FÍSICA ESTADISTICA FC

Serie de ejercicios 3
Fecha de entrega: 13 de marzo de 2019

1. Considere un sistema bidimensional en equilibrio formado por $N = n^2 \gg 1$ partículas de masa m no interactuantes entre sí, las cuales pueden vibrar como osciladores armónicos alrededor de sitios fijos localizados sobre una red cuadrada de área total $A = (n-1)^2 a^2$, como se muestra en la figura 1(A). El sistema presenta anisotropía a lo largo de los ejes x y y, de tal manera que la energía potencial de la partícula alrededor del sitio $\{i, j\}$, está dada por

$$u_{i,j}(x_{i,j}, y_{i,j}) = \frac{1}{2}k_x(x_{i,j} - X_i)^2 + \frac{1}{2}k_y(y_{i,j} - Y_j)^2, \qquad (1)$$

en donde $i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., n$,, $(x_{i,j}, y_{i,j})$ son las coordenadas de la partícula, $(X_i = (i-1)a,\ Y_j = (j-1)a)$ son las coordenadas (fijas) del sitio respectivo sobre la red, y $k_x > k_y$. El momento correspondiente de la partícula es $\mathbf{p}_{i,j} = (p^x_{i,j}, p^y_{i,j})$

   (a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? Escriba una expresión para el hamiltoniano H del sistema en términos de sus grados de libertad.

   (b) Encuentre una expresión para el número $\Phi(E)$ de microestados del sistema cuya energía total está entre 0 y E. Asimismo, encuentre la expresión correspondiente para la densidad de microestados $\frac{\partial\Phi(E')}{\partial E'}|_{E'=E}$ alrededor del valor E de la energía total y para el número de microestados accesibles $\Omega(E)$ cuando la energía total del sistema está entre E y $E + \delta E$, con $0 < \delta E \ll E$. ¿Son las partículas distinguibles o indistinguibles sobre la red cuadrada?

   (c) Encuentre una expresión para la entropía $S(E, N, A)$ del sistema en términos de las variables macroscópicas E, N, A, los parámetros m, k_x y k_y del hamiltoniano y la constante de Planck h. Verifique que la expresión obtenida para $S(E, N, A)$ es extensiva. ¿Qué dirección (x o y) contribuye más significativamente a la entropía del sistema? Justifique físicamente su respuesta.

   (d) Encuentre una ecuación de estado que relacione la energía total del sistema E con su temperatura T, y a partir de ella calcule la capacidad calorífica (a área A constante). Verifique que a pesar de la

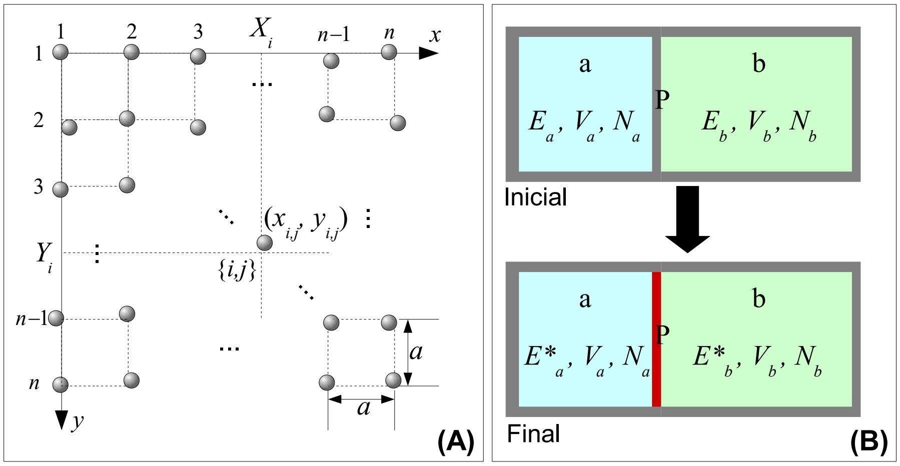

Figure 1: (A) Figura para el ejercicio 1. (B) Figura para el ejercicio 3.

anisotropía del sistema, cada grado de libertad contribuye en promedio con $\frac{1}{2}k_BT$ a la energía total E, en acuerdo con el teorema de equipartición.

(e) ¿Es posible encontrar una ecuación de estado para la *presión* del sistema? Justifique su respuesta.

2. Considere el modelo de un sistema paramagnético formado por $N \gg 1$ partículas no interactuantes, espacialmente *fijas* y cuyo momento magnético individual puede tomar los valores $m_i = +\mu$ o $m_i = -\mu$, en donde $i = 1, ..., N$. Un campo magnético $B > 0$ se aplica al sistema, en donde los valores $m_i = +\mu$ o $m_i = -\mu$ corresponden a una alineación paralela o antiparalela con respecto a la dirección de B, respectivamente. Al aplicar el campo magnético, la energía total está dada por $-MB$, en donde $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ es el momento magnético total del sistema.

   (a) Para un valor fijo B del campo magnético, encuentre una relación entre la energía total del sistema E_n y el número n de partículas con momento margnético individual $+\mu$. A partir de ella, determine los posibles valores discretos que puede tomar E_n. ¿Cuántos valores son en total?

   (b) Ahora, considere que el sistema se prepara de tal manera que su energía total está dada por un valor específico E de los valores discretos encontrados anteriormente, y se aisla inmediatamente de tal forma que E permanece constante. Encuentre el número de microstados accesibles $\Omega(E)$ *exactamente* con esa energía. ¿Son distinguibles o indistingubles las partículas? A partir de $\Omega(E)$, determine una expresión para la entropía $S(E, N)$ del sistema (use la aproximación de Stirling $\ln x! \approx x \ln x - x$ cuando sea conveniente). Verifique que $S(E, N)$ es extensiva.

(c) Encuentre una ecuación de estado que relacione la temperatura T del sistema la energía total E del sistema.

i. ¿Bajo que condiciones la temperatura puede ser: A) positiva, B) negativa, C) infinita? Explique físicamente su respuesta.

ii. Muestre que la energía se puede expresar en términos de la temperatura como

$$E = -N\mu B \tanh\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right),$$

y grafique la dependencia de E como función de T.

Sugerencia: Note que este es un caso particular de un sistema de dos estados.

3. Una caja de paredes rígidas, impermeables y térmicamente aislantes está formada por dos compartimentos, etiquetados como a y b en la figura 1(B), los cuales contienen en su interior dos gases ideales, cada gas ocupando un compartimento distinto. El número de partículas correspondientes son $N_a \gg 1$ y $N_b \gg 1$, mientras que sus volúmenes son V_a y V_b, respectivamente, con $N_a < N_b$ y $V_a < V_b$. *Inicialmente*, la pared P que separa los gases es aislante térmicamente, de modo que la energía total de cada gas, E_a y E_b es constante, siendo la energía total dentro de la caja $E_a + E_b$.

   (a) Posteriormente, la pared P que separa los gases se hace térmicamente conductora, de manera que estos pueden intercambiar energía dentro de la caja. Bajo la condición de que el resto de las paredes de la caja sigue siendo aislante, exprese la condición de equilibrio después de eliminar la restricción térmica de P.

   (b) ¿Cuáles son los valores más probables de las energías E_a^* y E_b^* de cada gas cuando alcanzan *finalmente* un nuevo equilibrio térmico?

   (c) Determine el calor Q intercambiado entre los dos gases durante este proceso para los siguientes valores: $N_a = 10^{23}$, $E_a = 600$ J, $V_a = 0.05\,\mathrm{m}^{-3}$, $N_b = 10^{24}$, $E_b = 6500$ J, $V_b = 0.5\,\mathrm{m}^{-3}$. ¿En qué dirección fluye el calor? ¿Cuál es el valor de la temperatura final del sistema?