Considere un gas de fotones (cuantos del campo electromagnético) en un contenedor de volumen V cuyas paredes se encuentran a una temperatura T. En equilibrio termodinámico la temperatura del gas de fotones corresponde a la temperatura de las paredes del contenedor.

En contraste con el gas ideal, la energía interna U depende también de V, es decir, $U = U(T, V)$ y el número de fotones $N(T, V)$, es variable.

La relación funcional de energía interna y las variables de estado T y V está dada por la expresión

$$U(T, V) = bVT^4$$

y la ecuación de estado por

$$P(T, V) = P(T) = \frac{b}{3}T^4$$

donde P denota la presión de radiación sobre las paredes del contendor debida al gas de fotones y b es una constante.

1. (**5 pts**) Si se realiza el cambio de volumen $V \to V + \Delta V$ de manera cuasi-estática e isotérmica calcule:
   (a) el trabajo sobre el gas,
   (b) el calor ganado por el gas de fotones.
   (c) Argumento sobre el cambio en el número de fotones que sufre el gas en este cambio de volumen.
2. (**3 pts**) Suponga que se determina experimentalmente que $\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_V$ es proporcional a T^3 y que $\left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_T$ lo es a T^2. Encuentre la dependencia explícita de N en T y V. Suponga conocida la constante de proporcionalidad.
3. (**2 pts**) Considere ahora el cambio de volumen $V \to V + dV$, pero ahora de manera cuasi-estática y adiabática
   (a) Muestre que $T^3V =$ constante y por tanto que $PV^{4/3} =$ constante.
   (b) Dibuje en un diagrama $P - V$ un ciclo reversible de Carnot.

1 Solución

1. (a) El trabajo sobre el gas se obtiene directamente al integrar la ecuación de estado $-P(T)$ de V a $V + \Delta V$ dando por resultado $-\frac{1}{3}bT^4\Delta V$.
   (b) El cambio en la energía interna está dado por $\Delta U = bT^4\Delta V$ y de la primera ley de la termodinámica $\Delta U = W + Q$ se infiere que el calor que gana el gas debido a la expansión es $Q = \frac{4}{3}bT^4\Delta V$
   (c) Dado que le número de fotones es una variable de estado extensiva, se espera que al aumentar el volumen en ΔV el cambio en el número de partículas cambie en la misma proporción, es decir, que ΔN es proporcional a ΔV y por tanto $N(V, T) = f(T)V$ donde $f(T)$ es una función solo de T.

2. Dado que $\left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_T = xT^3$ con x una constante, se tiene que $N(T,V) = xVT^3 + f(T)$, con $f(T)$ una función sólo de T . Por tanto $\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_V = 3xVT^2 + f'(T) = y(V)T^2$ donde $y(V)$ es un factor de propocionalidad que puede depender de V. Eligiendo $y(V) = 3xV$ podemos poner $f(T) = f$ una constante y por tanto $N(T,V) = xVT^3 + f$. La situación $V = 0$, que conduce a $U = 0$, corresponde al caso en el que no hay fotones en el contendor y por tanto $f = 0$.

3. Dado que el proceso es adibático, se tiene de la primera ley que $dU = \mathrm{d}W$ y usando la relación funcional $U(T,V) = bVT^4$ se tiene que

$$4bVT^3dT + bT^4dV = -\frac{1}{3}bT^4dV$$

arreglando términos y simplicando factores comunes se llega a que

$$3\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0$$

que es equivalente a

$$d[\ln(T^3V)] = 0$$

de la que se deduce que $T^3V = constante$. De la ecuación de estado se obtiene que $T = P^{1/4}(3/b)^{1/4}$ y sustituyedo en la última relación $P^{3/4}V =$ constante de la que se deduce inmediatamente la relación buscada $PV^{4/3} =$ constante.