Revista Mexicana de Física 29 no. 2 (1983) 267-288

MODELO HIDRODINAMICO DE LOS FENOMENOS ESTATICOS DEL ELECTROMAGNETISMO

Rubén G. Barrera

Instituto de Física y
Facultad de Ciencias, UNAM
Apartado Postal 20-364. 01000 - México, D.F.

(recibido agosto 20, 1982; aceptado diciembre 16, 1982)

RESUMEN

Se presenta un modelo hidrodinámico que describe adecuadamente toda la fenomenología de la electrostática y la magnetostática. El propósito es ofrecer una explicación alternativa a la explicación usual basada en fuerzas que actúan "a distancia", con el fin de mostrar la importancia que tienen las ideas acerca de los mecanismos internos que gobiernan los fenómenos físicos en el desarrollo de la actividad científica.

ABSTRACT

We present a hydrodynamical model which correctly describes the whole phenomenology of electrostatics and magnetostatics. Our purpose is to offer a parallel explanation to the usual one based on actions "at a distance" in order to show the importance of the ideas about the internal mechanisms which rule the physical phenomena in the development of the scientific activity.

1. INTRODUCCION

En un sistema inercial, la ley de interacción entre cargas eléctricas en reposo se encuentra expresada por la ley de Coulomb[1]. De la misma manera, las leyes de interacción entre corrientes eléctricas que fluyen a lo largo de circuitos cerrados en reposo, se encuentran expresadas por las leyes de Ampère[2]. Tanto Coulomb como Ampère obtuvieron las expresiones matemáticas de las leyes que llevan sus nombres a partir de un conjunto limitado de experiencias de laboratorio. La verificación de estas leyes se ha llevado a cabo con diversos tipos de arreglos experimentales y con un grado cada vez mayor de precisión[3] y podemos decir que en la actualidad se encuentran firmemente establecidas.

Sin embargo, una ley física no consiste sólo de la relación cuantitativa entre un conjunto de símbolos matemáticos, sino también de la interpretación de dichos símbolos en términos de conceptos físicos. En este sentido, cuando los símbolos que componen una ley sufren un proceso de reinterpretación en relación a su significado físico, esto nos indica que ha habido un cambio en la concepción que se tenía acerca del mundo físico. Muchas veces este cambio es tan radical que puede resultar más importante que las posibles correcciones a dicha ley a nivel cuantitativo.

Esto nos conduce a percatarnos que la labor de una comunidad de físicos no es sólo la de desarrollar una capacidad de predicción sobre el comportamiento de los fenómenos físicos, sino también la de "entender" o "explicar" lo que subyace a la fenomenología. Y es este proceso de búsqueda de una "explicación", lo que ha permitido desarrollar, a través de la historia, nuevas líneas de investigación que han llevado, en ocasiones, a la predicción de nuevos fenómenos y al establecimiento de nuevas leyes. Tal es el caso, por ejemplo, del éter electromagnético.

Creemos que esta parte del proceso de construcción de las teorías físicas es la que se encuentra ausente en la presentación que se hace comúnmente de la teoría de los fenómenos estáticos del electromagnetismo, en especial, en los cursos avanzados donde los estudiantes tienen ya la suficiente madurez para revisar sus conocimientos de manera más crítica.

La presentación usual de la electrostática y la magnetostática se realiza en base a fuerzas eléctricas y magnéticas que actúan "a distancia", en analogía con la concepción newtoniana sobre la acción de la fuerza gravitatoria.

Resulta pues paradójico el aceptar la posibilidad de almacenar momento angular en el espacio que rodea a un sistema electromagnético estático[4] cuando se ha supuesto que en dicho sistema todas las fuerzas presentes actúan "a distancia".

En el presente trabajo presentamos una "explicación" alternativa de los fenómenos electromagnéticos estáticos en términos de un modelo hidrodinámico. Dicho modelo está inspirado en la teoría de los "efluvios" aparecida a principios del siglo XVIII[5] y en los trabajos de Helmholtz[6] de 1858 sobre las relaciones del campo magnético con su teoría de los vórtices en hidrodinámica.

A este respecto queremos señalar que las analogías entre sistemas electromagnéticos y sistemas hidrodinámicos, así como la aplicación de conceptos afines a la descripción de dichos sistemas, son bien conocidos[7]. Sin embargo, lo que aquí se presenta no son analogías de situaciones específicas entre sistemas electromagnéticos y sistemas hidrodinámicos, sino que se trata del desarrollo sistemático de un modelo hidrodinámico que reproduce formalmente las ecuaciones que gobiernan todos los fenómenos estáticos del electromagnetismo. Esto conlleva una interpretación alternativa, consistente y completa de la electrostática y magnetostática en términos de conceptos hidrodinámicos.

Una de las ventajas de este tipo de interpretación es que dentro del modelo hidrodinámico resulta "natural" que exista energía almacenada en el fluido que rodea a los cuerpos electrizados o a los circuitos eléctricos. Por otra parte, el modelo hidrodinámico presenta, a su vez, una serie de problemas de carácter muy fundamental, que parten de la existencia misma de los fluidos.

Sin embargo nuestra intención no es la de convencer al estudiante de la existencia de tal o cual fluido, sino la de presentarle, en primer lugar, una "explicación" distinta a la que está acostumbrado, pero que describa adecuadamente toda la fenomenología de la electrostática y la magnetostática. En segundo lugar, queremos mostrar el tipo de dificultades que surgen cuando se quiere extender la validez de un determinado modelo para incorporar situaciones o experiencias no consideradas hasta entonces. Con esto pretendemos hacer notar también las diferencias que existen en la formulación de nuevos problemas de investigación en función de la "explicación" que se tiene sobre el mecanismo interno que gobierna los fenómenos físicos. Por último, creemos que el desarrollo del modelo elaborado en el presente trabajo puede resultar estimulante para introducir los conceptos hidrodinámicos que se requieren en la teoría electromagnética y en especial los relacionados con las llamadas leyes de conservación[8].

El artículo está organizado de la siguiente forma:

En la segunda sección presentamos una revisión breve de las ecuaciones de conservación en la hidrodinámica, con el fin, más que nada, de introducir los conceptos físicos fundamentales y la notación a utilizar. En la tercera sección introducimos el modelo hidrodinámico consistente en dos fluidos interpenetrables y en la cuarta sección exploramos las propiedades dinámicas de los fluidos propuestos. La quinta sección está dedicada al problema de fuentes en movimiento y en ella se introducen hipótesis adicionales al modelo original con el fin de incluir los efectos magnéticos de las cargas en movimiento. En la sexta y última sección apuntamos las limitaciones y dificultades del modelo hidrodinámico y hacemos algunas reflexiones de carácter más general.

2. HIDRODINAMICA

En esta sección presentamos algunos conceptos básicos de la hidrodinámica que nos van a ser útiles posteriormente.

i) Fuentes y vórtices

Un fluido en movimiento se puede describir mediante un campo de velocidades $\underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x},t)$ que especifica la velocidad del fluido en todo el espacio y en todo tiempo.

Definimos la densidad de fuentes $\rho(\underset{\sim}{r},t)$ y la densidad de vórtices $\underset{\sim}{j}(\underset{\sim}{r},t)$ asociada al campo de velocidades como

$$\rho(\underset{\sim}{r},t) = \nabla \cdot \underset{\sim}{V}(\underset{\sim}{r},t) \quad , \tag{1a}$$

$$\underset{\sim}{j}(\underset{\sim}{r},t) = \nabla \times \underset{\sim}{V}(\underset{\sim}{r},t) \quad . \tag{1b}$$

Se les llama fuentes (o sumideros) porque se puede demostrar[9] que son regiones del espacio donde se crea (o se aniquila) fluido, y se les llama vórtices porque son regiones del espacio donde el fluido adquiere circulación ($\oint_C \underset{\sim}{V} \cdot d\underset{\sim}{\ell}$) alrededor de cualquier circuito C que rodee a $\underset{\sim}{j}$.

ii) Leyes de conservación

Las leyes de conservación expresan el hecho de que dentro de una región cerrada del espacio de volumen Ω, ciertas cantidades mecánicas como la masa, el ímpetu y la energía, se conservan. Los cambios de estas propiedades en el interior del volumen Ω se ven compensadas por el flujo de estas mismas cantidades a través de la superficie Σ que envuelve al volumen en cuestión o por la existencia de fuentes y sumideros dentro de dicho volumen.

La forma usual de escribir las leyes de conservación hace uso del siguiente teorema[10]:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \alpha(\underset{\sim}{r},t)d^3r = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha\underset{\sim}{V}) \right] d^3r \quad , \tag{2}$$

en donde $\alpha(\underset{\sim}{r},t)$ es un campo (escalar o vectorial) utilizado para describir alguna característica asociada con el fluido, como por ejemplo, su masa, su ímpetu o su energía, y $\Omega(t)$ es un volumen de control arbitrario que no está fijo en el espacio sino cuyo contenido viaja con el fluido, por lo que su forma, en general, depende del tiempo. Este teorema se conoce bajo el nombre de teorema de transporte de Reynolds.

<u>La masa</u>

Si se considera una masa de fluido dentro de un volumen arbitrario $\Omega(t)$ y se le sigue en el tiempo durante su viaje con el resto del fluido, se observará que su cambio de masa se debe exclusivamente a la existencia de fuentes (y sumideros) en el interior de dicho volumen. Por lo tanto tenemos que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \mu(\underset{\sim}{r},t)d^3r = \int_{\Omega} \mu\rho(\underset{\sim}{r},t)d^3r \quad , \tag{3}$$

en donde $\mu(\underset{\sim}{r},t)$ es la densidad de masa y $\rho(\underset{\sim}{r},t)$ es la distribución de fuentes (y sumideros).

Utilizando el teorema de transporte de Reynolds (Ec. (2)), se puede escribir como

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \nabla\cdot(\mu\underset{\sim}{V}) = \mu\rho \quad , \tag{4}$$

que es la ecuación diferencial que establece la conservación de la masa.

El ímpetu

La variación temporal del ímpetu contenido en un volumen Ω de fluido está determinada por la segunda ley de Newton; por lo tanto podemos escribir que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \mu\underset{\sim}{V}(\underset{\sim}{r},t)d^3r = -\int_{\Sigma} p\, d\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{F}_{ex} \quad , \tag{5}$$

en donde p es la presión, $d\underset{\sim}{a}$ es la diferencial de área y Σ es la superficie que envuelve al volumen Ω. El primer término del lado derecho corresponde a la contribución de las fuerzas normales al volumen Ω ejercidas por el resto del fluido y $\underset{\sim}{F}_{ex}$ representa las fuerzas externas que actúan sobre ese mismo volumen. Estamos suponiendo, además, que las fuentes no ejercen ninguna fuerza sobre sí mismas (autofuerza).

Usando las Ecs. (2) y (5) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu\underset{\sim}{V}) + \nabla\cdot\underset{\approx}{T} = f_{ex} \quad , \tag{6a}$$

en donde

$$\underset{\sim}{T} = p\,\mathbb{1} + \mu \underset{\sim}{V}\underset{\sim}{V} \tag{6b}$$

es el tensor de esfuerzos y representa la densidad de flujo de ímpetu, el símbolo $\mathbb{1}$ es la diádica unitaria y $\underset{\sim}{f}_{ex}$ es la densidad de fuerzas externas definida como

$$\underset{\sim}{F}_{ex} = \int_{\Omega} \underset{\sim}{f}_{ex}\, d^3r \quad . \tag{6c}$$

La Ec. (6) es la ecuación de movimiento del fluido, que no es otra cosa que la ecuación que establece el balance o conservación del ímpetu.

La energía

La densidad de energía en un fluido está dada por

$$W = \frac{1}{2}\mu V^2 + \mu\varepsilon \quad , \tag{7}$$

en donde $\mu V^2/2$ es la parte correspondiente a la energía cinética y ε es la densidad de energía interna del fluido por unidad de masa.

Por tanto, la conservación de la energía dentro de un volumen Ω quedará expresada por

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} W d^3r = -\int_{\Sigma} p\underset{\sim}{V}\cdot d\underset{\sim}{a} - \int_{\Sigma} \underset{\sim}{Q}\cdot d\underset{\sim}{a} + \frac{dE_{ex}}{dt} + \frac{dE_f}{dt} \quad . \tag{8}$$

El primer término del lado derecho corresponde a la potencia generada por las fuerzas normales al volumen Ω provenientes del resto del fluido, el segundo término corresponde a la energía liberada en forma de calor y $\underset{\sim}{Q}$ representa el flujo de calor, el tercer término es la potencia generada (o absorbida) por agentes externos y el cuarto término representa la energía inyectada (o absorbida) por unidad de tiempo, por las fuentes (o sumideros) existentes en Ω.

Este último término se puede escribir como

$$\frac{dE_f}{dt} = \int_\Omega \rho(W+p)d^3r \quad , \tag{9}$$

en donde ρW es la densidad de energía generada (o absorbida) por unidad de tiempo por la distribución de fuentes (o sumideros) ρ y ρp es la potencia gastada por unidad de volumen, en contra de las fuerzas normales en el proceso de creación (o aniquilación) del fluido por las fuentes (o sumideros) en Ω.

Si se define q_{ex} como la potencia externa por unidad de volumen, es decir

$$\frac{dE_{ex}}{dt} = \int_\Omega q_{ex}\, d^3r \quad , \tag{10}$$

y se utiliza el teorema de Gauss, se puede escribir finalmente, combinando las Ecs. (2), (8), (9) y (10),

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(W+p)\underset{\sim}{V} \right] = -\nabla \cdot \underset{\sim}{Q} + \rho(W+p) + q_{ex} \quad . \tag{11}$$

Esta ecuación establece la ley de la conservación local de la energía.

3. MODELO DE DOS FLUIDOS

En esta sección presentamos un modelo hidrodinámico de las interacciones electromagnéticas estáticas basado en el comportamiento de dos fluidos (ℓ y t) interpenetrables, que actúan independientemente uno del otro, y sobre los cuales se imponen ciertas restricciones de carácter cinemático.

Los fluidos están caracterizados por campos de velocidades $\underset{\sim}{V}_\ell(\underset{\sim}{r},t)$ y $\underset{\sim}{V}_t(\underset{\sim}{r},t)$ y densidades de masa μ_ℓ y μ_t, respectivamente.

Se hacen ahora las siguientes hipótesis sobre el comportamiento de los fluidos:

(i) Ambos fluidos son incompresibles, es decir, μ_ℓ y μ_t son constantes y ambos son no-disipativos.

(ii) El fluido ℓ es irrotacional, es decir,

$$\nabla \times \underset{\sim}{V}_\ell = 0 \quad , \tag{12}$$

y está generado por una distribución de fuentes ρ_ℓ.

Utilizando ahora la Ec. (4) y la hipótesis de incompresibilidad, se obtiene

$$\nabla \cdot (\mu_\ell \underset{\sim}{V}_\ell) = \mu_\ell \rho_\ell \quad . \tag{13}$$

(iii) El fluido t posee una densidad de vórtices $\underset{\sim}{j}_t$, es decir,

$$\nabla \times \underset{\sim}{V}_t = \underset{\sim}{j}_t \quad , \tag{14}$$

y carece de fuentes y sumideros, o sea, $\rho_t = 0$.

Utilizando la Ec. (4) y las hipótesis de incompresibilidad y ausencia de fuentes, se obtiene

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{V}_t = 0 \quad . \tag{15}$$

Por lo tanto, el comportamiento de los fluidos está gobernado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (\mu_\ell \underset{\sim}{V}_\ell) = \mu_\ell \rho_\ell \quad , && \nabla \cdot \underset{\sim}{V}_t = 0 \quad , \\ &\nabla \times \underset{\sim}{V}_\ell = 0 \quad , && \nabla \times (\mu_t \underset{\sim}{V}_t) = \mu_t \underset{\sim}{j}_t \quad . \end{aligned} \tag{16}$$

Estas ecuaciones tienen la misma estructura que las ecuaciones que gobiernan los fenómenos estáticos en la teoría electromagnética, siempre y cuando hagamos las siguientes identificaciones:

(i)

$$\mu_\ell \rho_\ell \to \rho_q \quad , \tag{17a}$$

$$\mu_t \underset{\sim}{j}_t \to \underset{\sim}{j}_q \quad , \tag{17b}$$

en donde ρ_q y $\underset{\sim}{j}_q$ son la densidad de carga y la densidad de corriente, respectivamente.

El identificar $\mu_\ell \rho_\ell$ con ρ_q significa que estamos suponiendo a las cargas eléctricas positivas (y negativas) como fuentes (y sumideros) inagotables de masa del fluido ℓ; esto nos recuerda la teoría de los efluvios[6], de principios del siglo XVIII, la cual atribuía el "cosquilleo" que se siente en la cercanía de un cuerpo electrizado a la emanación de un cierto fluido (efluvio) que aparecía cuando los cuerpos eran excitados por frotamiento. Por otra parte el identificar $\underset{\sim}{j}_\ell$ con $\underset{\sim}{j}_q$ significa que consideramos a las corrientes eléctricas como responsables de la circulación del fluido t, tal como fue propuesto por Helmholtz en 1858[7].

(ii)

$$\mu_\ell \underset{\sim}{V}_\ell \to \underset{\sim}{D} \quad , \qquad \underset{\sim}{V}_t \to \underset{\sim}{B} \quad , \tag{18a}$$

$$\underset{\sim}{V}_\ell \to \underset{\sim}{E} \quad , \qquad \mu_t \underset{\sim}{V}_t \to \underset{\sim}{H} \quad , \tag{18b}$$

en donde $\underset{\sim}{D}$ es el vector de desplazamiento, $\underset{\sim}{E}$ es la fuerza eléctrica, $\underset{\sim}{B}$ es la inducción magnética y H la fuerza magnética.

(iii)

$$\mu_\ell \to \varepsilon_\circ \quad , \tag{19a}$$

$$1/\mu_t \to \mu_\circ \quad , \tag{19b}$$

en donde $\varepsilon_\circ$ es la permitividad del "vacío" y $\mu_\circ$ su susceptibilidad magnética.

Sustituyendo ahora las relaciones (17) y (18) en las Ecs. (16) obtenemos

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{D} = \rho_q \quad , \qquad \nabla \cdot \underset{\sim}{B} = 0 \quad , \tag{20a}$$

$$\nabla \times \underset{\sim}{E} = 0 \quad , \qquad \nabla \times \underset{\sim}{H} = j_q \quad , \tag{20b}$$

que son las ecuaciones de la electrostática y la magnetostática (en el sistema de unidades MKSQ). Además, combinando las relaciones (18) y (19) podemos escribir también

$$\underset{\sim}{D} = \varepsilon_\circ \underset{\sim}{E} \quad , \qquad \underset{\sim}{B} = \mu_\circ \underset{\sim}{H} \quad , \tag{21}$$

que son las relaciones constitutivas en el "vacío".

Esto nos indica que con las identificaciones propuestas (Ecs. (17) - (19)) hemos sido capaces de obtener las ecuaciones electromagnéticas (Ecs. (20) y (21)) conocidas, pero con una interpretación diferente. De acuerdo a nuestro modelo los campos electromagnéticos representan propiedades de fluidos en movimiento que invaden todo el espacio.

Sin embargo, las ecuaciones hidrodinámicas que aparecen en las Ecs. (16) (o su transcripción electromagnética en las Ecs. (20) - (21)) describen únicamente las propiedades cinemáticas de los fluidos, de las cuales no es posible deducir las fuerzas que aparecen entre cuerpos cargados o entre circuitos eléctricos, ni tampoco "explicar" el origen de dichas fuerzas. Para esto es necesario establecer las ecuaciones de movimiento de los fluidos que son las que relacionan su comportamiento dinámico con la presencia de fuerzas externas.

4. LAS PROPIEDADES DINAMICAS DEL MODELO

En esta sección determinamos la ecuación de movimiento del sistema de dos fluidos, con el fin de calcular las fuerzas entre cuerpos cargados y entre circuitos eléctricos, así como el de "entender" su origen físico. Para esto hacemos uso de las leyes de conservación de la energía y del ímpetu, tal y como fueron presentadas en la sección 2.

Dado que no existe ningún mecanismo de disipación de energía y los fluidos se encuentran en movimiento perpetuo, éstos son capaces de almacenar, además de su energía interna, energía cinética. Además, como el comportamiento de un fluido es independiente del otro, la energía total es la suma de las energías en cada fluido. Por lo tanto, la densidad de energía total W_T del sistema queda dada por

$$W_T = W_\ell + W_t \quad , \tag{22a}$$

en donde

$$W_\ell \equiv \frac{1}{2}\mu_\ell V_\ell^2 + \mu_\ell \varepsilon_\ell \quad , \tag{22b}$$

$$W_t \equiv \frac{1}{2}\mu_t V_t^2 + \mu_t \varepsilon_t \quad , \tag{22c}$$

y ε_ℓ y ε_t son las densidades de energía interna por unidad de masa de los fluidos ℓ y t respectivamente (ver Ec. (7)).

Consideremos ahora el caso en el cual las fuerzas que se generan entre las fuentes y entre los vórtices debido al ímpetu transmitido por los fluidos se encuentran balanceadas por fuerzas externas que las mantienen en reposo, sin que haya, por lo tanto, disipación de energía por los agentes externos ($q_{ex} = 0$). Este sería el caso correspondiente a los fenómenos estáticos en electromagnetismo.

Tomando esto en consideración, cuando se aplica la ley de conservación de la energía (Ec. (11)) al sistema de dos fluidos, en estado estacionario, se obtiene

$$\nabla \cdot \left[(W_\ell + p_\ell)\underset{\sim}{V}_\ell + (W_t + p_t)\underset{\sim}{V}_t \right] = \rho_\ell (W_\ell + p_\ell) \quad , \tag{23}$$

en donde p_ℓ y p_t son la presión en el fluido ℓ y t respectivamente; no existe disipación de calor ($\underset{\sim}{Q} = 0$) dado que se ha supuesto que los fluidos son no-disipativos.

Como los fluidos son independientes, la Ec. (23) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \left[(W_\ell + p_\ell)\underset{\sim}{V}_\ell \right] = \rho_\ell (W_\ell + p_\ell) \quad , \tag{24a}$$

$$\nabla \cdot \left[(W_t + p_t)\underset{\sim}{V}_t \right] = 0 \quad . \tag{24b}$$

Combinando estas ecuaciones con las Ecs. (13) y (15) se obtiene

$$\underset{\sim}{V}_\ell \cdot \nabla(W_\ell + p_\ell) = 0 \quad , \tag{25a}$$

$$\underset{\sim}{V}_t \cdot \nabla(W_t + p_t) = 0 \quad . \tag{25b}$$

Estas ecuaciones se satisfacen idénticamente siempre y cuando

$$p_\ell^\circ = W_\ell + p_\ell \equiv \frac{1}{2}\mu_\ell V_\ell^2 + \mu_\ell \varepsilon_\ell + p_\ell \quad , \tag{26a}$$

$$p_t^\circ = W_t + p_t \equiv \frac{1}{2}\mu_t V_t^2 + \mu_t \varepsilon_t + p_t \quad , \tag{26b}$$

en donde p_ℓ° y p_t° son constantes. Estas expresiones (Ecs. (26)) determinan el valor de las presiones p_ℓ y p_t y no son otra cosa que los teoremas de Bernoulli[11] correspondientes a cada fluido.

Dado que queremos hacer el menor número posible de hipótesis sobre la estructura interna de los fluidos, lo único que supondremos sobre ε_ℓ y ε_t es que son constantes. En este caso, podemos escribir

$$p_\ell = -\frac{1}{2}\mu_\ell V_\ell^2 \quad , \tag{27a}$$

$$p_t = -\frac{1}{2}\mu_t V_t^2 \quad , \tag{27b}$$

$$W = \frac{1}{2}\mu_\ell V_\ell^2 + \frac{1}{2}\mu_t V_t^2 \quad , \tag{27c}$$

en donde el valor de las presiones p_ℓ y p_t y de la densidad de energía W están ahora referidos a los valores correspondientes en los fluidos cuando V_ℓ y V_t son cero.

Por lo tanto, haciendo las identificaciones propuestas en las Ecs. (18) y (19), tenemos que para el sistema electromagnético:

$$p_\ell \to -\frac{1}{2}(\underset{\sim}{E}\cdot\underset{\sim}{D}) = -\frac{1}{2}\varepsilon_\circ E^2 \quad , \tag{28a}$$

$$p_t \to -\frac{1}{2}(\underset{\sim}{B}\cdot\underset{\sim}{H}) = -\frac{1}{2}\mu_\circ H^2 \quad , \tag{28b}$$

$$W \to \frac{1}{2}(\underset{\sim}{E}\cdot\underset{\sim}{D}+\underset{\sim}{B}\cdot\underset{\sim}{H}) = \frac{1}{2}(\varepsilon_\circ E^2 + \mu_\circ H^2) \quad . \tag{28c}$$

Por otra parte, el tensor de esfuerzos (ver Ec. (6b)) del sistema de dos fluidos independientes está dado por

$$\underset{\sim}{T} = (p_\ell + p_t)\mathbb{1} + \mu_\ell \underset{\sim}{V}_\ell \underset{\sim}{V}_\ell + \mu_t \underset{\sim}{V}_t \underset{\sim}{V}_t \quad , \tag{29}$$

cuya transcripción a conceptos electromagnéticos, utilizando las reglas (28) y (18), quedaría expresada como

$$\underset{\sim}{T} \to \underset{\sim\sim}{ED} + \underset{\sim\sim}{BH} - \frac{1}{2}(\underset{\sim}{E}\cdot\underset{\sim}{D}+\underset{\sim}{B}\cdot\underset{\sim}{H}) \tag{30a}$$

$$= \varepsilon_\circ \underset{\sim\sim}{EE} + \mu_\circ \underset{\sim\sim}{HH} - \frac{1}{2}(\varepsilon_\circ E^2 + \mu_\circ H^2) \quad , \tag{30b}$$

que corresponde precisamente al tensor de esfuerzos de Maxwell.

En consecuencia, la ley de conservación del ímpetu (Ec. (6a)) del sistema de dos fluidos, en estado estacionario, queda dada por

$$\nabla \cdot \underset{\approx}{T} = \underset{\sim}{f}_{ex} \quad . \tag{31}$$

Para el sistema electromagnético, la ecuación correspondiente se obtiene sustituyendo en la Ec. (31) la regla de transcripción dada en la Ec. (30), y así tenemos

$$\nabla \cdot \underset{\approx}{T} = \underset{\sim}{E}(\nabla \cdot \underset{\sim}{D}) - \underset{\sim}{B} \times (\nabla \times \underset{\sim}{H}) = \underset{\sim}{f}_{ex} \quad . \tag{32}$$

Al integrar esta ecuación sobre un volumen Ω y haciendo uso del teorema de Gauss y de las Ecs. (20), se obtiene finalmente que

$$\int_{\Sigma} \underset{\approx}{T} \cdot d\underset{\sim}{a} = \int_{\Omega} (\rho_q \underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{j}_q \times \underset{\sim}{B}) d^3r = \underset{\sim}{F}_{ex} \quad . \tag{33}$$

El lado izquierdo de esta ecuación es la integral sobre la superficie Σ (que delimita a Ω) del tensor de esfuerzos y representa la fuerza transmitida por los fluidos al interior del volumen Ω, la cual puede también interpretarse (la parte de enmedio de la ecuación) como la fuerza sobre cargas y corrientes debida a la presencia de los campos eléctrico y magnético y conocida bajo el nombre de <u>fuerza de Lorentz</u>. En el lado derecho de la ecuación aparecen las fuerzas externas necesarias para balancear la fuerza de Lorentz y mantener al sistema electromagnético en reposo.

Con las ecuaciones electromagnéticas (Ecs. (20) y (21)) y la fuerza de Lorentz (Ec. (33)) es posible realizar una descripción <u>completa</u> de los campos estáticos producidos por cuerpos electrizados y circuitos eléctricos, así como de las fuerzas de interacción resultantes; es decir, que es posible deducir de ellas, la ley de Coulomb y las leyes de Ampére.

En este sentido, el modelo de dos fluidos representa una "explicación" de los fenómenos estáticos del electromagnetismo equivalente a la "explicación" basada en fuerzas que actúan "a distancia". Aunque ambas "explicaciones" tienen dificultades conceptuales bastante serias, creemos que el modelo de dos fluidos puede resultar útil para ilustrar el tipo de problemas que se presentan cuando se trata de extender el campo de acción de un determinado modelo para incluir la "explicación" de nuevos fenómenos físicos. Esto es precisamente lo que queremos presentar en la siguiente sección.

5. LOS EFECTOS MAGNETICOS DE LAS CARGAS EN MOVIMIENTO

La idea esencial detrás del modelo de dos fluidos es la existencia de un medio transmisor de los fenómenos electromagnéticos. Por lo tanto, cualquier modificación que se le tuviera que hacer al modelo, con el fin de incluir la "explicación" de una fenomenología más amplia, se realizaría tratando de mantener la idea esencial, la idea de un medio transmisor.

Tomemos, como ejemplo, los experimentos de Rowland[12] en 1876, que muestran los efectos magnéticos de los cuerpos cargados en movimiento. Experiencias semejantes[13] a las de Rowland, junto con los cálculos de J.J. Thomson[14], G. Fitzgerald[15] y O. Heaviside[16] utilizando teorías sofisticadas sobre la estructura del medio transmisor, dieron como conclusión que la convección de electricidad era equivalente a una corriente eléctrica. La relación cuantitativa entre ellas resultó estar dada por

$$\underset{\sim}{j}_q = \rho_q \underset{\sim}{u} \quad , \qquad (34)$$

en donde $\underset{\sim}{u}$ es la velocidad de convección.

Sin pretender seguir el desarrollo histórico de los acontecimientos, y tratando de permanecer en el ámbito de los fenómenos estáticos del electromagnetismo, vamos a explorar las dificultades que la Ec. (34) impondría al modelo de dos fluidos. Para eso tomaremos el caso de cargas que fluyen a través de un circuito cerrado con velocidad constante, generando de esta manera un campo magnetostático.

En el modelo de dos fluidos propuesto en la sección 3 se consideró que las fuentes (o sumideros) y los vórtices eran de naturaleza física distinta y que estaban asociados a la existencia de dos tipos de fluidos diferentes y desacoplados.

Por otra parte, la Ec. (34) nos muestra que las corrientes eléctricas no son otra cosa que cargas en movimiento; por lo tanto, los vórtices deberían interpretarse como fuentes en movimiento. Es decir, que las fuentes generadoras del fluido ℓ, al ponerse en movimiento, se acoplan con el fluido t generando en él vorticidad.

En consecuencia, si se pretende mantener la idea de dos fluidos es necesario añadir una hipótesis adicional relacionada con la estructura de las fuentes de un fluido, que haga posible acoplar su movimiento translacional con la generación de vorticidad en el otro fluido. En este sentido, la existencia del movimiento simultáneo en ambos fluidos no sería ya más independiente, sino que estaría acoplado a través del movimiento translacional de las fuentes de uno de ellos.

Creemos que no sería difícil imaginar un modelo mecánico de la estructura de las fuentes que pudiera acoplar adecuadamente el movimiento translacional con el rotacional, de tal manera de obtener una vorticidad j_t en el fluido t proporcional a la velocidad $\underset{\sim}{u}$ de las fuentes ρ_ℓ del fluido ℓ. Por el momento vamos a suponer que es posible concebir dicho modelo mecánico y que podemos escribir una relación correspondiente a la Ec. (34) de la siguiente manera:

$$\underset{\sim}{j}_t = \frac{1}{c}\frac{\mu_\ell}{\mu_t}\rho_\ell \underset{\sim}{u} \quad , \tag{35}$$

en donde c es una constante de proporcionalidad con unidades de velocidad.

La primera consecuencia de un modelo de este tipo sería el aceptar la necesidad de una fuente de energía externa que mantuviera a las fuentes en movimiento. En el caso del circuito eléctrico, ésta estaría representada por la fuente de voltaje o pila, que proporciona la potencia necesaria para mantener el movimiento de las cargas en contra de la fricción originada por la resistencia eléctrica.

Debido a que el acoplamiento en el movimiento de los fluidos aparece sólo en su génesis, es posible suponer que después de generado el movimiento del fluido t, éste se comporta como un fluido independiente del fluido ℓ. De esta manera los "parches" que requiere el modelo serían mínimos, ya que las ecuaciones cinéticas (Ecs. (20) y (21)) seguirían siendo válidas y lo único que tendríamos que revisar sería el comportamiento dinámico del modelo a través de las leyes de conservación.

Por ejemplo, la ley de conservación de la energía tendría que tomar en cuenta la presencia de una fuente externa de potencia y la liberación de calor. En este caso, la Ec. (23) se vería reemplazada por

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left[(W_\ell + p_\ell)\underset{\sim}{V}_\ell + (W_t + p_t)\underset{\sim}{V}_t \right] d^3r = \int_{\Omega} \rho_\ell (W_\ell + p_\ell) d^3r + \frac{dE_{ex}}{dt} - \int_{\Sigma} \underset{\sim}{Q} \cdot d\underset{\sim}{a} \quad , \tag{36}$$

en donde dE_{ex}/dt es la potencia proporcionada por la pila y $\underset{\sim}{Q}$ es el flujo de calor.

Con el fin de modificar lo menos posible el modelo original vamos a satisfacer la Ec. (36) exigiendo que el teorema de Bernoulli se cumpla para cada fluido, o sea, que $W_\ell + p_\ell$ y $W_t + p_t$ sean constantes. En este caso las presiones p_ℓ y p_t quedan determinadas por las Ecs. (26) y el tensor de esfuerzos por las mismas Ecs. (29) y (30). En consecuencia, la ecuación de movimiento no se ve alterada y se obtiene nuevamente que la fuerza por unidad de volumen ejercida por los campos sobre cargas y corrientes queda dada por la fuerza de Lorentz:

$$\underset{\sim}{f}_q = \rho_q (\underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{B}) \quad , \tag{37}$$

en donde hemos utilizado la relación $j_q = \rho_q \underset{\sim}{u}$; y que en el caso de fenómenos estáticos se verá balanceada por agentes externos.

Ahora bien, dado que la potencia suministrada por la pila está destinada a producir campos electromagnéticos que mantengan a las cargas en movimiento con velocidad $\underset{\sim}{u}$, podemos escribir que

$$\frac{dE_{ex}}{dt} = \int_{\Omega} \underset{\sim}{f}_q \cdot \underset{\sim}{u} d^3r = \int_{\Omega} \underset{\sim}{j}_q \cdot \underset{\sim}{E} d^3r \quad , \tag{38}$$

y la ecuación de balance de energía (Ec. (36)) quedará expresada entonces como

$$\int_{\Omega} \underset{\sim}{j}_q \cdot \underset{\sim}{E} d^3r = - \int_{\Sigma} \underset{\sim}{Q} \cdot d\underset{\sim}{a} \quad , \tag{39}$$

Utilizando las Ecs. (20) y el teorema de Gauss, tenemos

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \underset{\sim}{H}) \cdot \underset{\sim}{E} d^3r = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\underset{\sim}{E} \times \underset{\sim}{H}) d^3r = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \underset{\sim}{Q} d^3r \quad , \tag{40}$$

que hace posible escribir finalmente la ley de conservación de la energía como

$$\nabla \cdot (\underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{Q}) = 0 \quad , \tag{41a}$$

en donde

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{E} \times \underset{\sim}{H} \tag{41b}$$

es el llamado vector de Poynting y representa el flujo de energía (suministrada por la pila) almacenada en los campos electromagnéticos.

En el caso de que no hubiera liberación de calor ($\underset{\sim}{Q} = 0$), por ejemplo si las cargas se movieran en un medio que no ofreciera resistencia eléctrica, se tendría que

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{S} = 0 \quad . \tag{42}$$

En el modelo de dos fluidos y utilizando la Ec. (35), el vector de Poynting correspondería a la siguiente expresión:

$$\underset{\sim}{S} = c\mu_t (\underset{\sim}{V}_{\ell} \times \underset{\sim}{V}_t) \quad , \tag{43}$$

en donde la aparición de la constante c nos recuerda que el origen de este flujo de energía proviene del acoplamiento entre los fluidos causado por el movimiento translacional de las fuentes. En otras palabras, al poner en movimiento translacional una fuente de ℓ se crea un campo de velocidades en t y la energía gastada en este proceso se almacena en los fluidos y acompaña a la fuente durante su movimiento.

6. LAS LIMITACIONES Y DIFICULTADES DEL MODELO

Es claro que la prueba más severa al modelo de dos fluidos sería su capacidad para "explicar" los fenómenos electromagnéticos dependientes del tiempo, como por ejemplo, la inducción electromagnética de Faraday[17]. Sin embargo, es muy claro también que la "explicación" de dichos fenómenos está fuera del alcance de un modelo tan simple en donde se supone, desde un inicio, que no existe ningún mecanismo interno que acople la dinámica de los dos fluidos. Por ejemplo, en modelos mucho más sofisticados como el sistema de partículas y vórtices propuesto por Maxwell[18], la ley de inducción de Faraday se puede escribir como

$$\nabla \times \underset{\sim}{E} = - \frac{\partial \underset{\sim}{B}}{\partial t} . \tag{44}$$

Utilizando las reglas de transcripción (Ec. (18)) del modelo de dos fluidos, esta ecuación correspondería a

$$\nabla \times \underset{\sim}{V}_{\ell} = - \frac{\partial \underset{\sim}{V}_t}{\partial t} , \tag{45}$$

lo cual significa que variaciones temporales en la velocidad de un fluido producen cambios espaciales en el campo de velocidades del otro, indicando claramente la necesidad de un mecanismo de acoplamiento entre ambos fluidos para poder llegar a explicar fenómenos como la inducción electromagnética.

Dicho mecanismo podría resultar bastante complejo y por el momento sería difícil de imaginar, lo cual no quiere decir, obviamente, que tal vez con suficiente ingenio y trabajo no pudiera llegarse a encontrar un mecanismo adecuado. El propósito de llegar a concebir el mencionado mecanismo no sería sólo para "explicar" la ley de inducción, sino también para poder llegar a lograr una "explicación" coherente y global de todos los fenómenos electromagnéticos. Este objetivo fue, en cierta medida, el que impulsó a Maxwell a construir un modelo mecánico del llamado éter electromagnético[18].

Sin embargo, el modelo de dos fluidos tiene otro tipo de dificultades, que algunos podrían llamar de carácter más fundamental, como lo son el origen y la naturaleza misma de los fluidos. Por ejemplo, es muy difícil aceptar, en la actualidad, la existencia de fuentes (y sumideros) inagotables de materia y energía. Por otra parte, con los instrumentos de observación más modernos no ha sido posible detectar ningún tipo de ente material o éter que actúe como mediador de los fenómenos electromagnéticos. Subsisten además los viejos problemas acerca del movimiento de los cuerpos cargados con respecto a un sistema privilegiado proporcionado por el éter en contraposición con la versión actual del Principio de Relatividad(19).

Sin embargo durante los siglos XVIII y XIX no causaba ninguna extrañeza la "explicación" de los fenómenos físicos a partir de hipótesis sobre la existencia de fluidos imponderables con las más esotéricas propiedades mecánicas; ni dicha "explicación" impedía, mucho menos, el trabajo serio de investigación sobre la descripción física más adecuada de dichos fluidos. Baste recordar fluidos como el flogisto, el calórico y el éter luminífero que jugaron un papel fundamental en el desarrollo de la física en el siglo pasado.

De la misma manera hoy no sorprende a nadie la "explicación" de que las fuerzas electromagnéticas se transmiten a través del "vacío" por medio de pequeñas partículas imponderables que viajan siempre a la misma velocidad con respecto a cualquier sistema inercial, que jamás pueden estar en reposo, mas sin embargo pueden ser absorbidas y emitidas por las partículas atómicas, que poseen un momento angular intrínseco que jamás se altera y que pueden llegar a tener, en determinadas circunstancias, un comportamiento ondulatorio. Tampoco causa extrañeza que se dediquen esfuerzos serios para tratar de detectar su masa(20) e investigar su comportamiento en presencia de campos gravitacionales.

Por lo tanto lo "familiar" o "extraño" que puedan parecer las hipótesis fundamentales que sirven como punto de partida a la "explicación" de los fenómenos físicos depende, en mucho, del grado de aceptación que un cierto tipo de ideas puede llegar a tener en el seno de la comunidad científica en un momento determinado. A su vez, dicha aceptación depende, entre otras cosas, de las ataduras culturales, filosóficas y económicas que la propia comunidad científica guarda con el resto de la sociedad[21].

En conclusión, en el presente trabajo se ha presentado un modelo hidrodinámico capaz de describir adecuadamente toda la fenomenología de la electrostática y la magnetostática. El propósito es ofrecer una "explicación" alternativa a la "explicación" usual basada en fuerzas que actúan "a distancia", con el fin de mostrar que el enfoque, planteamiento y desarrollo de un conjunto de problemas físicos dependen fuertemente de las ideas subyacentes a los mecanismos internos que gobiernan los fenómenos físicos. Se hace notar también, que la aceptación de las hipótesis fundamentales en las que se basan dichos mecanismos está ligada, en buena medida, a factores de carácter histórico y cultural.

REFERENCIAS

1. Ver por ejemplo, S.R. Reitz y F.J. Milford, Foundations of Electromagnetic Theory, Addison-Wesley, Massachussetts (1960) p. 21.
2. Ver por ejemplo, E. Whittaker, A History of the Theories of Aether and Electricity, Harper and Brothers, New York (1960) Vol. 1, p. 85.
3. A. Coulomb, Memoires de l'Academic Royale des Sciences, Paris, Histoire 1785, p. 569, 578. Traducido en parte al inglés en W.F. Migie, A Source Book in Physics, Harvard U.P., Cambridge, Mass. (1965) pp. 408 - 420; J.C. Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, Oxford U.P., Vol. 1, 3a. ed. de 1891, reimpreso por Dover, New York (1954) pp. 80 - 86; S.J. Plimpton y W.E. Lawton, Phys. Rev., 50 (1963) 1066; G.D. Cochran y P.A. Franken, Bull. Amer. Phys. Soc., 13 (1968) 1379; D.F. Bartlett, P.E. Godhagen y E.A. Phillips, Phys. Rev., D2 (1970) 483; E.R. Williams, J.E. Faller y H. Hill, Phys. Rev. Letters, 26 (1971) 721; E. Schrödinger, Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 49 (1943) 135; M.A. Gintsburg, Astron. Zh., 40 (1963) 703, traducido al inglés en Sov. Astron., AJ 7 (1963) 536; A.S. Goldhaber y M.M. Nieto, Phys. Rev. Letters, 21 (1968) 567; G. Feinberg, Science, 166 (1969) 879. Una buena revisión se encuentra en A.S. Goldhaber y M. M. Nieto, Rev. of Modern Physics, 43 (1971) 277, en un artículo intitulado "Terrestrial and Extraterrestrial Limits of the Photon Mass".
4. Ver por ejemplo, R.P. Feynman, R.B. Leighton y M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publ. Co. Reading, Mass. (1964) Vol. II, p. 17-6 y p. 27-11; R.H. Romer, Am. J. Phys., 34 (1966) 772; E. Corinaldesi, Am. J. Phys., 48 (1980) 83.
5. Ver por ejemplo, E. Whittaker, A History of the Theories of Aether and Electricity, Harper and Brothers, New York (1960) Vol. 1, p. 43.
6. H. Von Helmholtz, Jour. für Math., 60 (1858) 25, traducido al inglés

en Phil. Mag., 33 (1867) 485.
7. Ver por ejemplo, R.P. Feynman, R.B. Leighton y M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publ. Co. Reading Mass. (1964) Vol. II, Caps. 12, 40 y 41.
8. Ver por ejemplo, J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons, Inc., New York, 29 ed. (1975).
9. Ver por ejemplo, P.D. McCormack y L. Crane, Physical Fluid Dynamics, Academic Press, New York (1973) Cap. 3.
10. Ver por ejemplo, I.G. Currie, Fundamental Mechanics of Fluids, Mc Graw Hill, New York (1974) p. 9.
11. Ver por ejemplo, I.G. Currie, op. cit., p. 54.
12. H.A. Rowland, Ann. d. Phys., 158 (1876) 487; Annales de Chim. et de Phys., 12 (1877) 119.
13. H.A. Rowland y C.T. Hutchinson, Phil. Mag., 27 (1889) 445; A. Eichenwald, Ann. d. Phys., 11 (190) 1; H. Pender, Phil. Mag. 2 (1901) 179; E.P. Adams, Amer. Jour. Sci., 12 (1901) 155; H. Pender y V. Crémieu, Jour. de Phys., 2 (1903) 641.
14. J.J. Thomson, Phil. Mag., 11 (1881) 229.
15. G.F. Fitzgerald, Proc. Roy. Dublin Soc., 3 (Nov. 1881) 250; Fitzgerald's Scientific Writings, p. 102.
16. O. Heaviside, Electrician, 23 Nov. 1888; Phil. Mag., 27 (1889) 324.
17. Ver por ejemplo, L.D. Landau y E.M. Lifshitz, Electrodynamics of Continuous Media, Pergamon Press, London (1960) p. 207.
18. J.C. Maxwell, Phil. Mag., 21 (1861) pp. 161, 281, 338; 23 (1862) pp. 12, 85; Maxwell's Scientific Papers, 1, p. 451.
19. Ver por ejemplo, E.F. Taylor y S.A. Wheeler, Spacetime Physics, W.H. Freeman and Co., San Francisco (1963) p. 11.
20. Ver el artículo de revisión mencionado al final de la Ref. 3.
21. Ver por ejemplo, R.G. Barrera y A. Gallardo, "Sobre los Problemas de la Confrontación Teoría - Experimento", Rev. Mex. Fis., 28 (1982) 683.