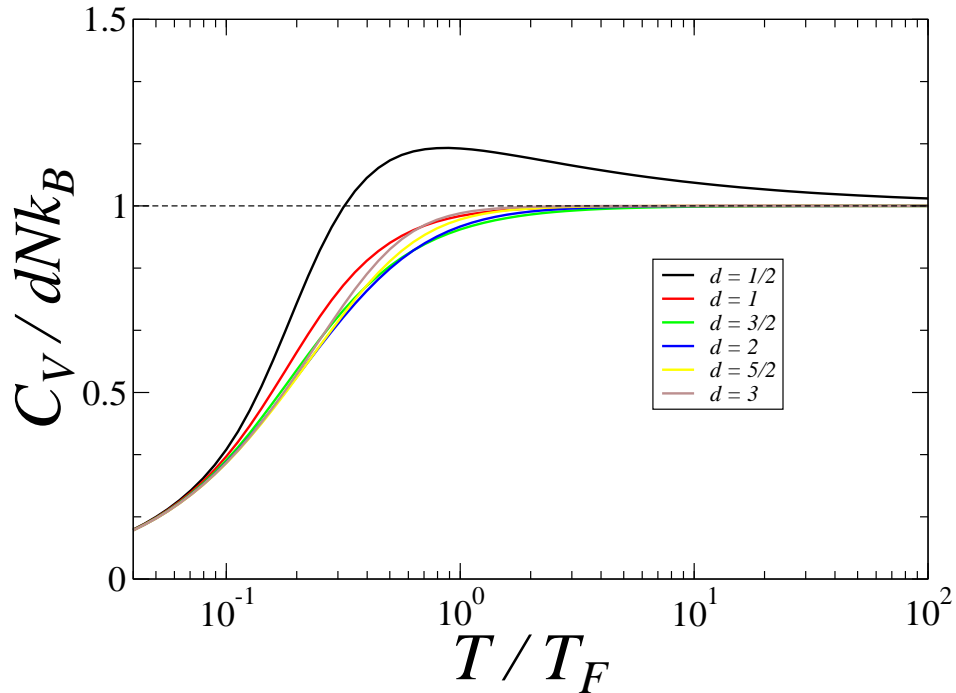


Figura 3.2: Se presenta el comportamiento del calor específico  $C_V$  como función de la temperatura para diferentes dimensiones. Se hizo adimensional con el valor de  $dN\kappa_B$  en unidades de la temperatura de Fermi  $T_F$ .

Calculando por separado la derivada parcial de  $f_d(z)$  respecto a  $\mu$ :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} f_d(z) = \frac{\partial}{\partial z} f_d(z) \frac{\partial z}{\partial \mu} = \beta f_{d-1}(z),$$

de manera que al introducir estos cálculos en la relación (2.20) se sigue que:

$$K_T = \frac{1}{n^2} \frac{\lambda_R}{V} \Gamma(d) (\kappa_B T)^d \beta f_{d-1}(z)$$

y por lo tanto se obtiene la expresión:

$$K_T = \frac{1}{n\kappa_B T} \frac{f_{d-1}(z)}{f_d(z)}, \quad (3.7)$$

que depende de la densidad de partículas  $n$ . Por esta razón es necesario obtener la forma adimensional de la relación anterior al considerar el cociente por el valor de  $K_{T=0}$  que se calcula en el Apéndice (6.3):

$$K_{T=0} = \left( \frac{1}{d^2} \frac{\lambda_R}{V} E_F^{d+1} \right)^{-1} \quad (3.8)$$

De manera que:

$$\frac{K_T}{K_{T=0}} = \frac{1}{d^2 \Gamma(d)} \frac{1}{(T/T_F)^{d+1}} \frac{f_{d-1}(z)}{f_d^2(z)}, \quad (3.9)$$

es la expresión que se puede graficar como función de la temperatura.

En la Figura (3.3) se observa que para valores de  $d < 1$ ,  $K_T$  también muestra un comportamiento diferente al que se muestra en dimensiones  $d \geq 1$ . Lo que significa que en un intervalo de temperaturas  $K_T$  se hace mas compresible para esas dimensiones. Después se comporta de forma usual decreciente, hasta que el GIF-UR se hace incompresible para altas temperaturas, de manera similar que en el caso del GIF-NR.

### 3.4. La creación de pares partícula-antipartícula

La ecuación de Dirac describe un sistema cuántico relativista como lo es el GIF-UR en el cual se encuentran soluciones con energía positiva y energía negativa. El estado de vacío físico que se define a partir de la ecuación de Dirac, se describe como la ausencia de fermiones en estados de energía positiva y por fermiones que llenan los estados de energía negativa de acuerdo con el principio de Pauli, ambos espectros están separados por una brecha de energía de  $2mc^2$ . Esta situación es conocida como el mar de Dirac y se considera como el estado de energía estable mas bajo, Ref. [3]. Los fermiones que se encuentran en los niveles de energía negativa pueden absorber

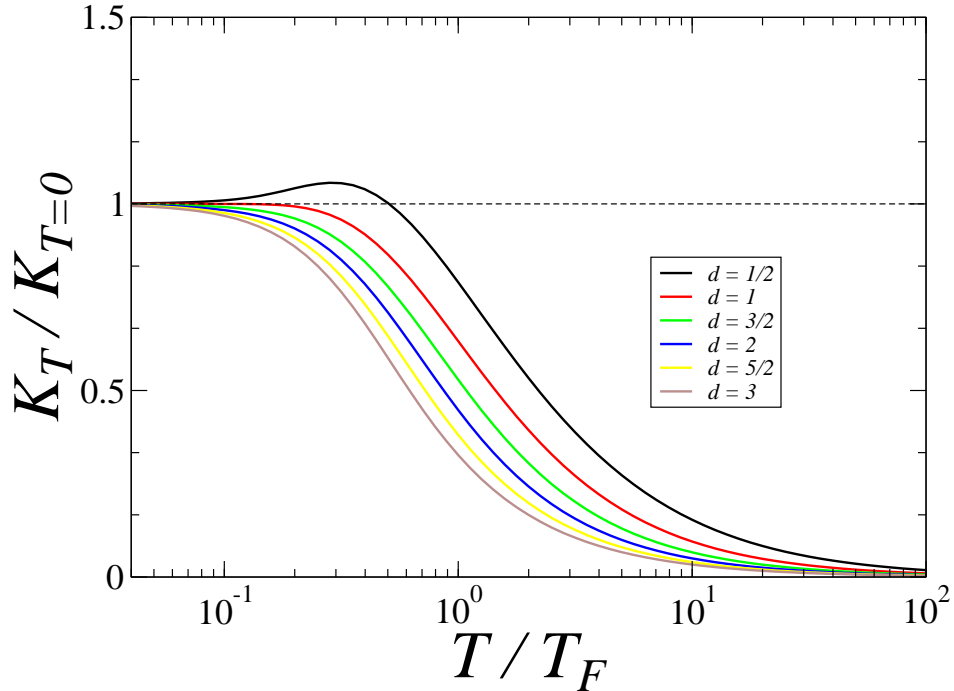


Figura 3.3: Se presenta el comportamiento de  $K_T$  como función de  $T$  para varias dimensiones.  $K_T$  se hizo adimensional con los valores de  $K_{T=0}$  y  $T$  en unidades de la temperatura de Fermi  $T_F$ .

radiación a través de fotones con energía  $\hbar\omega$ , si la energía de los fotones es mayor que el de la brecha, es decir  $\hbar\omega > 2mc^2$ , entonces un fermión en los niveles negativos puede ser excitado a un nivel de energía positivo dejando un hueco en el espectro negativo. Cuando esto ocurre se obtiene un fermión con energía positiva y carga negativa y un hueco en el espectro negativo que se comporta como una partícula con carga positiva.

De esta manera se explica el proceso de creación de pares de partícula-antipartícula a través de los fotones con un umbral de energía  $\hbar\omega = 2mc^2$ . La creación de pares en el GIF-UR sucede a temperaturas tales que  $\kappa_B T \gg mc^2$ . En este caso el sistema se encuentra en equilibrio con el vacío a través de procesos de creación y aniquilación

en donde los fotones emitidos actúan como el reservorio del sistema.

En el gas ideal de Fermi ultrarelativista, cuando se considera esta creación de pares de partícula-antipartícula (GIF-UR-PAP), se analiza el número de partículas  $N$  que depende de la fugacidad  $z = \exp(\beta\mu)$  y el número de antipartículas  $\bar{N}$  la cual depende de otra fugacidad  $\bar{z} = \exp(\beta\bar{\mu})$ , Ref. [11],[5], y donde  $\bar{\mu}$  es el potencial químico de las antipartículas.

El número de partículas y el de antipartículas nos son cantidades conservadas de manera independientemente, debido a que sucede un proceso de creación y aniquilación de pares de partícula-antipartícula de manera continua. En el equilibrio termodinámico, la cantidad conservada es la diferencia de  $N$  y  $\bar{N}$ , donde  $\bar{N}$  es el número de antipartículas. Se encuentra que los potenciales químicos están relacionados a través de  $\mu = -\bar{\mu}$ , Ref. [11],[21].

Las distribuciones de Fermi-Dirac correspondientes, que describen el número promedio de partículas y de antipartículas en un nivel de energía  $\epsilon$ , están dadas por:

$$n_\epsilon = \frac{1}{1 + z^{-1} \exp(\beta\epsilon)} \quad \bar{n}_\epsilon = \frac{1}{1 + z \exp(\beta\epsilon)}, \quad (3.10)$$

de manera que al considerar el límite termodinámico, la densidad de partículas inicial  $n$  se mantiene constante y está dada por:

$$n = \frac{N - \bar{N}}{V} = \frac{\lambda_R}{V} \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{d-1} [n_\epsilon - \bar{n}_\epsilon], \quad (3.11)$$

donde nuevamente aparece la constante relativista  $\lambda_R$ .

A bajas temperaturas el papel de la antipartículas no es de mucha relevancia porque no existe la suficiente energía para que sean creadas. Se puede mostrar si se considera el límite de  $n_\epsilon$  cuando  $T \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\rightarrow} \bar{n}_\epsilon = \frac{\exp(-\epsilon/\kappa_B T)}{\exp(-\epsilon/\kappa_B T) + z} = 0,$$

entonces es posible hallar la energía de Fermi la cual coincide con aquella en el caso

sin antipartículas. Con  $E_F$  se hace adimensional la ecuación (3.11) y se obtiene:

$$1 = d\tau^d \int_0^\infty dx x^{d-1} \left[ \frac{1}{1 + z^{-1} \exp(x)} - \frac{1}{1 + z \exp(x)} \right],$$

donde  $\tau = T/T_F$ . En la representación de las funciones de Fermi-Dirac se obtiene la ecuación:

$$n = \frac{\lambda_R}{V} \Gamma(d) (\kappa_B T)^d [f_d(z) - f_d(z^{-1})], \quad (3.12)$$

y se exhibe la inclusión de las antipartículas en la función  $f_d(z^{-1})$ .

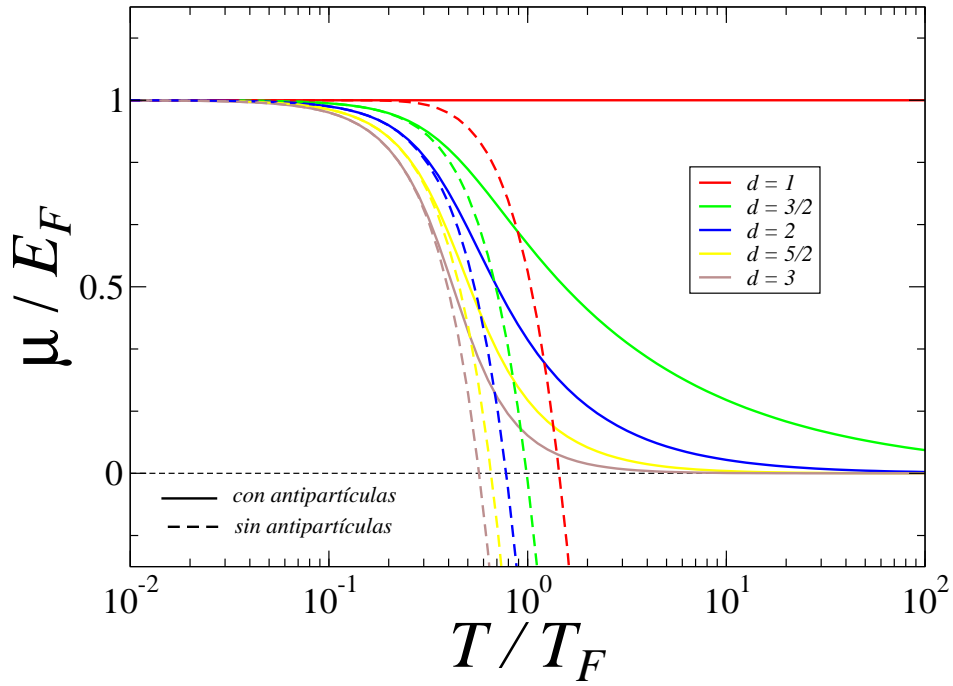


Figura 3.4: Se presenta el comportamiento de  $\mu$  considerando a las antipartículas, como función de la temperatura y para dimensión arbitraria.  $\mu$  se hizo adimensional con el valor de  $E_F$  y  $T$  está dada en unidades de la temperatura de Fermi  $T_F$ .

El comportamiento de  $\mu$  se muestra en la Figura (3.4) donde se observa que  $\mu \rightarrow 0$

debido a las antipartículas como se ha reportado en Ref. [21] donde solo menciona que decrece y se aproxima a un valor constante. En el régimen de altas temperaturas, el GIF-UR se comporta como un gas ideal de Bose debido a que el potencial químico del gas de Bosones sin masa es  $\mu = 0$  para toda  $T$ , Ref. [22][21] y corresponde a un gas de fotones.

**Dimensión igual a uno.** Como se mostró en la sección (3.1), para  $d = 1$  la densidad de estados es una constante  $g(\epsilon) = L/\pi\hbar c$ . Esto permite resolver analíticamente la integral en la expresión de la densidad de partículas al introducir una identidad conveniente:

$$1 = \tau \int_0^{\infty} dx \left[ \frac{z \exp(-x)}{z \exp(-x) + 1} - \frac{z^{-1} \exp(-x)}{z^{-1} \exp(-x) + 1} \right],$$

integrando se sigue que:

$$1 = \tau \ln[z + 1] - \ln[z^{-1} + 1] = \tau \ln \left( \frac{z + 1}{z^{-1} + 1} \right),$$

y después de un poco de álgebra:

$$\exp(1/\tau) = \frac{z + 1}{z^{-1} + 1},$$

de manera que se llega a la expresión:

$$0 = z^2 + z[1 - \exp(1/\tau)] - \exp(1/\tau),$$

que puede resolverse con la fórmula general para polinomios de segundo orden. La solución al polinomio de segundo orden muestra dos valores para la fugacidad  $z = \exp(1/\tau)$  y  $z = -1$ . La raíz  $z = -1$  no es físicamente posible debido a que la fugacidad  $z = \exp(\beta\mu)$ , es mayor que cero para toda temperatura. Para el otro caso  $z = \exp(\beta\mu) = \exp(1/\tau)$ , se encuentra que después de un poco de álgebra  $\mu = E_F$  para toda temperatura. El resultado anterior adquiere relevancia pues privilegia el caso de dimensión  $d = 1$ , puesto que el valor de la fugacidad es constante. También se

puntualizan las repercusiones de esta dimensión en las susceptibilidades termodinámicas.

### 3.5. El calor específico con antipartículas

La relación termodinámica (2.13) de  $C_V$ , ahora tiene una corrección al considerar la creación de antipartículas debido a que la energía interna promedio  $U$ , se debe a la aportación tanto de  $N$  como de  $\bar{N}$ , como se muestra a continuación:

$$U = \lambda_R \int_0^{\infty} d\epsilon \quad \epsilon^d [n_\epsilon + \bar{n}_\epsilon], \quad (3.13)$$

y en términos de la función de Fermi-Dirac:

$$U = \lambda_R \Gamma(d+1) (\kappa_B T)^{d+1} [f_{d+1}(z) + f_{d+1}(z^{-1})]. \quad (3.14)$$

Al derivar respecto a la temperatura para encontrar  $C_V$ , se sigue que:

$$C_V = \lambda_R \Gamma(d+1) \left[ (d+1)(\kappa_B T)^d \kappa_B f_{d+1}(z) + (\kappa_B T)^{d+1} \frac{\partial}{\partial T} f_{d+1}(z) \right. \\ \left. + (d+1)(\kappa_B T)^d \kappa_B f_{d+1}(z^{-1}) + (\kappa_B T)^{d+1} \frac{\partial}{\partial T} f_{d+1}(z^{-1}) \right], \quad (3.15)$$

la expresión anterior es similar a la que se encontró en el caso de GIF-UR sin antipartículas en la ecuación (3.5). De esta manera basta calcular de manera independiente el término donde se encuentra la derivada parcial de  $f_{d+1}(z^{-1})$  respecto a  $T$ , para obtener la corrección de las antipartículas. Se sigue que:

$$\frac{\partial}{\partial T} f_{d+1}(z^{-1}) = - \left( \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right) f_d(z^{-1}).$$

La cantidad  $\partial z/z\partial T$  se encuentra a partir de la ecuación de la densidad de partículas (3.13) que es independiente de la temperatura, entonces:

$$\frac{\partial n}{\partial T} = 0 = \frac{\lambda_{UR}}{V}\Gamma(d) \frac{\partial}{\partial T} [(\kappa_B T)^d f_d(z) - (\kappa_B T)^d f_d(z^{-1})],$$

con la igualdad a cero se sigue que:

$$d(\kappa_B T)^{d-1} \kappa_B f_d(z) + (\kappa_B T)^d \frac{\partial}{\partial T} f_d(z) = d(\kappa_B T)^{d-1} \kappa_B f_d(z^{-1}) + (\kappa_B T)^d \frac{\partial}{\partial T} f_d(z^{-1}),$$

y después de un poco de álgebra, queda:

$$\left( \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right) = \left( \frac{-d\kappa_B}{\kappa_B T} \right) \frac{f_d(z) - f_d(z^{-1})}{f_{d-1}(z) + f_{d-1}(z^{-1})},$$

la cual se introduce en la ecuación (3.15) para reagrupar términos y obtener:

$$C_V = \lambda_{UR}\Gamma(d+1)(\kappa_B T)^d \kappa_B \left[ (d+1)[f_{d+1}(z) + f_{d+1}(z^{-1})] \right. \\ \left. - d [f_d(z) - f_d(z^{-1})] \left[ \frac{f_d(z) - f_d(z^{-1})}{f_{d-1}(z) + f_{d-1}(z^{-1})} \right] \right],$$

finalmente se encuentra la forma adimensional al considerar el cociente por  $dN\kappa_B$ :

$$\frac{C_V}{dN\kappa_B} = d \left[ \left( \frac{d+1}{d} \right) \left( \frac{f_{d+1}(z) + f_{d+1}(z^{-1})}{f_d(z) - f_d(z^{-1})} \right) - \left( \frac{f_d(z) - f_d(z^{-1})}{f_{d-1}(z) + f_{d-1}(z^{-1})} \right) \right], \quad (3.16)$$

expresión que se puede graficar como función de la temperatura para diferentes dimensiones.

La Figura (3.5) se presenta  $C_V$  en escala log-log para mostrar el comportamiento a altas temperaturas. Resalta el caso particular en una dimensión, donde  $C_V$  crece linealmente hasta infinito. Los otros casos también tienden a infinito para altas temperaturas pero en potencias de  $T$ . La potencia con la que diverge está relacionada con el valor de la dimensión.

Se encuentra que las antipartículas influyen en  $C_V$  del GIF-UR de tal manera que



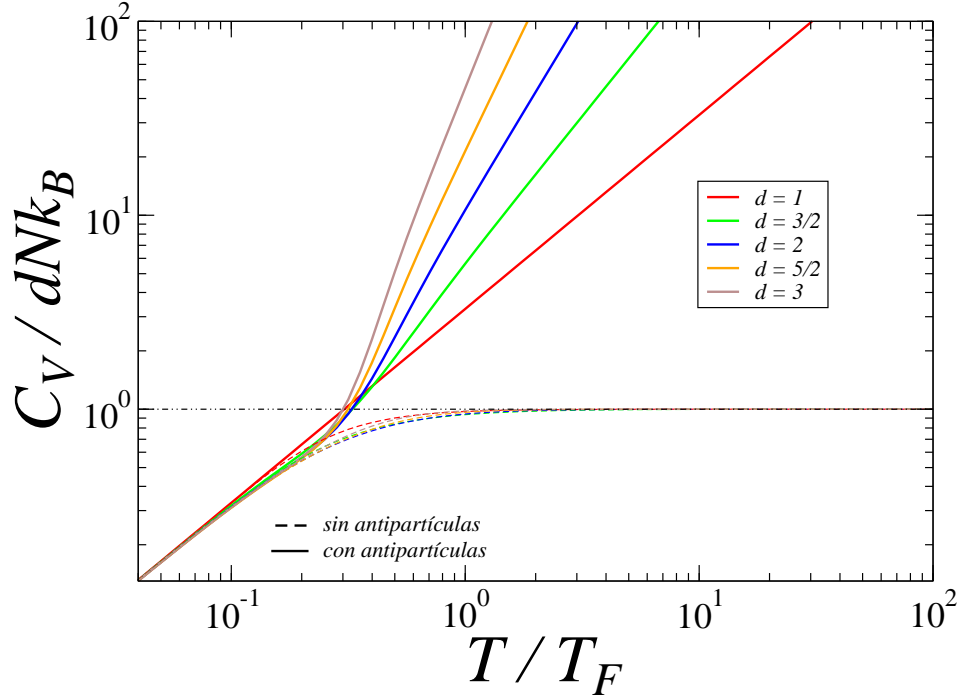


Figura 3.5: Se presenta el comportamiento de  $C_V$  con la corrección de antipartículas como función de la temperatura  $T$ , para dimensión arbitraria. Se hizo adimensional con los valores de  $dN\kappa_B$ , y la temperatura en unidades de la temperatura de Fermi  $T_F$ .

se comporta como el calor específico de un gas de Bosones el cual diverge a altas temperaturas, Ref. [22],[23].

**Dimensión igual a uno.** En el caso de una dimensión se obtuvo que  $\mu = E_F$  para toda temperatura, de manera que la fugacidad ahora se considera como  $z = \exp(\beta E_F)$ , lo que permite la siguiente expresión para el calor específico:

$$\frac{C_V}{N\kappa_B} = 2 \frac{f_2(z) + f_2(z^{-1})}{f_1(z) - f_1(z^{-1})} - \frac{f_1(z) - f_1(z^{-1})}{f_0(z) + f_0(z^{-1})},$$

Después de un breve desarrollo en las funciones especiales de Fermi Dirac que se analizan en el Apéndice (6.1), se obtiene que:  $f_0(z) + f_0(z^{-1}) = 1$ ,  $f_1(z) - f_1(z^{-1}) = E_F/\kappa_B T$  y que  $f_2(z) + f_2(z^{-1}) = \pi^2/6 + E_F^2/2\kappa_B^2 T^2$ .

De manera que la expresión en una dimensión para el calor específico a volumen constante es  $C_V/N\kappa_B = 2\pi^2\kappa_B T/3E_F$ , demostrando el comportamiento lineal que se muestra en la Figura (3.5).

En el régimen de bajas temperaturas, nuevamente se hace uso de la aproximación de Sommerfeld para la energía (2.11). Se obtiene que  $C_V = \pi^2\kappa_B^2 T\lambda_R E_F^{d-1}/3$  y al hacer adimensional con el valor de  $dN\kappa_B$  se encuentra que  $C_V/dN\kappa_B = 2\pi^2\kappa_B T/3E_F$  es la misma cantidad que en el caso de una dimensión.

### 3.6. La compresibilidad isotérmica con antipartículas

De igual manera que  $C_V$  tiene una corrección,  $K_T$  debe ser corregida al considerar la creación de pares de partícula-antipartícula. Usando la relación termodinámica (2.20) obtenida anteriormente, se introduce la ecuación de densidad de partículas en el caso GIF-UR-PAP dado por la expresión (3.12). Derivando respecto a  $\mu$ :

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = \frac{\lambda_R}{V}\Gamma(d) \left( \frac{\partial z}{\partial \mu} \right) \frac{\partial}{\partial z} [f_d(z) - f_d(z^{-1})],$$

se encuentra una expresión parecida al caso GIF-UR, por lo que basta calcular la derivada de la función de Fermi-Dirac de  $z^{-1}$  de orden  $d$ .

$$\frac{\partial}{\partial z} f_d(z^{-1}) = \left( \frac{1}{z^{-1}} \frac{\partial z^{-1}}{\partial z} \right) f_{d-1}(z^{-1}) = -\frac{1}{z} f_{d-1}(z^{-1})$$

Entonces al calcular  $K_T$  se obtiene la relación siguiente:

$$K_T = \frac{1}{n^2} \frac{\lambda_R}{V} \Gamma(d) \left( \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \mu} \right) [f_{d-1}(z) + f_{d-1}(z^{-1})],$$

y luego:

$$K_T = \frac{1}{n^2} \frac{\lambda_R}{V} \Gamma(d) \beta [f_{d-1}(z) + f_{d-1}(z^{-1})],$$

al introducir la definición de la densidad de partículas resulta:

$$K_T = \frac{1}{n\kappa_B T} \left[ \frac{f_{d-1}(z) + f_{d-1}(z^{-1})}{f_d(z) - f_d(z^{-1})} \right],$$

expresión que todavía depende de la densidad de partículas.

Para hacer adimensional se considera el cociente de  $K_T$  por  $K_{T=0}$  con la corrección de las antipartículas, para ello se debe conocer la energía  $U$  a  $T = 0$ .

La energía a temperatura igual a cero  $U^0$ , es la misma cantidad que en el caso GIF-UR debido a que las antipartículas no tienen relevancia en ese régimen, de esta forma  $K_{T=0}$  también es la misma cantidad en el caso del GIF-UR sin antipartículas  $K_{T=0} = \left( \frac{1}{d^2} \frac{\lambda_{UR}}{V} E_F^{d+1} \right)^{-1}$ . Se encuentra la expresión adimensional para la compresibilidad isotérmica que es:

$$\frac{K_T}{K_{T=0}} = \frac{1}{d^2 \Gamma(d)} \frac{1}{(T/T_F)^{d+1}} \frac{f_{d-1}(z) + f_{d-1}(z^{-1})}{[f_d(z) - f_d(z^{-1})]^2}, \quad (3.17)$$

que se grafica como función de la temperatura.

En la Figura (3.6) se observa que para  $d > 1$  la compresibilidad isotérmica del GIF-UR diverge hasta infinito cuando  $T \rightarrow \infty$ . Esto significa que en el régimen  $T \rightarrow \infty$ ,  $K_T$  se aproxima asintóticamente al comportamiento de un gas de Bosones sin masa, cuya compresibilidad isotérmica diverge para toda valor de  $T$ . De esta manera cuando se consideran los efectos relativistas en el GIF y se incluyen la creación de pares de partícula-antipartícula, la equivalencia de las susceptibilidades termodinámicas entre el gas de Fermi y Bose se hace posible. A diferencia del caso no relativista en donde  $K_T$  distingue el gas de Fermi del gas de Bose, aún cuando los calores específicos tienen la misma dependencia con la temperatura, Ref. [20].

**Dimensión igual a uno** En la compresibilidad isotérmica también es posible realizar un cálculo de la expresión (3.18), donde se introduce el valor de  $\mu = E_F$  para

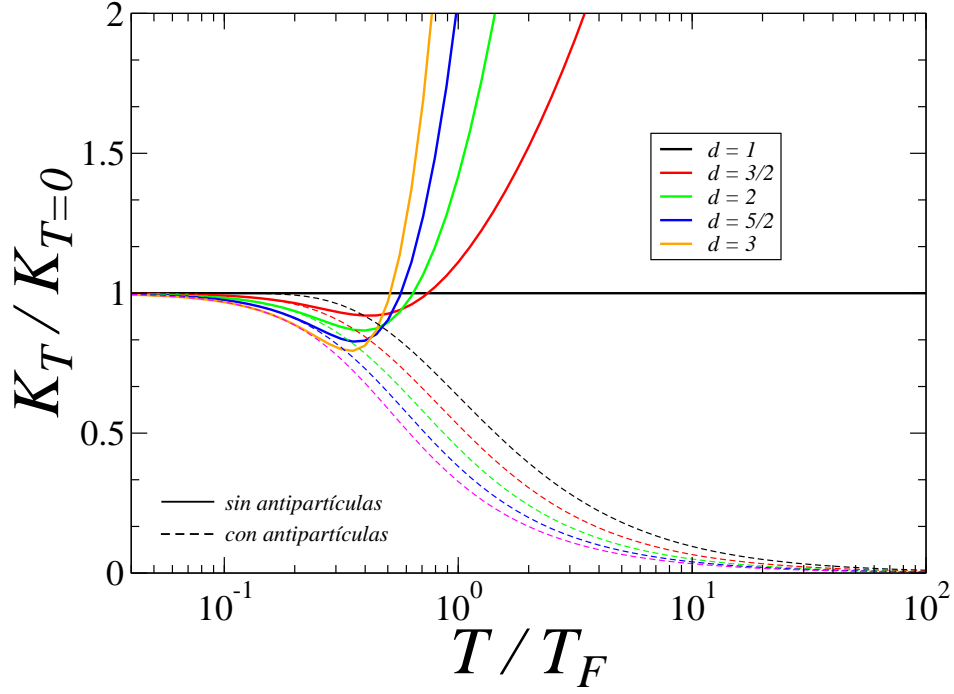


Figura 3.6: Se presenta la compresibilidad isotérmica  $K_T$  con la corrección de las antipartículas como función de la temperatura  $T$ , para dimensión arbitraria.

toda temperatura y el análisis con las funciones de Fermi-Dirac  $f_\nu(z)$  resultan:

$$\frac{K_T}{K_{T=0}} = \frac{1}{(T/T_F)^2} \frac{f_0(z) + f_0(z^{-1})}{[f_1(z) - f_1(z^{-1})]^2}, \quad (3.18)$$

lo que significa en una dimensión que  $K_T/K_{T=0} = 1$  es una constante para toda temperatura. Esto se debe a que la creación y aniquilación de pares de partícula-antipartícula sucede de manera continua, por lo que la diferencia  $N - \bar{N}$  permanece constante en una dimensión y no depende del número partículas iniciales.

### 3.7. La razón entre partículas y antipartículas como función de la temperatura

Hasta ahora se ha considerado la creación de pares de partícula-antipartícula a altas temperaturas pero queremos conocer como es la relación entre las partículas  $N$  y las antipartículas  $\bar{N}$  como función de la temperatura y relacionarla con los resultados obtenidos. Para conocer cuantitativamente la relación entre  $N$  y  $\bar{N}$  en función de la temperatura, es conveniente considerar el cociente entre ambas cantidades en la representación de las funciones de Fermi-Dirac:

$$\frac{\bar{N}}{N} = \frac{f_d(z^{-1})}{f_d(z)},$$

de esta manera, la razón entre  $N$  y  $\bar{N}$  se puede graficar como función de  $T$ . En la Figura (3.7) se observa que a bajas temperaturas el cociente es muy pequeño tendiendo a cero. A altas temperaturas tiende a ser una constante igual a uno, lo que significa que se crean igual número de partículas que de antipartículas. La rapidez con la que se crean los pares de  $N$  y  $\bar{N}$  depende de la dimensión del sistema, de esta manera cuando la dimensión es muy chica hay un cambio abrupto en el comportamiento de la curva, lo que significa una creación casi instantánea de pares. Por otro lado cuando la dimensión es grande el proceso de creación de antipartículas es mas tardado a altas temperaturas.

En un análisis futuro debería ser posible determinar la temperatura en la cual hay un punto de inflexión para la curva de cada dimensión. En particular para dimensiones mayores o iguales a tres, esa temperatura esta relacionada con la transición a un comportamiento similar al de un gas de Bosones, encontrado en  $\mu$ ,  $C_V$  y  $K_T$  debido a la creación de las antipartículas, es decir, esa temperatura indicaría cuando el GIF-UR comienza a comportarse como un gas de Bosones sin masa.

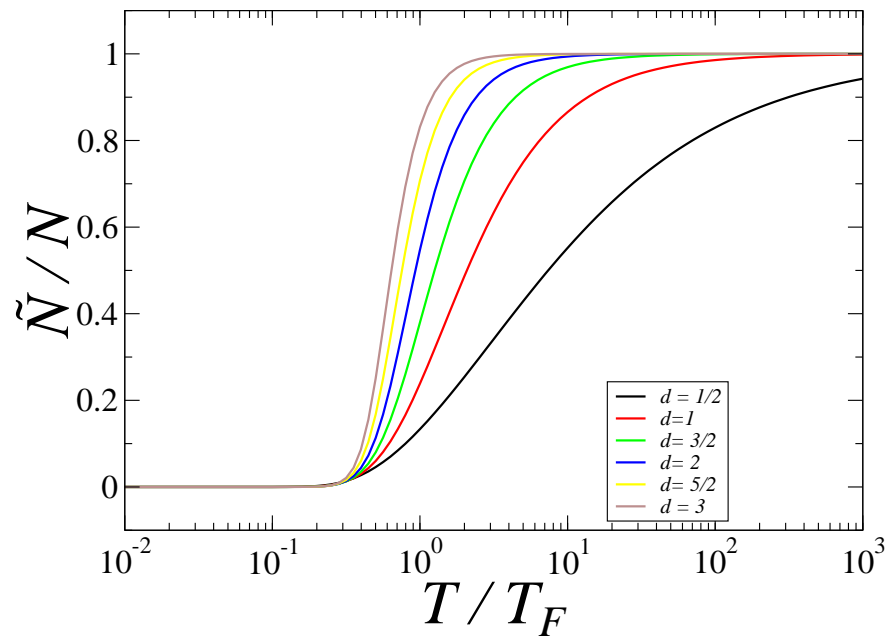


Figura 3.7: Se presenta la relación entre el número de partículas  $N$  y antipartículas  $\bar{N}$  para el GIF-UR como función de  $T$ , para dimensión arbitraria.

# Capítulo 4

## El gas ideal de Fermi relativista

El espectro de energía en el límite ultrarelativista,  $\epsilon_k = \hbar ck$  nos ha permitido escribir las propiedades termodinámicas del sistema en términos de las funciones de Fermi-Dirac  $f_\nu(z)$ , Ref. [19].

El estudio de las propiedades termodinámicas se realiza nuevamente en términos del gran potencial termodinámico  $q(V, T, \mu)$  lo que se refleja en las ecuaciones de estado consideradas anteriormente, sin embargo, ahora se considera la masa en reposo en el espectro de energías relativista, por lo que ya no es posible una representación a través de  $f_\nu(z)$ .

Análogamente como se hizo en el capítulo anterior, primero se analiza el caso cuando sólo partículas son consideradas en el sistema, para después analizar los efectos de considerar la producción de pares de partícula-antipartícula. En este capítulo pretendemos estudiar los efectos del espectro exacto relativista yendo más allá de lo discutido en la literatura.

### 4.1. La ecuación de número

Considerando la masa en reposo en la energía relativista, la relación de dispersión es  $\epsilon_k = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ , donde se hace explícita la dependencia con el vector de onda  $\vec{k}$  debido a la relación  $\vec{P} = \hbar \vec{k}$ .

Para obtener la densidad de estados energéticos, se realiza un cambio de representación del espacio  $k$  al espacio de las energías  $\epsilon$  a través de la densidad de estados dada por (2.5) y de la relación de dispersión. Se obtiene que la densidad de estados energéticos para dimensión arbitraria del gas ideal de Fermi relativista (GIF-R) es:

$$g(\epsilon) = \lambda_R \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1}, \quad (4.1)$$

donde  $\lambda_R$  es la misma constante relativista que en el capítulo anterior.

De esta manera la ecuación para la densidad de partículas que permite encontrar a  $\mu$  como función de la temperatura es:

$$n = \frac{\lambda_R}{V} \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1}}{1 + z^{-1} \exp(\beta \epsilon)}. \quad (4.2)$$

Como se ha hecho, se determina la energía de Fermi  $E_F$  a partir de la ecuación de número cuando la temperatura es cero. Es importante notar que al integrar se parte desde el límite inferior igual a la energía de reposo  $mc^2$ , debido a que es el estado de energía mínimo de una sola partícula relativista. Entonces a  $T = 0$ , se tiene que:

$$n = \frac{\lambda_R}{V} \int_{mc^2}^{E_F} d\epsilon \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1},$$

realizando el cambio de variable  $x = \epsilon^2 - m^2 c^4$  la integral anterior puede evaluarse exactamente dando por resultado:

$$n = \frac{\lambda_R}{dV} (E_F^2 - m^2 c^4)^{d/2}. \quad (4.3)$$

Al despejar se obtiene la energía de Fermi en términos de la densidad de partículas  $n = N/V$  para el caso del GIF-R para dimensión arbitraria:

$$E_F = \left[ \left( \frac{dn}{\lambda_R/V} \right)^{2/d} + m^2 c^4 \right]^{1/2} = [E_{FUR}^2 + m^2 c^4]^{1/2},$$



que se muestra en términos de la energía de Fermi del caso ultrarelativista  $E_{F_{UR}} = [dN/\lambda_R]^{1/d}$ . La dependencia de  $\mu$  como función de  $T$  puede obtenerse de manera más sencilla si se hace adimensional la ecuación (4.2) al considerar el cociente de  $\epsilon$  por  $E_F$ . Se sigue que la relación es:

$$1 = \frac{d\tau^2}{(1 - \Omega^2)^{d/2}} \int_{\Omega/\tau}^{\infty} dx \frac{x ([x\tau]^2 - \Omega^2)^{d/2-1}}{1 + z^{-1} \exp(x)},$$

donde  $\tau = T/T_F$  y es clara la dependencia explícita con el cociente  $\Omega = mc^2/E_F$ . Debido a que:

$$\Omega = \frac{mc^2}{E_F} = \frac{1}{\left[ \left( \frac{E_{F_{UR}}}{mc^2} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}}, \quad (4.4)$$

se encuentra que cuando  $mc^2 \ll E_{F_{UR}}$ , el cociente  $E_{F_{UR}}/mc^2$  es muy grande, por lo que  $\Omega$  tiende a cero y entonces el gas ideal de Fermi se encontraría en el caso ultrarelativista discutido en el capítulo anterior.

Si por el contrario  $mc^2 \gg E_{F_{UR}}$ , entonces  $\Omega$  tiende a uno, sin embargo, el caso relativista donde  $\Omega = 1$  no es físicamente de interés pues significaría que  $E_F = mc^2$  y por lo tanto no se tendría un número de partículas iniciales. Esto se puede observar a partir de la relación (4.3) donde se relaciona la energía de Fermi relativista con la densidad de partículas. De esta manera el valor de  $\Omega$  en el caso relativista, sólo se puede encontrar entre cero y uno.

#### 4.1.1. Aproximación a bajas temperaturas

Para hacer uso del resultado de Sommerfeld (2.10), hacemos notar que la derivada de la densidad de estados es:

$$g'(\epsilon) = \lambda_R (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} \left[ 1 + \frac{(d/2 - 1) 2\epsilon^2}{\epsilon^2 - m^2 c^4} \right].$$

Así, nuevamente el cociente que nos interesa es:

$$\frac{g'(\epsilon)}{g(\epsilon)} = \frac{(\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} \left[ 1 + \frac{(d/2-1)2\epsilon^2}{\epsilon^2 - m^2 c^4} \right]}{\epsilon(\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1}},$$

el cual después de un poco de álgebra y de ser evaluado en  $\epsilon = E_F$ , da por resultado:

$$\left. \frac{g'(\epsilon)}{g(\epsilon)} \right|_{\epsilon=E_F} = \frac{1}{E_F} + \frac{E_F(d-2)}{(E_F^2 - m^2 c^4)}.$$

Entonces al sustituir estos resultados en la ecuación (2.10), se obtiene la siguiente expresión para  $\mu$  en el régimen de  $T \ll T_F$  y dimensión arbitraria:

$$\mu = E_F - \frac{\pi^2}{6} (\kappa_B T)^2 \left[ \frac{1}{E_F} + \frac{E_F(d-2)}{(E_F^2 - m^2 c^4)} \right],$$

y de manera adimensional:

$$\frac{\mu}{E_F} = 1 - \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \left( 1 + \frac{d-2}{1-\Omega^2} \right),$$

donde se muestra de nuevo la dependencia con el valor de  $\Omega$ .

Dado el resultado anterior para  $\mu$ , se puede realizar un análisis para determinar las condiciones necesarias, si las hay, para observar la anomalía que ocurre en el caso del GIF-NR en dimensiones  $d < 2$ , es decir, las condiciones para que el potencial químico  $\mu > E_F$ . Estas son:

$$\frac{1}{E_F} + \frac{E_F(d-2)}{(E_F^2 - m^2 c^4)} < 0,$$

después de un proceso algebraico de la desigualdad anterior se sigue que:

$$\frac{1}{E_F^2} < \frac{(2-d)}{E_F^2(1 - \frac{m^2 c^4}{E_F^2})},$$

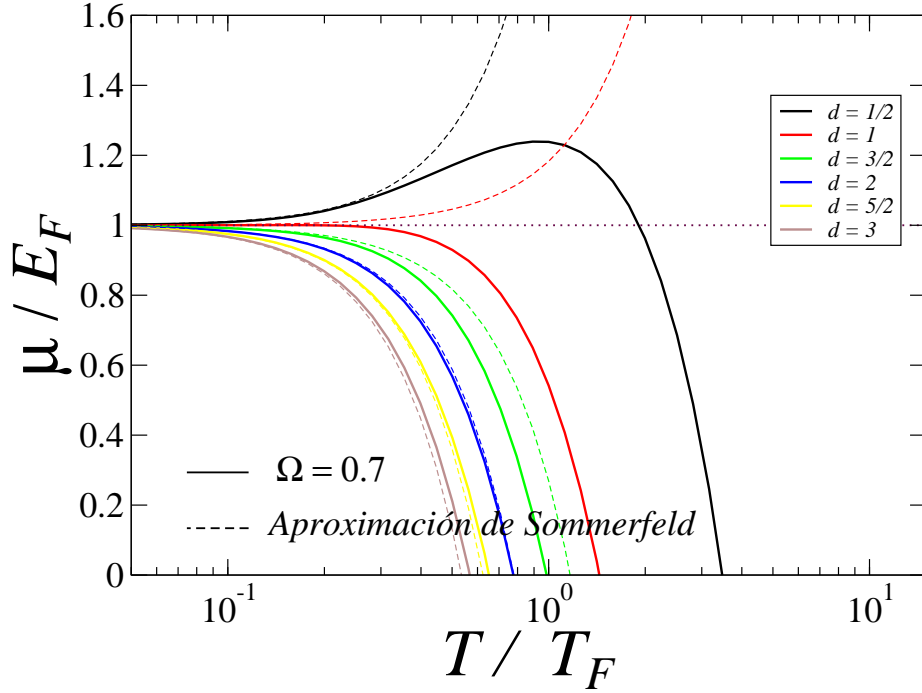


Figura 4.1: Se presenta el potencial químico  $\mu$  como función de la temperatura  $T$ , para dimensión arbitraria y  $\Omega = 0.7$ .  $\mu$  se hizo adimensional con el valor de  $E_F$  y  $T$  está dada en unidades de la temperatura de Fermi  $T_F$ .

y en términos del cociente  $\Omega$ :

$$1 < \frac{2-d}{1-\Omega^2}, \quad (4.5)$$

lo que significa que la anomalía se presenta en el gas relativista a bajas temperaturas cuando la dimensión  $d$  es tal que la desigualdad anterior se satisface, es decir, cuando  $d < \Omega^2 + 1$ . La anomalía nunca sucede si  $d = 3$  pues  $\Omega^2$  siempre es menor que uno. Por otro lado, dicha anomalía siempre sucede si  $d \leq 1$  y cuando  $1 \leq d \leq 2$  dependerá del valor de  $\Omega$ .

En la Figura (4.1) se observa que la aproximación de Sommerfeld describe de manera acertada las dimensiones donde el comportamiento de  $\mu$  es anómalo. También se encuentra que la gráfica, con un valor de el cociente  $\Omega = mc^2/E_F = 0.7$ , es

muy parecida al caso ultrarelativista donde a altas temperaturas se debe comportar decreciente monótonamente como ya se había discutido.

## 4.2. El calor específico a volumen constante $C_V$

La energía interna promedio del GIF-R está dada por la siguiente relación:

$$U = \lambda_R \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} n_\epsilon, \quad (4.6)$$

donde  $n_\epsilon$  es la distribución de Fermi-Dirac. Entonces  $C_V$  es la derivada parcial de  $U$  respecto a  $T$  a volumen constante:

$$C_V = \lambda_R \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial n_\epsilon}{\partial \beta}.$$

Calculando por separado la derivada parcial de  $n_\epsilon$  respecto a  $\beta$ :

$$\frac{\partial n_\epsilon}{\partial \beta} = -\frac{\exp[\beta(\epsilon - \mu)]}{(1 + \exp[\beta(\epsilon - \mu)])^2} \left[ \epsilon - \left( \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) \right],$$

la cual puede reescribirse como:

$$\frac{\partial n_\epsilon}{\partial \beta} = n_\epsilon (n_\epsilon - 1) \left[ \epsilon - \left( \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) \right]. \quad (4.7)$$

al sustituir la cantidad anterior en la ecuación para  $C_V$  se obtiene:

$$C_V = \lambda_R \left( \frac{\partial \beta}{\partial T} \right) \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} n_\epsilon (n_\epsilon - 1) \left[ \epsilon - \left( \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) \right],$$

donde la cantidad  $\left( \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right)$  puede obtenerse a partir de la ecuación de densidad de partículas (4.2) y se calcula en el Apéndice (6.5).

La última ecuación se hace adimensional al dividir por  $dN\kappa_B$ , que corresponde al valor de  $C_V$  relativista clásico (ley de Dulong-Petit) para cada dimensión. En este caso se utiliza el valor de  $N$  que a  $T = 0$ ,  $N^0$ , está en términos de la energía de Fermi dada por la relación (4.3). Se obtiene:

$$\frac{C_V}{dN^0\kappa_B} = \frac{(\kappa_B T)^{-2}}{(E_F^2 - m^2 c^4)^{d/2}} \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} n_\epsilon (n_\epsilon - 1) \left[ \left( \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) - \epsilon \right],$$

al realizar el cambio de variable  $x = \epsilon T_F / T E_F$  se obtiene una expresión que se puede graficar como función de la temperatura:

$$\frac{C_V}{dN^0\kappa_B} = \frac{\tau}{(1 - \Omega)^{d/2}} \int_{\Omega/\tau}^{\infty} dx x^2 ([x\tau]^2 - \Omega)^{d/2-1} n_x (n_x - 1) [\hat{\mu} - [x\tau]], \quad (4.8)$$

donde  $\tau = T/T_F$  y  $\hat{\mu}$  es la forma adimensional de  $\left( \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right)$  al dividir por  $E_F$ .

El comportamiento de  $C_V$  en este caso también depende del cociente  $\Omega$  como se muestra en la Figura (4.2), donde se observa que para valores cercanos a 1 de este, el GIF-R es más susceptible en una región de temperaturas más pequeño. Explicado de otra manera, el comportamiento creciente de  $C_V$  en el GIF-R sucede a temperaturas más chicas cuando  $\Omega$  se acerca a 1, lo que significa que el gas es demasiado masivo y no se debe despreciar la masa en reposo.

Por otro lado cuando  $\Omega$  es muy cercano a 1, se puede observar que en un intervalo de temperaturas considerable el calor específico permanece en un valor constante que se puede identificar en la Figura (4.2) como una “meseta”. Lo que está relacionado con la escala adimensional que se ha elegido. Me explico, la escala de temperaturas es  $\tau = T/T_F = T/(E_F/\kappa_B)$  y al considerar la relación (4.3) se muestra que la energía de Fermi depende de la masa en reposo, de esta manera  $mc^2$  modifica parte el comportamiento usual de  $C_V$ .

Como se ha hecho anteriormente, al considerar el régimen de bajas temperaturas se puede encontrar una expresión para  $C_V$  que demuestre su comportamiento lineal hasta cero, como función de  $T$ . Utilizando el desarrollo de Sommerfeld

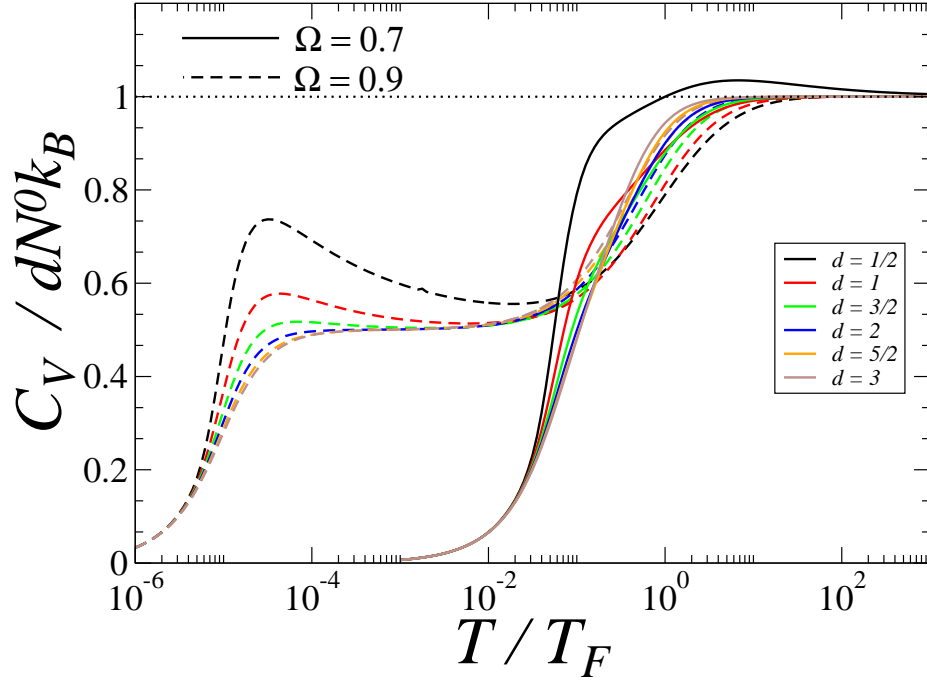


Figura 4.2: Se presenta el calor específico  $C_V$  como función de la temperatura  $T$ , para dimensión arbitraria. El primero hizo adimensional con  $dN\kappa_B$  y  $T$  está dada en unidades de la temperatura de Fermi  $T_F$ .

para la energía (2.10) y la densidad de estados relativista (4.1), se obtiene que  $C_V/dN^0\kappa_B = (\pi^2\kappa_B T/3E_F[1 - \Omega^2])$ . A altas temperaturas se comporta como la ley de Dulong-Pettit para cada dimensión. También se observa que tanto en la ecuación (4.8) como en la aproximación de Sommerfeld, el caso en el que  $\Omega = 1$  no es posible porque significaría que no hay partículas iniciales.

### 4.3. La compresibilidad isotérmica $K_T$

Al considerar la ecuación que describe la densidad de partículas (4.2), se puede obtener directamente  $K_T$  de la definición (2.20), como:

$$K_T = \frac{1}{n^2} \frac{\lambda_R}{V} \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} \frac{\partial n_\epsilon}{\partial \mu}, \quad (4.9)$$

calculando por separado la derivada parcial de  $n_\epsilon$  respecto a  $\mu$ , se obtiene:

$$\frac{\partial n_\epsilon}{\partial \mu} = \frac{\beta \exp[\beta(\epsilon - \mu)]}{(1 + \exp[\beta(\epsilon - \mu)])^2} = \beta n_\epsilon (1 - n_\epsilon), \quad (4.10)$$

y de esta forma  $K_T$  queda como:

$$K_T = \frac{1}{\kappa_B T n^2} \frac{\lambda_R}{V} \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} [n_\epsilon (1 - n_\epsilon)],$$

que depende de la constante relativista y de la densidad de partículas. La relación anterior se calcula de forma numérica representada en la Figura (4.3) como función de la temperatura. Para obtener la forma adimensional de  $K_T$  se considera la compresibilidad isotérmica a  $T = 0$ , cuyo cálculo se encuentra en el Apéndice (6.4), a decir:

$$K_{T=0} = \left( \frac{-d^2}{\lambda_R/V} \right) \frac{E_F}{(E_F^2 - m^2 c^4)^{d/2}},$$

y entonces:

$$\frac{K_T}{K_{T=0}} = \frac{(1 - \Omega^2)}{d^2 \tau^3} \frac{\int_{\Omega/\tau}^{\infty} dx x ([x\tau]^2 - \Omega^2)^{d/2-1} n_x (1 - n_x)}{\left( \int_{\Omega/\tau}^{\infty} dx x ([x\tau]^2 - \Omega^2)^{d/2-1} n_x \right)^2}, \quad (4.11)$$

donde  $n_x = [1 + z^{-1} \exp(x)]^{-1}$ , es la forma adimensional de la distribución de Fermi-Dirac porque se hizo el cambio de variable  $x = \epsilon T_F / T E_F$ . En la ecuación anterior se

exhibe la dependencia de la compresibilidad isotérmica con el valor del cociente  $\Omega$ .

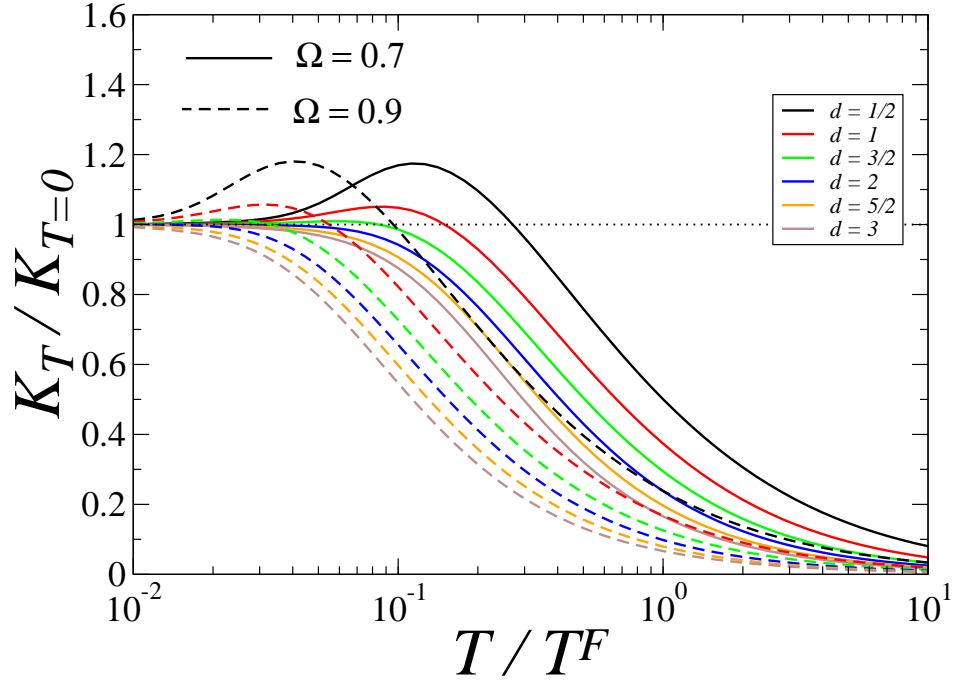


Figura 4.3: Se presenta la compresibilidad isotérmica  $K_T$  como función de la temperatura  $T$ , para dimensión arbitraria.  $K_T$  hizo adimensional con el valor de  $K_{T=0}$  y  $T$  con la temperatura de Fermi  $T_F$ .

En la Figura (4.3) se observa que el GIF-R se hace más compresible a temperaturas pequeñas cuando el valor de  $\Omega$  es muy cercano a uno, de manera análoga que en  $C_V$ , el sistema es más susceptible en el régimen de temperaturas pequeñas. Esto refleja que las propiedades termodinámicas del GIF-R también son susceptibles al valor de la masa en reposo. Por otro lado, se observa que la anomalía en ambas susceptibilidades permanece para un valor de la dimensión y de  $\Omega$  determinados en la sección (4.1.1) para dimensiones  $d < 1$ .



## 4.4. La creación de pares partícula-antipartícula

La solución de la ecuación de Dirac predice la creación de pares de partícula-antipartícula a altas temperaturas como se mencionó en el Capítulo 3. En el caso considerado en esta sección, el gas ideal de Fermi relativista con la creación de pares partícula-antipartícula (GIF-R-PAP), la ecuación que describe la densidad de partículas queda como sigue:

$$n = \frac{\lambda_R}{V} \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon(\epsilon^2 - m^2c^4)^{d/2-1} [n_\epsilon - \bar{n}_\epsilon], \quad (4.12)$$

donde se ha hecho explícito que  $n = N - \bar{N}$  es una cantidad conservada. Para hacer adimensional la relación anterior se considera de nuevo el cociente de  $N$  por la expresión del número de partículas a  $T = 0$  en términos de la energía de Fermi dado por la ecuación (4.3), así:

$$1 = \frac{d}{(E_F^2 - m^2c^4)^{d/2}} \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon(\epsilon^2 - m^2c^4)^{d/2-1} [n_\epsilon - \bar{n}_\epsilon],$$

al introducir  $\epsilon/E_F$ ,  $\tau = T/T_F$  y con el respectivo cambio de variable se sigue que:

$$1 = \frac{d}{(1 - \Omega^2)^{d/2}} \int_{\Omega/\tau}^{\infty} dx x([x\tau]^2 - \Omega^2)^{d/2-1} [n_\epsilon - \bar{n}_\epsilon],$$

donde se exhibe la corrección debida a las antipartículas y que depende de su distribución de Fermi  $\bar{n}_\epsilon$ . En este caso  $\mu$  también depende del valor del cociente  $\Omega$  además de la dimensión  $d$ , cuyo comportamiento como función de la temperatura se obtiene la Figura (4.4).

De manera similar al caso del GIR-UR cuando se consideran antipartículas, el comportamiento del potencial químico tiende a un valor constante igual a cero de manera general para  $d > 1$ , donde los efectos de la masa en reposo sólo modifican la temperatura en la que  $\mu$  comienza a decrecer. Como se ha discutido anteriormente, la cantidad de partículas iniciales deja de ser relevante a altas temperaturas, donde los

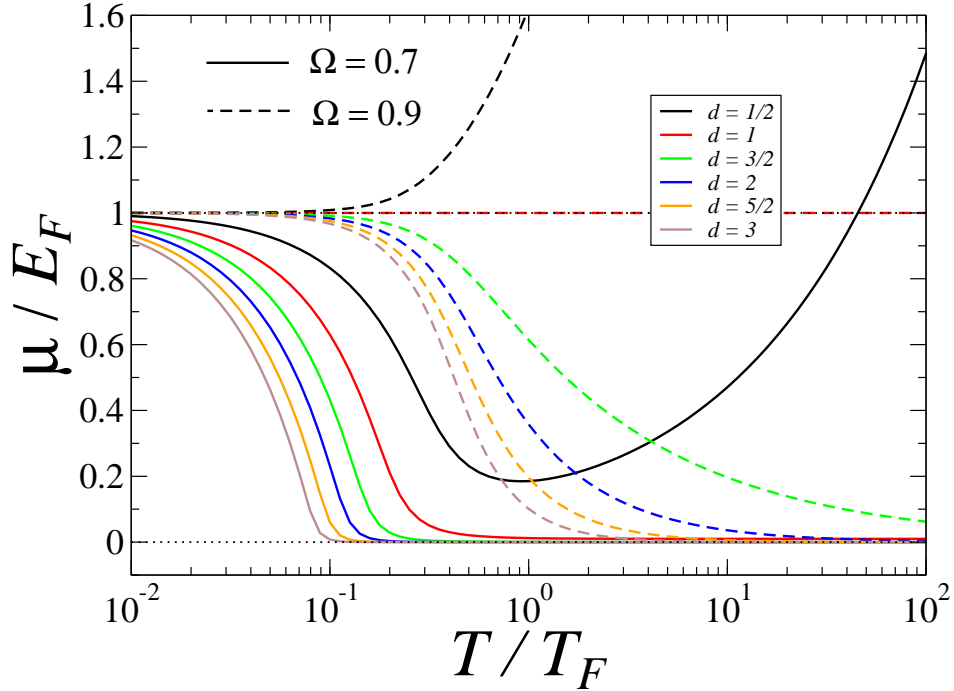


Figura 4.4: Se presenta el potencial químico  $\mu$  con la corrección de antipartículas como función de la temperatura  $T$ , para dimensión arbitraria. Se hizo adimensional con el valor de  $E_F$  en unidades de la temperatura de Fermi  $T_F$ .

efectos de la creación de pares de partícula-antipartícula compensa el comportamiento decreciente de  $\mu$ .

Esto se puede explicar con el argumento dado en la Ref. [13], donde para el caso del GIF-R, cuando sólo se consideran partículas, se encuentra que al aumentar la temperatura estados de energía cercanos a  $E_F$  se encuentran disponibles y en general el potencial químico se observa decreciente cuando  $T \rightarrow \infty$ . Sin embargo, en el caso del GIF-R-PAP en el régimen de altas temperaturas, una cantidad considerable de la energía térmica se utiliza en la creación de los pares de partícula-antipartículas que se crean y ocupan varios de esos niveles que se encuentran disponibles, de esta manera  $\mu$  se compensa y comienza a comportarse como una constante igual a cero.

La variación de los parámetros  $d$  y  $\Omega$  hacen que el comportamiento de  $\mu$  se observe diferente a lo se conoce en la literatura, Ref. [22]. Cuando  $d < 1$ , donde en el caso ultrarelativista se encontró la anomalía, ahora se observa como  $\mu$  diverge en valores de la temperatura muy grandes.

## 4.5. El calor específico a volumen constante con antipartículas

Para calcular el calor específico es necesario conocer la energía interna promedio, que en este caso está dado por la aportación de los pares de partícula-antipartícula:

$$U = \lambda_R \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} [n_\epsilon + \bar{n}_\epsilon], \quad (4.13)$$

análogamente al caso sin antipartículas, se obtiene  $C_V$  al derivar  $U$  respecto a  $T$ :

$$C_V = \lambda_R \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} \left( \frac{\partial \beta}{\partial T} \right) \frac{\partial}{\partial \beta} [n_\epsilon + \bar{n}_\epsilon].$$

Al observar la expresión anterior se encuentra que  $\partial n_\epsilon / \partial \beta$  ya se ha calculado y esta dada por la expresión (4.7). De forma análoga se encuentra que para las antipartículas:

$$\frac{\partial \bar{n}_\epsilon}{\partial \beta} = \bar{n}_\epsilon (\bar{n}_\epsilon - 1) \left[ \epsilon + \left( \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) \right], \quad (4.14)$$

por lo que al sustituir el valor las relaciones (4.7) y (4.14) en la expresión para  $C_V$  relativista se obtiene:

$$C_V = \lambda_R \left( \frac{\partial \beta}{\partial T} \right) \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} \sigma(\epsilon, \mu),$$

donde la función  $\sigma(\epsilon, \mu) = \frac{\partial}{\partial \beta} \{n_\epsilon + \bar{n}_\epsilon\}$  depende de el valor de  $(\mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta})$ . Ambas cantidades se analizan en el Apéndice (6.6).

Para hacer adimensional  $C_V$  se considera el cociente por  $dN\kappa_B$ , donde el valor que se utiliza de  $N$  es en el caso  $T = 0$  y las antipartículas no tienen relevancia. En términos de la energía de Fermi,  $N^0 = \lambda_R/d(E_F^2 - m^2c^4)^{d/2}$ , por lo que:

$$\frac{C_V}{dN^0\kappa_B} = \frac{(\kappa_B T)^{-2}}{(E_F^2 - m^2c^4)^{d/2}} \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 (\epsilon^2 - m^2c^4)^{d/2-1} \sigma(\epsilon, \mu),$$

y entonces la forma adimensional es:

$$\frac{C_V}{dN^0\kappa_B} = \frac{\tau}{(1 - \Omega^2)^{d/2}} \int_{\Omega/\tau}^{\infty} dx x^2 ([x\tau]^2 - \Omega^2)^{d/2-1} \hat{\sigma}(\epsilon, \mu), \quad (4.15)$$

donde  $\hat{\sigma}(\epsilon, \mu)$  es la forma adimensional de  $\sigma(\epsilon, \mu)$  al dividir por  $E_F$ . El comportamiento de  $C_V$  se grafica como función de la temperatura en la Figura (4.5) y se exhibe la dependencia con el valor de la masa en reposo a través del cociente  $\Omega$  además de la dimensión  $d$  del sistema.

En la aproximación ultrarelativista cuando se consideran antipartículas, el calor específico  $C_V$  diverge como una ley de potencias cuyo exponente se relaciona con cada dimensión y por ello simula un comportamiento del gas de Bosones sin masa.<sup>2</sup>En este caso la masa en reposo modifica la pendiente con la que el calor específico diverge a altas temperaturas, además aparece de nuevo un comportamiento constante en un intervalo de temperaturas que se identifica con una “meseta” en la Figura (4.5) y que es consecuencia directa de la masa en reposo como se mencionó en el caso del  $C_V$  del GIF-UR sin antipartículas. En el régimen de bajas temperaturas también se aproxima a cero de manera lineal.

---

<sup>2</sup>La energía interna del gas de Bose ultrarelativista es  $U_B = \lambda_R \Gamma(d) (\kappa_B T)^{d+1} g_d(1)$ , donde  $g_d(x)$  es la función de Bose-Einstein de orden  $d$ . Al derivar respecto a  $T$  se encuentra que  $C_V^B \propto T^d$  para toda  $T$ .

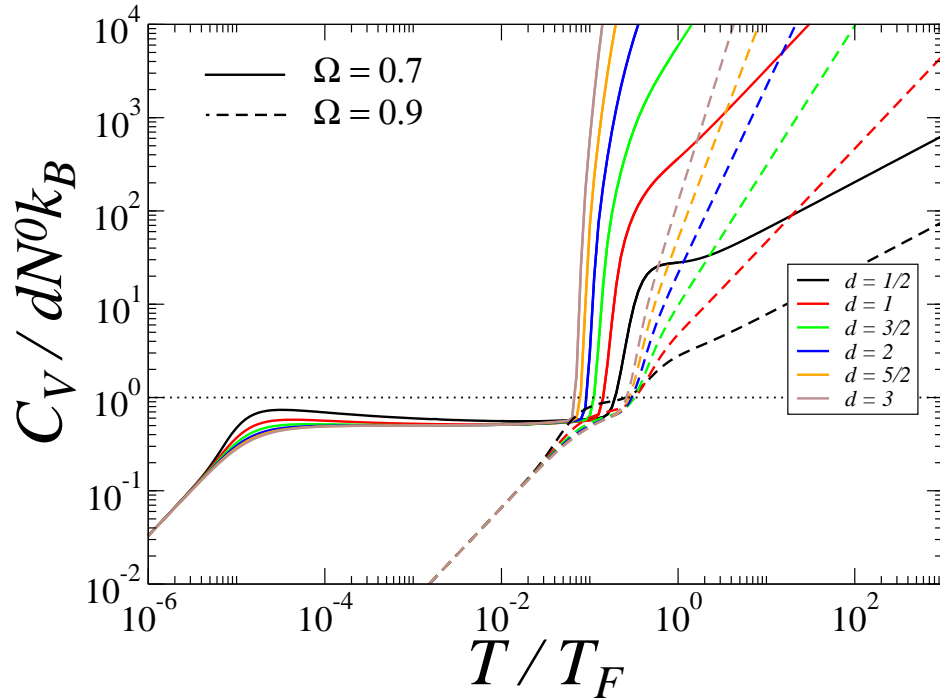


Figura 4.5: Se presenta el calor específico  $C_V$  con la corrección de antipartículas como función de la temperatura  $T$ , para dimensión arbitraria.  $C_V$  se hizo adimensional con el valor de  $dN^0 \kappa_B$  y la temperatura en unidades de  $T_F$ .

## 4.6. La compresibilidad isotérmica con antipartículas

El cálculo de la compresibilidad isotérmica a partir de la definición (2.20), requiere corregir la expresión (4.9) debido a la creación de pares de partícula-antipartícula. La densidad total de partículas esta dada por (4.12), entonces:

$$K_T = \frac{1}{n^2} \frac{\lambda_{UR}}{V} \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} \frac{\partial}{\partial \mu} [n_\epsilon - \bar{n}_\epsilon]. \quad (4.16)$$

Al observar la expresión anterior se encuentra que la derivada parcial de  $n_\epsilon$  respecto a  $\mu$ , ya se ha calculado y esta dado por la expresión (4.10). De manera análoga para las antipartículas se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{n}_\epsilon}{\partial \mu} = -\beta \bar{n}_\epsilon (1 - \bar{n}_\epsilon), \quad (4.17)$$

por lo que al introducir las expresiones (4.10) y (4.17) en la expresión para la compresibilidad isotérmica se obtiene:

$$K_T = \frac{1}{\kappa_B T n^2} \frac{\lambda_R}{V} \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} [n_\epsilon (1 - n_\epsilon) + \bar{n}_\epsilon (1 - \bar{n}_\epsilon)],$$

la cual depende explícitamente de la densidad de partículas  $n$ . Para hacer adimensional la ecuación anterior se considera la cantidad  $K_{T=0}$ .

Dado que a  $T = 0$  las antipartículas no tienen relevancia, la energía interna promedio a esa temperatura es la misma que en el caso sin antipartículas, entonces es posible utilizar  $K_{T=0} = (-d^2 V E_F / \lambda_R (E_F^2 - m^2 c^4)^{d/2})$ , de manera que:

$$\frac{K_T}{K_{T=0}} = \frac{(1 - \Omega^2)^{d/2}}{d^2 \tau^3} \frac{\int_{\Omega}^{\infty} dx \ x ([x\tau]^2 - \Omega^2)^{d/2-1} [n_x (1 - n_x) + \bar{n}_x (1 - \bar{n}_x)]}{\left( \int_{\Omega/\tau}^{\infty} dx \ x ([x\tau]^2 - \Omega^2)^{d/2-1} [n_x - \bar{n}_x] \right)^2}.$$

La gráfica que representa el comportamiento de  $K_T$  como función de la temperatura y del valor de  $\Omega$  se muestra en la Figura (4.6).

Al observar el comportamiento de  $K_T$  en la Figura (4.6), se encuentra que es muy similar al que se describe en la aproximación ultrarelativista del Capítulo 3. Anteriormente se discutió que para dimensiones  $d > 1$  en la aproximación ultrarelativista del GIF, la compresibilidad isotérmica  $K_T$  *tiende asintóticamente* al comportamiento de un gas de Bosones sin masa cuando  $T \rightarrow \infty$ . Sin embargo para  $d < 1$ ,  $K_T$  parece comportarse como en el GIF-UR sin antipartículas, donde estas parecen tener relevancia a temperaturas mas altas, por ejemplo cuando  $d = 1/2$  el gas se hace menos

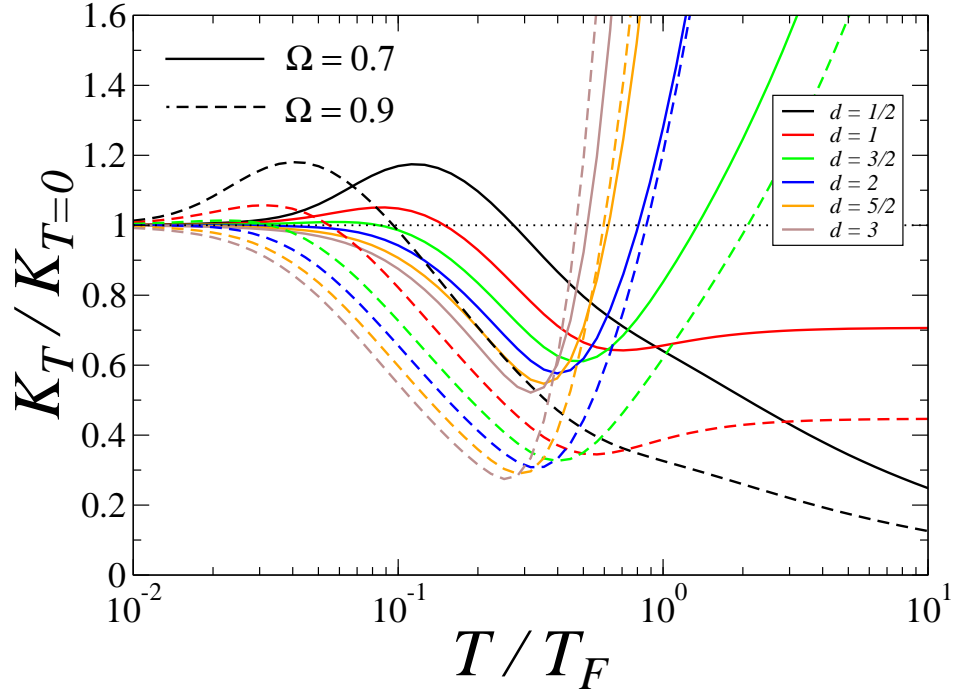


Figura 4.6: Se presenta la compresibilidad isotérmica  $K_T$  con la corrección de las antipartículas como función de la temperatura  $T$ , para dimensión arbitraria.  $K_T$  hizo adimensional con el valor de  $K_{T=0}$  y  $T$  está dada en unidades de la temperatura de Fermi  $T_F$ .

compresible con el incremento de  $T$ .

En el caso  $d = 1$  se observa un comportamiento intermedio, pues muestra que el gas se hace menos compresible en un intervalo de temperaturas, después cuando  $T$  sigue aumentando la compresibilidad se hace constante debido a la creación de los pares de partícula-antipartícula que compensan los efectos de la temperatura. Es decir, cuando sólo hay partículas la energía cinética promedio es muy grande con el incremento de  $T$  y el GIF-R se hace menos compresible, pero cuando se consideran las antipartículas parte de la energía debida al incremento de  $T$  se utiliza en los procesos de creación y aniquilación de pares de partícula-antipartícula, por lo que

parece que  $K_T$  tiende a ser constante.

Cuando el valor de  $\Omega$  es muy cercano a 1, se encuentra que la compresibilidad isotérmica describe el comportamiento anterior para valores más chicos de la temperatura.

## 4.7. La razón entre partículas y antipartículas como función de la temperatura

La razón entre el número de partículas  $N$  y antipartículas  $\bar{N}$ , ahora depende de  $\Omega$  descrito por el cociente de las siguientes integrales:

$$\frac{\bar{N}}{N} = \frac{\int_{\Omega/\tau}^{\infty} dx \ x([x\tau]^2 - \Omega^2)^{d/2-1} \bar{n}_\epsilon}{\int_{\Omega/\tau}^{\infty} dx \ x([x\tau]^2 - \Omega^2)^{d/2-1} n_\epsilon}, \quad (4.18)$$

donde se exhibe la dependencia con la distribución de Fermi correspondiente  $n_\epsilon$  y  $\bar{n}_\epsilon$ . Se espera que en el régimen de bajas temperaturas la razón anterior tienda a cero debido al comportamiento de las antipartículas, que es nulo en esa región de la temperatura. Por el contrario cuando  $T$  se aumenta, se espera un equilibrio entre  $N$  y  $\bar{N}$  lo que estaría de acuerdo con el comportamiento de  $\mu$  que tiende a cero a altas temperaturas, describiendo de esta forma un gas de Bosones sin masa. Esto significa que se crean tantas partículas como antipartículas y la cantidad  $\bar{N}/N$  tiende a 1.

En la Figura (4.7) se muestra que  $\bar{N}/N$  también es susceptible al valor del cociente  $\Omega$ , es decir, para una masa en reposo  $mc^2$  muy cercana a  $E_F$  la creación de pares de partícula-antipartícula sucede a temperaturas mas pequeñas que en lo observado en la aproximación ultrarelativista. Además es claro que para dimensiones mayores la creación de pares sucede de manera más abrupta simulando una función escalón, en dimensiones menores la creación de pares es más tardado.

Con lo anterior se puede relacionar la temperatura en la cual la curva que se describe para cada dimensión en la Figura (4.7) tiene su punto de inflexión, con el com-



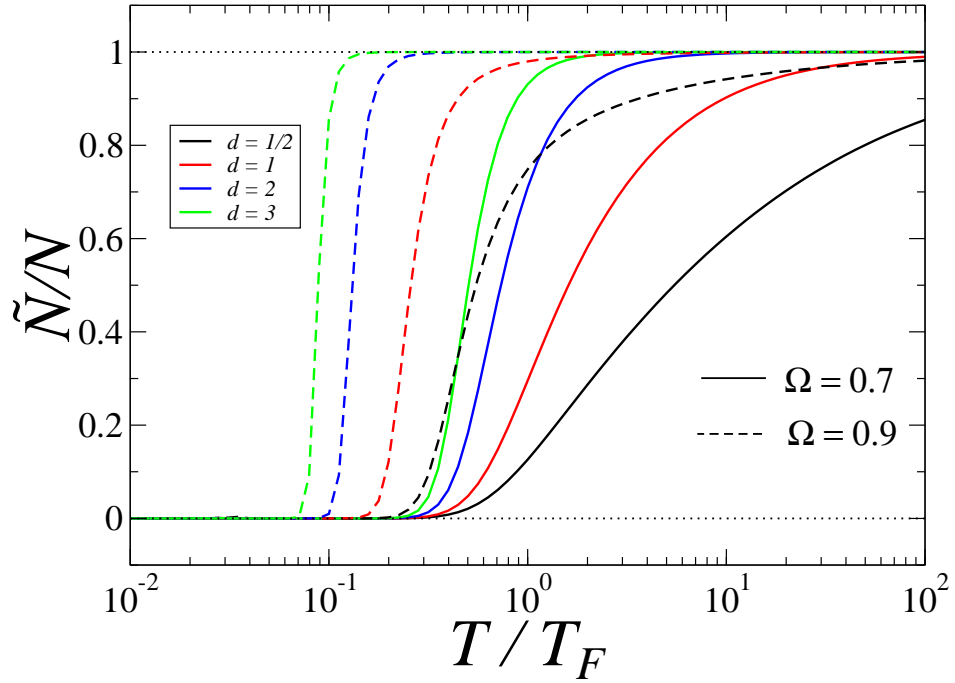


Figura 4.7: Se presenta la razón entre antipartículas  $\bar{N}$  y partículas  $N$  del gas ideal de Fermi relativista como función de la temperatura  $T$ , se incluyen como parámetros del valor del cociente  $\Omega$  y la dimensión  $d$ .

portamiento de las susceptibilidades termodinámicas como  $C_V$  y  $K_T$ . Sin embargo, dicho cálculo no se incluye en esta revisión y sólo se muestran los efectos de la masa en reposo de manera cualitativa en las figuras anteriores.

# Capítulo 5

## Conclusiones

Se estudió el gas ideal de Fermi ultrarelativista y relativista, en particular se realizó un análisis de la dependencia con la temperatura del potencial químico  $\mu$ , y las susceptibilidades termodinámicas: el calor específico  $C_V$  y la compresibilidad isotérmica  $K_T$ . También se consideraron los importantes efectos de la mecánica cuántica relativista, explícitamente: la creación de pares de partícula-antipartícula, los cuales son importantes a altas energías, en nuestro caso, en el régimen de altas temperaturas. Los comportamientos obtenidos de dichas propiedades son importantes debido al interés teórico en el estudio de sistemas de partículas y materia condensada que involucran la relación de dispersión relativista  $\epsilon_k = \sqrt{\hbar^2 k^2 c^2 + m^2 c^4}$ , tales como gases de electrón-pósitron ( $e^-e^+\gamma$ ), Ref. [6] y estrellas enanas blancas, Ref. [7].

La aproximación ultrarelativista fue de gran importancia porque permitió comprender en una primera aproximación el comportamiento de dichos sistemas físicos. El formalismo que se utilizó en el análisis involucró las propiedades de las funciones de Fermi-Dirac a través de las funciones especiales del Poli-logaritmo que han sido estudiadas ampliamente, Ref. [10],[9]. Con ayuda de estas funciones y su solución numérica en cada caso, me fue posible comprender como  $\mu$  se comporta de manera diferente para cada dimensión, con un similitud entre los casos no relativista y ultrarelativista del gas ideal de Fermi, así como las condiciones necesarias para que la anomalía que se reporta en Ref. [17] fuera posible. De manera que, para el caso no relativista dicha anomalía aparece en dimensiones  $d < 2$  y para el caso ultrarelativista

en  $d < 1$ , donde  $\mu$  primero es una función creciente en un intervalo de temperaturas y después es decreciente para  $T \gg T_F$ . Por otro lado el comportamiento intrínseco del calor específico  $C_V$  y de la compresibilidad isotérmica  $K_T$  para diferentes dimensiones, es similar en esos dos sistemas, donde también se refleja una anomalía bajo las mismas condiciones que en  $\mu$  para la dimensionalidad.

Al considerar la creación de las antipartículas, se encontró que  $\mu$  tiende a cero a altas temperaturas sólo para  $d > 1$ . Dado que el potencial químico de un gas de bosones sin masa es cero para toda temperatura, el resultado anterior se interpreta como una equivalencia entre el gas de Fermi y dicho gas de Bose en el límite  $T \rightarrow \infty$ . En el caso de una dimensión se encontró que  $\mu = E_F$  para toda temperatura, lo que le da características importantes a esta dimensión de confinamiento y se ve reflejado en el comportamiento lineal de  $C_V/N\kappa_B = \pi^3 T/3T_F$  y el comportamiento constante de  $K_T/K_{T=0} = 1$  para toda temperatura, debido a la creación de pares de partícula-antipartícula.

Sin embargo al considerar el caso exacto relativista la representación a través de  $f_\nu(z)$  ya no fue posible, porque las ecuaciones de estado que dependen de la densidad de estados se ve modificada por la masa en reposo de las partículas. La masa en reposo puede describir un gas de partículas masivo y no permite encontrar las susceptibilidades termodinámicas de manera analítica.

En el caso del gas relativista exacto también se consideró la creación de las antipartículas y se observó un comportamiento similar en las propiedades termodinámicas para diferentes dimensiones. Sin embargo, en este caso las susceptibilidades dependen fuertemente del valor del cociente  $\Omega = mc^2/E_F$ , porque se modifica la escala con la que se hacen adimensionales los sistemas debido a la dependencia de  $E_F$  con  $\Omega$ , tal y como se discutió en el Capítulo 4. Además, se encontraron las condiciones necesarias para que la anomalía de la que se ha hablado, Ref. [17], aparezca en el caso relativista que depende de la dimensión  $d$  y el valor de cociente  $\Omega$  que se encuentra entre cero y uno. La anomalía sucede cuando la desigualdad (4.5) se satisface, es decir, cuando  $d < \Omega^2 + 1$ . Como consecuencia, el calor específico diverge a altas temperaturas alejándose por completo del valor de la ley de Dulong-Petit y la compresibilidad isotérmica diverge también para valores muy grandes de la temperatura

haciéndose el sistema infinitamente compresible.

Los resultados anteriores se pueden enriquecer con un análisis posterior en el que se pretende encontrar el valor de la temperatura  $T_m$  donde  $\mu$ ,  $C_V$  y  $K_T$  tienen su valor máximo, tanto en el caso del gas ideal de Fermi no relativista como el ultrarelativista. Dichas anomalías se pueden relacionar con una posible transición de fase con un argumento donde se analiza la relación entre la energía interna y la entropía del sistema, donde en un intervalo de temperaturas primero domina la energía interna en la energía libre de Helmholtz y después la entropía es la que domina dicha cantidad, con lo que se podría interpretar como una transición continua o de segundo orden. Por otro lado el análisis del gas ideal de Fermi relativista puede extenderse al considerar la atracción gravitacional entre las partículas con masa. Tales sistemas son propios del área de la astrofísica y se encuentran en las estrellas enanas blancas, donde se permitiría mejorar los cálculos y aproximaciones de las propiedades termodinámicas con el calor específico y la compresibilidad isotérmica.

# Capítulo 6

## Apéndice

### 6.1. Funciones elementales de Fermi-Dirac

Las ecuaciones de estado que se obtienen en el capítulo 2 y 3, involucran integrales del tipo:

$$F_\nu(z) = \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1} \exp(x) + 1},$$

donde los parámetros son la fugacidad  $0 \leq z < \infty$  y  $\nu > 0$ . A partir de esta integral se definen las funciones especiales de Fermi-Dirac de orden  $\nu$ , Ref. [2], como:

$$f_\nu(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} F_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1} \exp(x) + 1},$$

Las funciones  $f_\nu(z)$  y  $f_{\nu-1}(z)$  están conenctadas a partir de la siguiente relación de recurrencia:

$$\frac{\partial}{\partial z} f_\nu(z) = \frac{1}{z} f_{\nu-1}(z).$$

Cuando  $T \rightarrow \infty$ , entonces  $\mu$  es una cantidad muy negativa entonces el argumento de  $\exp(\mu/\kappa_B T)$  es muy chico por lo que  $z \rightarrow 0$ , si esto sucede entonces la función de Fermi-Dirac se puede aproximar como  $f_\nu(z) \simeq z$  en el régimen de altas temperaturas. La función Polilogaritmo  $Li_m(z)$ , está relacionada con la integral de Fermi-Dirac

como  $f_\nu(z) = -Li_\nu(-z)$ .

La función de Fermi-Dirac de orden cero de  $z$  que se consideran en las secciones 3.2 y 3.3, se comporta como:

$$f_0(z) = \frac{z}{1+z},$$

de modo que al considerar las antipartículas se obtiene:

$$f_0(z) + f_0(z^{-1}) = \frac{z}{1+z} + \frac{z^{-1}}{1+z^{-1}} = 1$$

También, la función de Fermi-Dirac de orden uno de  $z$  se comporta como:

$$f_1(z) = \ln[1+z],$$

de modo que al considerar las antipartículas se obtiene:

$$f_1(z) - f_1(z^{-1}) = \ln[1+z] - f_1(z) = \ln[1+z] = \ln[z^{-1}]$$

La función de Fermi-Dirac de orden dos de  $z$  se comporta como:

$$f_2(z) = \int_0^z dx \frac{\ln(1+x)}{x},$$

de manera que la relación entre  $f_2(z)$  y  $f_2(z^{-1})$  que se necesita en la sección se calcula como:

$$f_2(z) + f_2(z^{-1}) = \int_0^z dx \frac{\ln(1+x)}{x} + \int_0^{z^{-1}} dx \frac{\ln(1+x)}{x},$$

manipulando las integrales:

$$= 2 \int_0^1 dx \frac{\ln(1+x)}{x} + \int_1^z dx \frac{\ln(1+x)}{x} - \int_{z^{-1}}^1 dx \frac{\ln(1+x)}{x},$$

realizando el cambio de variable  $u = x^{-1}$  en el último término entonces:

$$= 2 \int_0^1 dx \frac{\ln(1+x)}{x} + \int_1^z du \frac{\ln(u^{-1}) + \ln(1+u)}{u} - \int_1^z dx \frac{\ln(1+x)}{x},$$

se sigue que:

$$= 2 \int_0^1 dx \frac{\ln(1+x)}{x} + \int_1^z du \frac{\ln(u)}{u}$$

y entonces:

$$f_2(z) + f_2(z^{-1}) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln[u]_{u=1}^z \quad (6.1)$$

## 6.2. Cálculo de $K_{T=0}$ para GIF-NR

La compresibilidad isotérmica a  $T = 0$  se calcula como:

$$K_{T=0} = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial^2 U^0}{\partial V^2} \right)^{-1},$$

donde la energía a  $T = 0$  dada por:

$$U^0 = \lambda_{NR} \int_0^{E_F} d\epsilon \epsilon^{d/2} = \left( \frac{2}{d+2} \right) \lambda_{NR} E_F^{d/2+1}.$$

La constante no relativista y la energía de Fermi son funciones de la temperatura por lo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^0}{\partial V} &= \left( \frac{2}{d+2} \right) \frac{\partial}{\partial V} [\lambda_{NR} E_F^{d/2+1}] \\ \frac{\partial U^0}{\partial V} &= \left( \frac{2}{d+2} \right) \left[ \lambda_{NR} \frac{\partial E_F^{d/2+1}}{\partial V} + E_F^{d/2+1} \frac{\partial \lambda_{NR}}{\partial V} \right] \end{aligned}$$

Calculando por separado las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \lambda_{NR}}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left( \left( \frac{L}{2\pi} \right)^d \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{d/2} \right) = \frac{\lambda_{NR}}{V}$$

$$\frac{\partial E_F^{d/2+1}}{\partial V} = \left( \frac{d+2}{2} \right) E_F^{d/2} \frac{\partial E_F}{\partial V} = \left( \frac{d+2}{d} \right) \frac{-E_F^{d/2+1}}{V},$$

donde se utilizó el hecho de que la energía de Fermi es  $E_F = (dN/2\lambda_{NR})^{2/d}$ , entonces:

$$\frac{\partial E_F}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{dN}{2\lambda_{NR}} \right)^{2/d} = \frac{2}{d} \left( \frac{dN}{2\lambda_{NR}} \right)^{2/d-1} \frac{dN}{2} \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{1}{\lambda_{NR}} \right)$$

$$\frac{\partial E_F}{\partial V} = \frac{2}{d} \left( \frac{dN}{2\lambda_{NR}} \right)^{2/d-1} \frac{dN}{2\lambda_{NR}} \left( \frac{-1}{V} \right) = \frac{-E_F}{V} \frac{2}{d}.$$

Al sustituir en la expresión para la primera derivada parcial de la energía a  $T = 0$  se obtiene que:

$$\frac{\partial U^0}{\partial V} = \left( \frac{2}{d+2} \right) \left[ \lambda_{NR} \left( \frac{d+2}{d} \right) \left( \frac{-E_F^{d/2+1}}{V} \right) + E_F^{d/2+1} \frac{\lambda_{NR}}{V} \right]$$

$$\frac{\partial U^0}{\partial V} = E_F^{d/2+1} \frac{\lambda_{NR}}{V} \left[ \left( \frac{2}{d+2} \right) - \left( \frac{2}{d} \right) \right]$$

$$\frac{\partial U^0}{\partial V} = E_F^{d/2+1} \frac{\lambda_{NR}}{V} \left( \frac{-4}{d(d+2)} \right),$$

entonces la segunda derivada respecto al volumen  $V$  es:

$$\frac{\partial^2 U^0}{\partial V^2} = \frac{\lambda_{NR}}{V} \left( \frac{-4}{d(d+2)} \right) \frac{\partial E_F^{d/2+1}}{\partial V}$$

$$\frac{\partial^2 U^0}{\partial V^2} = \frac{\lambda_{NR}}{V} \left( \frac{-4}{d(d+2)} \right) \left( \frac{d+2}{d} \right) \frac{-E_F^{d/2+1}}{V}$$

$$\frac{\partial^2 U^0}{\partial V^2} = \frac{\lambda_{NR}}{V} \left( \frac{4}{d^2} \right) \frac{E_F^{d/2+1}}{V},$$



con este cálculo es posible determinar la compresibilidad isotérmica a  $T = 0$  como se sigue:

$$K_{T=0} = \left[ \frac{\lambda_{NR}}{V} \left( \frac{4}{d^2} \right) E_F^{d/2+1} \right]^{-1}.$$

### 6.3. Cálculo de $K_{T=0}$ para GIF-UR

El cálculo se realiza de la misma forma que en el caso GIF-NR, al considerar la energía a  $T = 0$ :

$$U^0 = \lambda_R (d+1)^{-1} E_F^{d+1}.$$

Calculando por separado la derivada parcial de  $U^0$  respecto a  $V$ :

$$\frac{\partial U^0}{\partial V} = (d+1)^{-1} \frac{\partial}{\partial V} (E_F^{d+1} \lambda_R),$$

donde la constante  $\lambda_R$  y  $E_F$  dependen del volumen:

$$\frac{\partial U^0}{\partial V} = (d+1)^{-1} \left[ E_F^{d+1} \frac{\partial \lambda_R}{\partial V} + \lambda_{UR} \frac{\partial E_F^{d+1}}{\partial V} \right].$$

Primero se calcula la derivada parcial de  $\lambda_R$  respecto a  $V$ :

$$\frac{\partial \lambda_R}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left[ \left( \frac{L}{2\pi} \right)^d \left( \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \right) \left( \frac{1}{\hbar c} \right)^d \right] = \frac{\lambda_R}{V},$$

luego, usando la regla de la cadena para  $E_F = [dN\lambda_R^{-1}]^{1/d}$  se tiene que:

$$\frac{\partial E_F^{d+1}}{\partial V} = (d+1) E_F^d \frac{\partial E_F}{\partial V} = (d+1) E_F^d \left( -\frac{1}{d} \frac{E_F}{V} \right) = -\left( \frac{d+1}{d} \right) \frac{E_F^{d+1}}{V}$$

donde se utilizó que:

$$\frac{\partial E_F}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} [dN\lambda_R^{-1}]^{1/d} = \frac{1}{d} [dN\lambda_R^{-1}]^{1/d-1} \left( dN \frac{\partial \lambda_R^{-1}}{\partial V} \right)$$

$$\frac{\partial E_F}{\partial V} = \frac{1}{d} [dN\lambda_R^{-1}]^{1/d-1} [dN\lambda_R^{-1}]^{-1} \frac{-1}{V} = \left( -\frac{1}{d} \frac{E_F}{V} \right)$$

entonces:

$$\frac{\partial U^0}{\partial V} = (d+1)^{-1} \left[ E_F^{d+1} \frac{\lambda_R}{V} - \left( \frac{d+1}{d} \right) E_F^{d+1} \frac{\lambda_R}{V} \right].$$

$$\frac{\partial U^0}{\partial V} = \frac{1}{d+1} \left( 1 - \left( \frac{d+1}{d} \right) \right) E_F^{d+1} \frac{\lambda_R}{V}$$

$$\frac{\partial U^0}{\partial V} = \frac{-1}{d(d+1)} \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \right)^d \left( \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \right) \left( \frac{1}{\hbar c} \right)^d \right] E_F^{d+1}$$

Después la segunda derivada de la energía a  $T = 0$  respecto al volumen es:

$$\frac{\partial^2 U^0}{\partial V^2} = \frac{-1}{d(d+1)} \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \right)^d \left( \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \right) \left( \frac{1}{\hbar c} \right)^d \right] \frac{\partial E_F^{d+1}}{\partial V}$$

pero la derivada parcial de  $E_F^{d+1}$  respecto a  $V$  ya se conoce, entonces:

$$\frac{\partial^2 U^0}{\partial V^2} = \frac{-1}{d(d+1)} \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \right)^d \left( \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \right) \left( \frac{1}{\hbar c} \right)^d \right] \left( - \left( \frac{d+1}{d} \right) \frac{E_F^{d+1}}{V} \right)$$

$$\frac{\partial^2 U^0}{\partial V^2} = \frac{1}{d^2} \frac{\lambda_R}{V} \frac{E_F^{d+1}}{V}$$

De esta forma se encuentra  $K_{T=0}$  dado por:

$$K_{T=0} = \left( \frac{1}{d^2} \frac{\lambda_R}{V} E_F^{d+1} \right)^{-1}$$

## 6.4. Cálculo de $K_{T=0}$ para GIF-R

La energía  $U^0$  a  $T = 0$  es la siguiente:

$$U^0 = \lambda_R \int_{mc^2}^{E_F} d\epsilon \epsilon^2 (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1},$$

si trabajamos con la integral se puede encontrar  $\frac{\partial^2 U^0}{\partial V^2}$ , a través del Teorema Fundamental del Cálculo. Entonces:

$$\frac{\partial U^0}{\partial V} = \lambda_R \frac{\partial}{\partial V} \left\{ \int_{mc^2}^{E_F} d\epsilon \epsilon^2 (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} \right\}$$

se sigue que:

$$\frac{\partial U^0}{\partial V} = \lambda_R E_F^2 (E_F^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} \frac{\partial E_F}{\partial V}$$

Después de un proceso algebraico muy extenso se encuentra que:

$$K_{T=0} = \frac{-d^2 V E_F}{\lambda_R (E_F^2 - m^2 c^4)^{d/2}}$$

## 6.5. Cálculo de $\left(\mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right)$ en $C_V$ para GIF-R

La cantidad  $\left(\mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right)$  puede obtenerse a partir de la ecuación de densidad de partículas, al no depender de la temperatura. Se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial \beta} = 0 &= \frac{\lambda_R}{V} \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} \frac{\partial n_\epsilon}{\partial \beta}, \\ 0 &= \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} n_\epsilon (n_\epsilon - 1) \left[ \epsilon - \left( \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) \right], \end{aligned}$$

donde se puede sacar  $\left(\mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right)$  de la integral y obtener de forma explícita al utilizar la igualdad:

$$\left(\mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right) = \frac{\int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} [n_\epsilon (n_\epsilon - 1)]}{\int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} [n_\epsilon (n_\epsilon - 1)]},$$

## 6.6. Análisis de $\sigma(\epsilon, \mu)$ y de $\left(\mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right)$ en el GIF-R-PAP

La función sigma está dada por:

$$\sigma(\epsilon, \mu) = \left\{ n_\epsilon(n_\epsilon - 1) \left( \epsilon - \left( \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) \right) + \bar{n}_\epsilon(\bar{n}_\epsilon - 1) \left( \epsilon + \left( \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) \right) \right\}.$$

y agrupando términos:

$$\sigma(\epsilon, \mu) = \left\{ \epsilon [n_\epsilon(n_\epsilon - 1) + \bar{n}_\epsilon(\bar{n}_\epsilon - 1)] + [\bar{n}_\epsilon(\bar{n}_\epsilon - 1) - n_\epsilon(n_\epsilon - 1)] \left( \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) \right\}$$

El valor de  $\left(\mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right)$  se puede obtener de forma recurrente a partir de la ecuación de número si derivamos respecto a  $\beta$ .

$$\frac{\partial n}{\partial \beta} = 0 = \lambda_R \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} \frac{\partial}{\partial \beta} \{n_\epsilon - \bar{n}_\epsilon\}$$

Al despejar queda:

$$\left( \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) = \frac{\int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} [n_\epsilon(n_\epsilon - 1) - \bar{n}_\epsilon(\bar{n}_\epsilon - 1)]}{\int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon \epsilon (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{d/2-1} [n_\epsilon(n_\epsilon - 1) + \bar{n}_\epsilon(\bar{n}_\epsilon - 1)]},$$

introducimos las variables adimensionales dividiendo  $\epsilon$  por  $E_F$  y la temperatura  $\tau = T/T_f$ , para obtener la dependencia sobre la temperatura.

$$\left( \mu + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) = (\tau E_F) \frac{\int_{\Omega}^{\infty} dx x^2 ([x\tau]^2 - \Omega^2)^{d/2-1} [n_\epsilon(n_\epsilon - 1) - \bar{n}_\epsilon(\bar{n}_\epsilon - 1)]}{\int_{\Omega}^{\infty} dx x ([x\tau]^2 - \Omega)^{d/2-1} [n_\epsilon(n_\epsilon - 1) + \bar{n}_\epsilon(\bar{n}_\epsilon - 1)]}$$

# Bibliografía

- [1] *National Institute of Standards and Technology*.  
<http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>
- [2] R.K. Pathria, P.D. Bale, *Statistical Mechanics*, 3rd. ed. (Elsevier, 2011).
- [3] W. Greiner *Relativistic Quantum Mechanics, wave equations*, 2nd. ed. (Springer, 1997).
- [4] S. Singh, P.N. Pandita, *Scaling and universality of thermodynamics and correlations of an ideal relativistic Bose gas with pair production*, (Phys. Rev. A, 1983).
- [5] H.T. Elze, W. Greiner, J. Rafelski, *The relativistic Fermi gas revisited*, (J. Phys. G; Nucl. Phys. 6, 1980).
- [6] M.V. Medvedev, *Thermodynamics of photons in relativistic  $e^+e^-\gamma$  plasmas*, (Phys. Rev. E 59, 1999).
- [7] P.H. Chavanis, *White dwarf stars in  $D$  dimensions*, (Phys. Rev. D, 2007).
- [8] S.R. Hore, N.E. Frankel, *Thermodynamic function of an ideal Fermi gas in the intermediate quantum region* Phys. Rev. A, **12**, (4) 1617 (1975).
- [9] M. Howard Lee, *Equivalence of ideal gases in two dimensions and Landen's relations*, (Phys. Rev. E 55, 1997).

- [10] R.K. Pathria, *Similarities and differences between Bose and Fermi gases*, (Phys. Rev. E 57, 1998).
- [11] W. Greiner, L. Neise, H. Stocker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, 2nd. ed. (Springer, 1997).
- [12] H.B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd. ed. (John Wiley and Sons, 1960).
- [13] G. Cook, R. Dickerson, *Understanding the chemical potencial*, (Am. J. Phys. 63, 1995).
- [14] P. Borrmann, G. Franke, *Recursion formulas for quantum statistical partition functions*, (J. Chem. Phys. 1993).
- [15] B. DeMarco, D.F Jin, *Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas*, (Science AAAS, 1999).
- [16] N.W. Ashcroft, N.D. Mermin, *Solid State Physics*, College ed. (Harcourt College Publishing, 1976).
- [17] M. Grether, M. de Llano, and M.A. Solís, *Anomalous behavior of ideal Fermi gas below two dimensions*, (Eur. Phys. 2011).
- [18] A.M. Guenault, *Statistical Physics*, (Routledge, 1998).
- [19] H. Blas, B.M. Pimentel, J.L. Tomazelli, *Relativistic quantum thermodynamics of ideal gases in two dimensions*, (Phys. Rev. E 60, 1999).
- [20] R.M May, *Quantum statistics of ideal gases in two dimensions*, (Phys. Rev. 1964).
- [21] H.O. Frota, M.S. Silva, S.G. Rosa, *Relativistic ideal Bose gas with pair creation*, (Phys. Rev. A 39, 1989).
- [22] M. Grether, M. Llano, G.A Baker, *Bose-Einstein Condensation in the relativistic ideal bose gas*, (Phys. Rev. 2007).

- [23] K.R. Patton, M.R. Geller, M.P. Blencowe, *Thermodynamic equivalence of certain ideal Bose and Fermi gases*, (Physica A 2005).
- [24] S.I. Blinnikov, *Thermodynamics of a relativistic Fermi-gas*, (Sov. Astron. Lett. 13, 1987).