



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

REFRACCIÓN NEGATIVA EN METAMATERIALES
ANISOTRÓPICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A :

CARLOS PRIETO LÓPEZ

COMITÉ DE TUTORES:

DR. RUBÉN GERARDO BARRERA Y PÉREZ

DR. EUGENIO LEY KOO

DR. KAREN VOLKE SEPÚLVEDA

2011

posgrado en ciencias físicas
u n a m

*Podrán morir las personas,
pero jamás sus ideas*

Ernesto *Che* Guevara

Índice general

Introducción	1
1.1. Conceptos previos	2
El flujo de energía en un material anisotrópico uniaxial	5
2.2. La relación de dispersión	6
2.3. Geometría de \vec{E} y \vec{H}	9
2.4. Refracción	14
2.4.1. Vectores de onda	15
2.4.2. Vector de Poynting	16
2.4.3. Proyección de \vec{S}_α sobre \vec{k}_α	21
2.5. Coeficientes de transmisión y reflexión	28
2.5.1. Polarización s	29
2.5.2. Polarización p	30
2.5.3. Algunas propiedades de r	31
2.5.4. Reflectancia y transmitancia	33
2.6. Polarización mixta	36
2.7. Incidencia desde un medio anisotrópico	38

2.7.1. Vectores de onda y Ley de Snell	38
2.7.2. Coeficientes de reflexión y transmisión	39
2.7.3. Reflectancia y transmitancia	40
Refracción negativa en un metamaterial laminado	41
3.8. Propiedades efectivas de un material laminado	41
3.9. Modelo de Drude	44
3.10. Metamaterial metálico-dieléctrico sin disipación	45
Aplicación: colimador de luz difusa por refracción	49
Resumen y conclusiones	61
Referencias	66

·1· Introducción

Si uno ojea artículos de los años veinte del siglo pasado en revistas científicas de la época, como el *Philosophical Magazine* –una de las más antiguas revistas de ciencia existentes–, puede encontrar candentes discusiones sobre las propiedades ópticas de materiales anisotrópicos, involucrando a personajes de la talla de William Bragg¹.

Sería difícil pensar que pasado todo este tiempo se discutan asuntos sencillos sobre el tema como saber cuánta luz reflejan estos materiales. Sin embargo, hay artículos que se lo plantean aún a finales de ese siglo[2].

Aún pasada la primer década de este nuevo milenio, seguimos hablando del tema, con nuevas perspectivas que ideas relativamente recientes le han permitido a la óptica y la ciencia de materiales tomar. En 1967 Víctor Veselago hizo la primer mención al concepto de *refracción negativa* [3], y en la orilla del siglo se realizó una primer propuesta [4] para construir un material en el que el fenómeno se pudiera observar.

El origen de los metamateriales –materiales diseñados para obtener características heredadas no solamente de su composición, sino también de su estructura– [5], [6], [7] ha permitido extender en particular las propiedades ópticas para encontrar comportamientos que antes no eran posibles. Como ejemplo, la actividad magnética, que en los materiales naturales es despreciable a frecuencias ópticas [8], puede obtenerse en estos nuevos diseños.

Aprovechando la flexibilidad que estos y otros trabajos han aportado al tema, aquí analizamos un material anisotrópico uniaxial en condiciones un poco más generales que las usuales. Algunas propiedades sobre estos materiales fueron ya

¹véase, por ejemplo, [1]

establecidas en [9] y [10], y [11] ha mostrado que se pueden obtener materiales anisotrópicos con anisotropías extremas. Así, permitimos que el material tenga actividad magnética, y que los componentes de sus tensores eléctrico y magnético adquieran cualquier valor, y extendemos algunos de los análisis de las citadas referencias.

Tras enunciar muy brevemente algunos hechos básicos sobre los materiales, analizamos la propagación de las ondas en un material de tal estilo, la geometría de los campos en él, y la propagación de la onda y de su energía.

Posteriormente, analizamos la refracción y reflexión del mismo desde un medio isotrópico usual, calculamos la ley de Snell para los diversos modos, los coeficientes de transmisión y reflexión, y la transmitancia y reflectancia, encontrando propiedades interesantes que no se dan al restringir los valores de $\vec{\epsilon}$ y $\vec{\mu}$, como refracción negativa en un material con índice de refracción imaginario o las condiciones para obtener un material totalmente antirreflejante ².

Después analizamos de manera teórica una propuesta para un sencillo metamaterial que puede presentar algunas de las propiedades previamente expuestas e incluso tener refracción negativa en ausencia de actividad magnética, lo cual representa una mayor facilidad práctica de diseño.

Al final, aprovechamos los resultados calculados para mostrar cómo se puede colimar luz difusa de una manera relativamente sencilla, lo cual puede representar en una aplicación sumamente relevante en términos tecnológicos.

1.1. Conceptos previos

Conviene enunciar algunos hechos básicos que se utilizarán en alguna medida a lo largo del texto. Su exposición detallada y demostración puede encontrarse en [13], [14], [15], o de manera condensada en [16].

Para abordar desde el punto de vista electromagnético el problema de los materiales hay que tomar en cuenta que los componentes microscópicos de estos responderán mecánicamente a su presencia y generarán nuevos campos. Macros-

²En coincidencia con las condiciones necesarias para la invisibilidad, desde la perspectiva de la teoría de transformaciones [12]

cópicamente esto se refleja como una inducción de densidades de carga ρ_{ind} y densidades de corriente \vec{J}_{ind} en el material. El problema de calcular estas cantidades siempre se puede intercambiar, de manera exacta, por el de encontrar campos vectoriales \vec{P} y \vec{M} que cumplan las ecuaciones

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{P} &= -\rho_{ind} \\ \nabla \times \vec{M} &= \vec{J}_{ind} + \partial_t \vec{P} \quad .\end{aligned}\quad (1.1)$$

Si se pide que estas funciones valgan $\vec{0}$ fuera del material se puede interpretar \vec{P} como una densidad de momento dipolar eléctrico y \vec{M} como una densidad de momento dipolar magnético, independientemente de la frecuencia de oscilación del campo.

Esta interpretación permite establecer un modelo de respuesta al establecer \vec{P} y \vec{M} como funciones de \vec{E} y \vec{B} respectivamente, y lineales en su versión más simple. Aunque lineales, estas relaciones reflejan el hecho de que el momento dipolar inducido a un tiempo dado es la suma de todos los momentos inducidos previamente, lo que hace esta relación integral en el tiempo:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t \chi_e(t-t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \quad , \quad (1.2)$$

que implica además la existencia de disipación de energía electromagnética.

Como consecuencia de esta relación integral, \hat{D} y \hat{E} (las transformadas de Fourier en el tiempo de \vec{D} y \vec{E}) son proporcionales, y llamamos al factor de proporcionalidad *función dieléctrica*, $\epsilon(\omega)$. La parte imaginaria de ésta es una medida de la contribución eléctrica a la disipación de la energía. Todos estos resultados tienen un análogo magnético.

Las partes real e imaginaria de estas funciones no son independientes, y de la existencia de dispersión en un material se infiere la necesaria existencia de disipación en algunas frecuencias. Todos los materiales son disipadores y hablar de materiales no disipadores es una aproximación sólo válida en ciertos rangos de frecuencia, llamados ventanas de transparencia.

Al proponer \vec{E} como una onda plana $\text{Re}[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}]$ \vec{D} resulta ser $\text{Re}[\epsilon(\omega) \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t}]$, es decir, en general no está en fase con el campo eléctrico. Todos estos resultados se pueden aplicar componente a componente en materiales anisotrópicos, en donde ϵ y μ se reemplazan por tensores y en los cuales las relaciones constitutivas

son

$$\begin{aligned}\hat{D} &= \hat{\epsilon} \cdot \hat{E} \\ \hat{B} &= \hat{\mu} \cdot \hat{H} \quad ,\end{aligned}\tag{1.3}$$

lo que permite simplemente sustituir los escalares por operadores en los resultados que se obtienen para ondas planas en el caso isotrópico.

·2. El flujo de energía en un material anisotrópico uniaxial

Consideremos un material anisotrópico no disipador con respuesta electromagnética

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mu} &= \mu_{\parallel}(\hat{e}_x\hat{e}_x + \hat{e}_y\hat{e}_y) + \mu_{\perp}\hat{e}_z\hat{e}_z \\ \overleftrightarrow{\varepsilon} &= \varepsilon_{\parallel}(\hat{e}_x\hat{e}_x + \hat{e}_y\hat{e}_y) + \varepsilon_{\perp}\hat{e}_z\hat{e}_z \quad ,\end{aligned}$$

en el cual $\hat{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \hat{E}$ y $\hat{B} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \hat{H}$. Este material tiene una dirección especial, un eje (con el cual hemos alineado el eje z) que llamaremos *eje óptico*. Como se puede ver, los tensores electromagnéticos de respuesta quedan caracterizados por dos componentes reales, una componente etiquetada con \parallel (de *paralela*, que representa la dirección paralela al plano normal al eje óptico) y otra etiquetada con \perp (de *ortogonal* que representa la dirección ortogonal al mismo plano).

Hemos supuesto también, implícitamente, que el “eje óptico magnético” y el “eje óptico eléctrico” coinciden, lo que se refleja en que en el sistema de coordenadas elegido, ambos tensores sean diagonalizables. Ésta suposición no es la más general, pero, como veremos en un capítulo posterior, es justificable en algunos casos.

Definiremos $a_m := \mu_{\parallel}/\mu_{\perp}$ y $a_e := \varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{\perp}$, que serán una medida de la anisotropía eléctrica y magnética respectivamente. Es útil notar que $\overleftrightarrow{\mu}$ también se puede escribir en la forma

$$\overleftrightarrow{\mu} = \mu_{\parallel}(\overleftrightarrow{I} + (a_m^{-1} - 1)\hat{e}_z\hat{e}_z) \quad , \quad (2.4)$$

y que su inverso es

$$\overleftrightarrow{\mu}^{-1} = \mu_{\parallel}^{-1}(\overleftrightarrow{I} + (a_m - 1)\hat{e}_z\hat{e}_z) \quad . \quad (2.5)$$

Algo análogo se obtiene para $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$ ya que tiene la misma forma. Supondremos que estamos en un rango de frecuencias de disipación despreciable, y trabajaremos con los modos normales del campo, para los cuales se cumple

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{D} &= \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \cdot \partial_t \vec{E} \\ \partial_t \vec{B} &= \overset{\leftrightarrow}{\mu} \cdot \partial_t \vec{H} \quad .\end{aligned}\tag{2.6}$$

2.2. La relación de dispersión

Ahora consideremos las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes externas:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \tag{2.7}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.8}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \vec{0} \tag{2.9}$$

$$\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{0} \quad . \tag{2.10}$$

La Ley de Faraday (2.9), se puede escribir también como

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} \\ &= \nabla \times \vec{E} + \overset{\leftrightarrow}{\mu} \cdot \partial_t \vec{H} \\ &= \nabla \times \vec{E} + \mu_{\parallel} (\partial_t \vec{H} + (a_m^{-1} - 1) \hat{e}_z \partial_t H_z)\end{aligned}\tag{2.11}$$

De las relaciones constitutivas, tenemos que $\mu_{\perp} \partial_t H_z = \partial_t B_z = (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{e}_z$. Calculando el rotacional de la ley de Faraday, obtenemos además que

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \mu_{\parallel} \partial_t \nabla \times \vec{H} + (\mu_{\perp} - \mu_{\parallel}) \nabla \times (\hat{e}_z \partial_t H_z) \\ &= \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \mu_{\parallel} \partial_t^2 \vec{D} + \frac{\mu_{\perp} - \mu_{\parallel}}{\mu_{\perp}} \nabla \times (\hat{e}_z (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{e}_z) \\ &= \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \mu_{\parallel} \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \cdot \partial_t^2 \vec{E} + (a_m - 1) \nabla \times (\hat{e}_z (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{e}_z)\end{aligned}\tag{2.12}$$

Para una función de la forma $\vec{E} = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}] = \text{Re}[\tilde{\vec{E}}]$ tenemos que

$$\begin{aligned}\nabla \times (\hat{e}_z (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{e}_z) &= \text{Re}[i \nabla \times (\hat{e}_z \hat{e}_z \cdot (\vec{k} \times \tilde{\vec{E}}))] \\ &= \text{Re}[-i \nabla \times (\hat{e}_z \tilde{\vec{E}} \cdot (\vec{k} \times \hat{e}_z))] \\ &= \text{Re}[-i \nabla (\tilde{\vec{E}} \cdot (\vec{k} \times \hat{e}_z)) \times \hat{e}_z] \\ &= \text{Re}[-i \tilde{\nabla} \tilde{\vec{E}} \cdot (\vec{k} \times \hat{e}_z) \times \hat{e}_z] \\ &= [\vec{k} \tilde{\vec{E}} \cdot (\vec{k} \times \hat{e}_z)] \times \hat{e}_z \\ &= (\vec{k} \times \hat{e}_z) (\vec{k} \times \hat{e}_z) \cdot \tilde{\vec{E}} \quad ,\end{aligned}\tag{2.13}$$

y, como $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \vec{k}\vec{k} \cdot \vec{E} - k^2\vec{E}$, la ecuación de onda queda en este caso particular así:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= -\vec{k}\vec{k} \cdot \vec{E} + k^2\vec{E} - \mu_{\parallel}\omega^2\overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \cdot \vec{E} + (1 - a_m)(\vec{k} \times \hat{e}_z)(\vec{k} \times \hat{e}_z) \cdot \vec{E} \\ &= \left[-\vec{k}\vec{k} + k^2\overset{\leftrightarrow}{I} - \mu_{\parallel}\omega^2\overset{\leftrightarrow}{\epsilon} + (1 - a_m)(\vec{k} \times \hat{e}_z)(\vec{k} \times \hat{e}_z) \right] \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (2.14)$$

que se puede ver como un tensor $\overset{\leftrightarrow}{T} = -\vec{k}\vec{k} + k^2\overset{\leftrightarrow}{I} - \mu_{\parallel}\omega^2\overset{\leftrightarrow}{\epsilon} + (1 - a_m)(\vec{k} \times \hat{e}_z)(\vec{k} \times \hat{e}_z)$ contraído con \vec{E} . En el caso general, este tensor debe tener determinante cero para que la ecuación se cumpla.

Coloquemos el eje x en el plano que forman el vector de onda y el eje óptico, de manera que $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$, y

$$\vec{k}\vec{k} - k^2\overset{\leftrightarrow}{I} = \begin{pmatrix} -k_z^2 & 0 & k_x k_z \\ 0 & -k^2 & 0 \\ k_z k_x & 0 & -k_x^2 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$\vec{k} \times \hat{e}_z = (0, -k_x, 0)$, y

$$(\vec{k} \times \hat{e}_z)(\vec{k} \times \hat{e}_z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

con lo que $\overset{\leftrightarrow}{T}$ en esta base toma la forma

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = \begin{pmatrix} k_z^2 - \mu_{\parallel}\epsilon_{\parallel}\omega^2 & 0 & -k_x k_z \\ 0 & k^2 - \mu_{\parallel}\epsilon_{\parallel}\omega^2 + (1 - a_m)k_x^2 & 0 \\ -k_z k_x & 0 & k_x^2 - \mu_{\parallel}\epsilon_{\perp}\omega^2 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

o, haciendo $n_{\parallel} = \sqrt{\epsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}/\epsilon_0\mu_0}$ y $k_0 = \omega/c$,

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = \begin{pmatrix} k_z^2 - k_0^2 n_{\parallel}^2 & 0 & -k_x k_z \\ 0 & k^2 - k_0^2 n_{\parallel}^2 + (1 - a_m)k_x^2 & 0 \\ -k_z k_x & 0 & k_x^2 - k_0^2 n_{\parallel}^2 a_e^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

Así, en el caso general la condición

$$\begin{aligned} 0 &= |\overset{\leftrightarrow}{T}| \\ &= (k^2 - k_0^2 n_{\parallel}^2 + (1 - a_m)k_x^2) \left[(k_z^2 - k_0^2 n_{\parallel}^2)(k_x^2 - k_0^2 n_{\parallel}^2 a_e^{-1}) - k_x^2 k_z^2 \right] \\ &= (k^2 - k_0^2 n_{\parallel}^2 + (1 - a_m)k_x^2) k_0^2 n_{\parallel}^2 a_e^{-1} (-k_z^2 - k_x^2 a_e + k_0^2 n_{\parallel}^2) \\ &= k_0^2 n_{\parallel}^2 a_e^{-1} (k_0^2 n_{\parallel}^2 - k^2 + (1 - a_m)k_x^2) (k_0^2 n_{\parallel}^2 - k^2 + (1 - a_e)k_x^2) \end{aligned} \quad (2.19)$$

nos da dos posibilidades para k :

$$\begin{aligned} k_m^2 &= k_0^2 n_{\parallel}^2 + (1 - a_m) k_x^2 \\ k_e^2 &= k_0^2 n_{\parallel}^2 + (1 - a_e) k_x^2 \quad , \end{aligned} \quad (2.20)$$

que en el caso general da lugar a la existencia de dos rayos, pues el campo será la superposición de un campo con vector de onda \vec{k}_e y otro con vector de onda \vec{k}_m . En los casos como este, en el que a_m y a_e son intercambiables, nos referiremos indistintamente a alguno de ellos como a_{α} y como α_{\perp} y a_{\parallel} a los correspondientes valores ortogonal y paralelo.

Ahora bien, los modos correspondientes a estos números de onda se obtienen de la solución a $\vec{T} \cdot \vec{E} = \vec{0}$, que implica las tres ecuaciones

$$\frac{k_z^2 - k_0^2 n_{\parallel}^2}{k_x k_z} E_x = E_z \quad (2.21)$$

$$(k^2 - k_0^2 n_{\parallel}^2 + (1 - a_m) k_x^2) E_y = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{k_x k_z}{k_x^2 - k_0^2 n_{\parallel}^2 a_e^{-1}} E_x = E_z \quad . \quad (2.23)$$

- Si $k = k_e$, $k_0^2 n_{\parallel}^2 - k_z^2 = k_x^2 a_e$ y $k_0^2 n_{\parallel}^2 - a_e k_x^2 = k_z^2$ y, en tal caso, las ecuaciones (2.21) y (2.23) son exactamente las mismas, por lo cual no hay restricción sobre E_x y E_z . La ecuación (2.22) se convierte, por otro lado en $(a_e^{-1} - a_m^{-1}) k_x^2 E_y = 0$. Si $a_e \neq a_m$, E_y entonces tiene que ser nula; si $a_e = a_m$, entonces el valor de E_y no está restringido.
- Si $k = k_m$, los coeficientes que multiplican a E_x en las ecuaciones (2.21) y (2.23) son iguales cuando $a_e = a_m$ (en cuyo caso no hay restricción sobre E_x y E_z) y distintos cuando $a_e \neq a_m$, lo cual sólo puede suceder si $E_x = E_z = 0$. El coeficiente de (2.22) es, por otro lado, cero, así que E_y puede tomar cualquier valor.

Es decir, si los modos son independientes, el modo con número de onda k_e se propaga con el campo eléctrico en el plano xz , ortogonalmente al campo eléctrico del modo con número de onda k_m (figura (2.1)). Si sólo hay un modo, este no tiene restricciones.

2.3. Geometría de \vec{E} y \vec{H}

La ausencia de cargas externas hace que $\nabla \cdot \vec{D} = 0$. La relación $\vec{D} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{E}$ implica entonces que

$$\nabla \cdot \vec{E} = (1 - a_e^{-1}) \partial_z E_z \quad , \quad (2.24)$$

lo que en la onda plana implica a su vez que

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = (1 - a_e^{-1}) k_z E_{0z} \quad , \quad (2.25)$$

es decir, este material tiene una densidad de carga inducida

$$\rho_{ind} = (1 - a_e^{-1}) \epsilon_0 k_z E_{0z} \quad (2.26)$$

que depende de la longitud de onda incidente, el ángulo de incidencia, la componente z del campo eléctrico, y el factor de anisotropía eléctrica. Lo mismo sucede con \vec{H} al ser $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Es decir, las ondas electromagnéticas en este medio no son, en general, transversales.

Calcularemos los ángulos ϕ_e y ϕ_m que forman \vec{E}_e y \vec{H}_m con sus correspondientes vectores de onda. Ambos campos se encuentran en el plano que forman los últimos (el xz , según lo hemos establecido previamente).

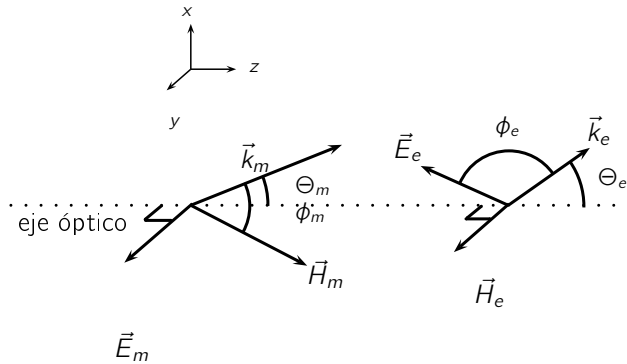


Figura 2.1: Cuando $a_e \neq a_m$ existen dos modos independientes en el material. El modo m tiene un campo eléctrico ortogonal al plano formado por el vector de onda y el eje óptico y un campo \vec{H} en dicho plano. En el modo e los papeles de \vec{E} y \vec{H} se intercambian.

Utilizando el inverso de $\overleftrightarrow{\mu}$ podemos poner \vec{H} en términos de \vec{E} . De la Ley de

Faraday,

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \overset{\leftrightarrow}{\mu}^{-1} \cdot \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} \\ &= \frac{\vec{k} \times \vec{E} + (a_m - 1)\hat{e}_z(\vec{k} \times \vec{E}) \cdot \hat{e}_z}{\mu_{\parallel}\omega}.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Ya que $\vec{k}_m \cdot \vec{E}_m = 0$ y dadas la expresión (2.27) y la igualdad

$$(\vec{k}_m \times \vec{E}_m) \cdot \hat{e}_z = \vec{E}_m \cdot (\hat{e}_z \times \vec{k}_m) = E_m k_m \sin(\Theta_m) \quad , \quad (2.28)$$

tenemos que

$$\vec{k}_m \cdot \vec{H}_m = \frac{a_m - 1}{\mu_{\parallel}\omega} E_m k_m k_{mz} \sin(\Theta_m) \quad (2.29)$$

(siendo Θ_m el ángulo que forma \vec{k}_m con el eje óptico) y

$$\begin{aligned}\vec{H}_m \cdot \vec{H}_m &= \frac{\|\vec{k}_m \times \vec{E}_m\|^2 + 2(a_m - 1)[(\vec{k}_m \times \vec{E}_m) \cdot \hat{e}_z]^2 + (a_m - 1)^2[(\vec{k}_m \times \vec{E}_m) \cdot \hat{e}_z]^2}{\mu_{\parallel}^2 \omega^2} \\ &= k_m^2 E_m^2 \frac{1 + (a_m^2 - 1) \sin^2(\Theta)}{\mu_{\parallel}^2 \omega^2} \quad ,\end{aligned}\quad (2.30)$$

así que, definiendo $\beta_m(\Theta) := \sqrt{1 + (a_m^2 - 1) \sin^2(\Theta)}$, la relación entre H_m y E_m se expresa así:

$$H_m = \frac{k_m E_m}{|\mu_{\parallel}| \omega} \beta_m(\Theta_m) \quad (2.31)$$

En el caso isotrópico $\beta_m(\Theta) = 1$, y la relación entre las amplitudes de \vec{H} y \vec{E} se reduce a la forma usual.

Con estos resultados, calculamos el coseno del ángulo entre \vec{k}_m y \vec{H}_m :

$$\cos(\phi_m) = \frac{\vec{k}_m \cdot \vec{H}_m}{k_m H_m} = \text{sgn}(\mu_{\parallel})(a_m - 1) \frac{\sin(2\Theta_m)}{2\beta_m(\Theta_m)} \quad . \quad (2.32)$$

Como se puede notar, este ángulo no varía con el valor de n_{\parallel} . Apropiadamente, si no hay anisotropía magnética, $\phi = \pi/2$.

Análogamente, de la ley de Ampère-Maxwell tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}^{-1} \cdot \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{H} \\ &= -\frac{\vec{k} \times \vec{H} + (a_e - 1)\hat{e}_z(\vec{H} \times \hat{e}_z) \cdot \vec{k}}{\varepsilon_{\parallel}\omega} \quad ,\end{aligned}\quad (2.33)$$

que tiene la misma forma que (2.27) intercambiando a_m por a_e y μ_{\parallel} por ε_{\parallel} , así que, siendo $\beta_e(\Theta) := \sqrt{1 + (a_e^2 - 1) \sin^2(\Theta)}$, tenemos que

$$E_e = \frac{k_e H_e}{|\varepsilon_{\parallel}| \omega} \beta_e(\Theta_e) \quad (2.34)$$

y que el ángulo entre \vec{k}_e y \vec{E}_e está dado por

$$\cos(\phi_e) = \text{sgn}(\varepsilon_{\parallel})(a_e - 1) \frac{\text{sen}(2\Theta_e)}{2\beta_e(\Theta_e)} \quad (2.35)$$

De aquí en adelante, para referirnos en general a propiedades que pueden ser de ambos modos, utilizaremos un subíndice α que puede ser e ó m . Asimismo, utilizaremos α_{\perp} y α_{\parallel} para referirnos a las correspondientes componentes ortogonal y paralela de $\vec{\varepsilon}$ ó $\vec{\mu}$.

El ángulo ϕ_{α} tiene siempre la propiedad de valer $\pi/2$ en $\Theta_{\alpha} = 0$ y $\Theta_{\alpha} = \pi/2$, es decir, cuando el vector de onda está alineado con el eje óptico o es ortogonal a este, el modo correspondiente es transversal. En consecuencia, este ángulo alcanza siempre un valor extremo en el intervalo $(0, \pi/2)$. Además, el signo de α_{\parallel} y el valor de a_{α} relativo a 1 determinarán si el ángulo es obtuso o agudo.

El comportamiento de ϕ_{α} ante el intercambio de α_{\parallel} por α_{\perp} (a_{α} por $1/a_{\alpha}$) es interesante. Veamos que

$$\begin{aligned} \cos\left(\phi_{\alpha}\left(\pi/2 - \Theta_{\alpha}; \frac{1}{a_{\alpha}}\right)\right) &= \text{sgn}(\alpha_{\parallel}) \frac{\left(\frac{1}{a_{\alpha}} - 1\right) \text{sen}(\pi - 2\Theta_{\alpha})}{2\sqrt{1 + \left(\frac{1}{a_{\alpha}^2} - 1\right) \text{sen}^2(\pi/2 - \Theta_{\alpha})}} \\ &= \text{sgn}(\alpha_{\parallel}) \frac{(1 - a_{\alpha}) \text{sen}(2\Theta_{\alpha})}{2a_{\alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a_{\alpha}^2} - 1\right) \cos^2(\Theta_{\alpha})}} \\ &= -\text{sgn}(\alpha_{\perp}) \frac{(a_{\alpha} - 1) \text{sen}(2\Theta_{\alpha})}{2\sqrt{1 + (a_{\alpha}^2 - 1) \text{sen}^2(\Theta_{\alpha})}} \\ &= -\text{sgn}(\alpha_{\perp}) \cos(\phi_{\alpha}(\Theta_{\alpha}; a_{\alpha})) \quad (2.36) \end{aligned}$$

$\pi/2 - \Theta$ se puede ver como $\pi/4 - (\Theta_{\alpha} - \pi/4)$, o sea la reflexión sobre el eje $\Theta_{\alpha} = \pi/4$. Esto nos dice que, al cambiar a_{α} por $1/a_{\alpha}$, cuando $\alpha_{\perp} < 0$, la gráfica de ϕ_{α} se refleja sobre dicho eje. Si $\alpha_{\perp} > 0$, para que el signo del coseno cambie necesitamos que el ángulo cambie como $\pi - \phi_{\alpha}$; es decir, la gráfica de $\phi_{\alpha}(\frac{1}{a})$

se obtiene de reflejar la gráfica de $\phi_\alpha(a)$ dos veces: sobre $\Theta_\alpha = \pi/4$ y sobre $\phi_\alpha = \pi/2$.

Además, si $\alpha_\parallel > 0$, de (2.35) se puede ver que el coseno del ángulo es siempre negativo cuando $a_\alpha < 1$, es decir, el ángulo es siempre mayor que $\pi/2$ (y su gráfica, en el intervalo $[0, \pi/2]$ quedará por encima de esta línea); análogamente, el ángulo será siempre menor a $\pi/2$ cuando $a_\alpha > 1$. En la gráfica (2.2) podemos ver estas características.

Encontrar este ángulo nos permite encontrar en particular las componentes de los campos en dirección del eje óptico (o la dirección ortogonal). \vec{E}_m (ó \vec{H}_e) forman un ángulo $\phi_\alpha - \Theta_\alpha$ con dicho eje, de manera que $\text{sen}(\phi_\alpha - \Theta_\alpha)$ es la componente del campo sobre el eje x dividida entre la amplitud del campo. El siguiente resultado nos permite tener una interpretación más sencilla de lo que sucede con esta componente, y además será útil más adelante.

Veamos que, para el modo m ,

$$\vec{H}_m \cdot \hat{e}_z = \frac{(\vec{k}_m \times \vec{E}_m) \cdot \hat{e}_z + (a_m - 1)(\vec{k}_m \times \vec{E}_m) \cdot \hat{e}_z}{\mu_\parallel \omega} = \frac{a_m k_e E_e}{\mu_\parallel \omega} \text{sen}(\Theta) \quad , \quad (2.37)$$

lo que, con (2.31) nos dice que

$$\cos(\phi_m - \Theta_m) = \frac{\vec{H}_m \cdot \hat{e}_z}{H_m} = \frac{\text{sgn}(\mu_\parallel) a_m \text{sen}(\Theta_m)}{\sqrt{1 + (a_m^2 - 1) \text{sen}^2(\Theta_m)}} = \frac{|\mu_\parallel| a_m \text{sen}(\Theta_m)}{\mu_\perp \beta_m(\Theta_m)} \quad (2.38)$$

y por lo cual

$$\begin{aligned} \text{sen}(\phi_m - \Theta_m) &= \sqrt{1 - \cos^2(\phi_m - \Theta_m)} \\ &= \sqrt{1 - \frac{a_m^2 \text{sen}^2(\Theta_m)}{1 + (a_m^2 - 1) \text{sen}^2(\Theta_m)}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2(\Theta_m)}{1 + (a_m^2 - 1) \text{sen}^2(\Theta_m)}} \\ &= \frac{\cos(\Theta_m)}{\beta_m(\Theta_m)} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Lo mismo puede mostrarse para ϕ_e y Θ_e , de manera que, en general,

$$\text{sen}(\phi - \Theta) = \frac{\cos(\Theta)}{\beta(\Theta)} \quad (2.40)$$

Es decir, el coseno del ángulo que forma el campo situado en el plano xz con el eje óptico es el coseno del mismo ángulo para el vector de onda, escalado por el

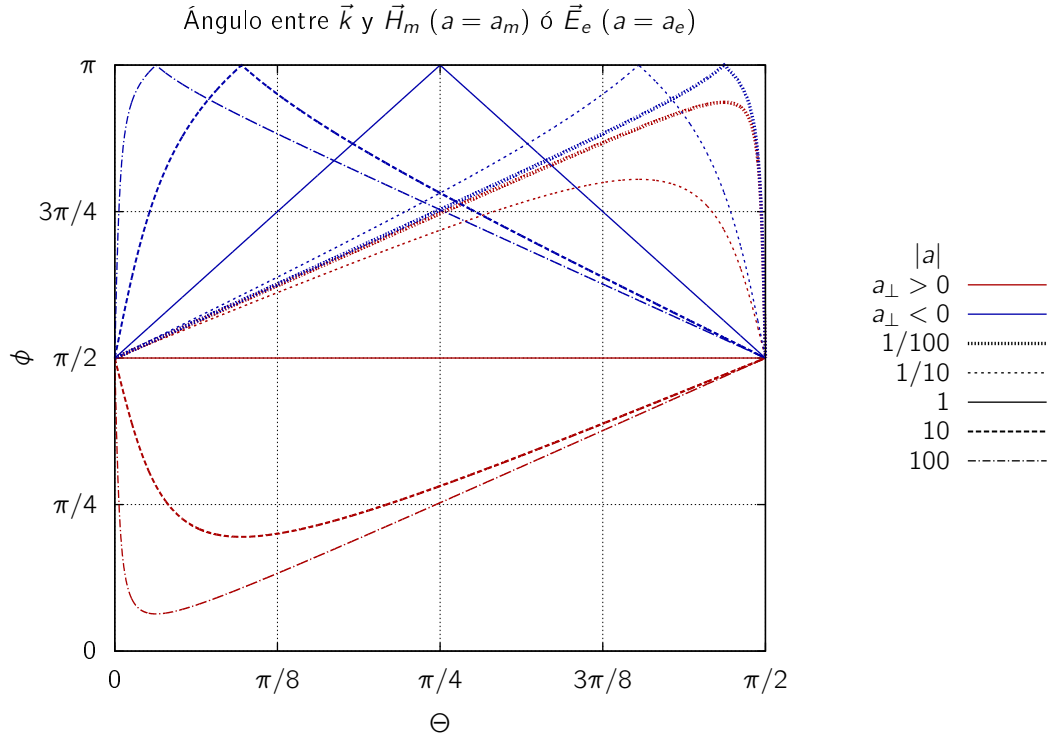


Figura 2.2: Ángulo que forma el campo en el plano xz con el vector de onda, como función del ángulo que forma éste con el eje óptico, para distintos valores de la anisotropía, con $\alpha_{\parallel} > 0$ (en el otro caso hay que reflejar la gráfica sobre $\phi = \pi/2$). En azul, los casos $a_{\alpha} < 0$ y en rojo los casos $a_{\alpha} > 0$. Si $a_{\alpha} < 1$ la gráfica se queda por encima de $\pi/2$ y si $a_{\alpha} > 1$ hace lo opuesto. Para $\alpha_{\perp} < 0$ el cambio de a_{α} por $1/a_{\alpha}$ refleja la gráfica sobre el eje $\Theta_{\alpha} = \pi/4$, y para $\alpha_{\perp} > 0$ lo refleja además sobre el eje $\phi_{\alpha} = \pi/2$. Cuando \vec{k} es paralelo u ortogonal al eje óptico, el ángulo es igual al del caso isotrópico.

factor necesario para obtener la relación entre las amplitudes de \vec{E} y \vec{H} en el caso isotrópico.

Utilizando los resultados (2.27) y (2.33) podemos además calcular $\vec{E} \times \vec{H}$ de dos maneras:

$$\vec{E} \times \vec{H} = \frac{\vec{k}E^2 - \vec{E}\vec{k} \cdot \vec{E} + (a_m - 1)(\vec{E} \times \hat{e}_z)(\vec{E} \times \hat{e}_z) \cdot \vec{k}}{\mu_{\parallel}\omega} \quad (2.41)$$

y

$$\vec{E} \times \vec{H} = \frac{\vec{k}H^2 - \vec{H}\vec{k} \cdot \vec{H} + (a_e - 1)(\vec{H} \times \hat{e}_z)(\vec{H} \times \hat{e}_z) \cdot \vec{k}}{\varepsilon_{\parallel}\omega} \quad (2.42)$$

Promediando en el tiempo las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{\vec{k}E_0^2 - \vec{E}_0\vec{k} \cdot \vec{E}_0 + (a_m - 1)(\vec{E}_0 \times \hat{e}_z)(\vec{E}_0 \times \hat{e}_z) \cdot \vec{k}}{2\mu_{\parallel}\omega} \\ &= \frac{\vec{k}H_0^2 - \vec{H}_0\vec{k} \cdot \vec{H}_0 + (a_e - 1)(\vec{H}_0 \times \hat{e}_z)(\vec{H}_0 \times \hat{e}_z) \cdot \vec{k}}{2\varepsilon_{\parallel}\omega} \end{aligned}$$

Ya que $\vec{k}_m \cdot \vec{E}_m = \vec{k}_e \cdot \vec{H}_e = 0$, y que \vec{E}_m y \vec{H}_e están en dirección y , estas expresiones toman una forma más simple para cada uno de los modos:

$$\vec{S}_m = E_{0m}^2 \frac{\vec{k}_m + (a_m - 1)k_{m_x}\hat{e}_x}{2\mu_{\parallel}\omega} = \frac{E_{0m}^2}{2\omega} \left(\frac{k_{m_x}}{\mu_{\perp}}, 0, \frac{k_{m_z}}{\mu_{\parallel}} \right) \quad (2.43)$$

$$\vec{S}_e = H_{0e}^2 \frac{\vec{k}_e + (a_e - 1)k_{e_x}\hat{e}_x}{2\varepsilon_{\parallel}\omega} = \frac{H_{0e}^2}{2\omega} \left(\frac{k_{e_x}}{\varepsilon_{\perp}}, 0, \frac{k_{e_z}}{\varepsilon_{\parallel}} \right) \quad (2.44)$$

De aquí podemos calcular la proyección de \vec{S} en la dirección de \vec{k} para cada modo. Utilizando la relación de dispersión (2.20) tenemos que

$$\vec{S} \cdot \vec{k} \propto \frac{k_x^2}{\alpha_{\perp}} + \frac{k_z^2}{\alpha_{\parallel}} = \frac{k_0^2 n_{\parallel}^2}{\alpha_{\parallel}} \quad (2.45)$$

lo cual nos dice que esta proyección tendrá el signo de ε_{\parallel} para el modo m y el de μ_{\parallel} para el modo e .

2.4. Refracción

Pensemos ahora en una onda plana con vector de onda \vec{k}_1 , incidente desde un medio isotrópico no disipador con índice de refracción $n_1 > 0$, que se encuentra con este material en la superficie $z = 0$, que coincide con la normal al eje óptico. Dicho medio tiene relación de dispersión $k_1 = k_0 n_1$. Llamaremos Θ a los ángulos que forma el vector de onda con el eje z y θ a los ángulos que forma el vector de Poynting con la misma. En este caso se cumple que $\Theta_1 = \theta_1$. Como notación, las variables con una tilde serán las propiedades del medio 2 divididas entre las mismas propiedades del medio 1.

2.4.1. Vectores de onda

La relación de dispersión (2.20) nos permite ver que en el caso de incidencia normal, independientemente del valor de a_α sólo hay una posibilidad para \vec{k} (pues $k_x = 0$) y sólo tendremos un campo. En otro caso en donde $k_e \neq k_m$, los modos están fuera de fase, por lo que, para que se cumplan las condiciones de frontera, las componentes paralelas de estos y la divergencia de cada modo deben conservarse independientemente.

Si identificamos las propiedades en el medio anisotrópico con subíndices 2, las condiciones de continuidad de la componente paralela del vector de onda nos dicen que $k_{1_x} = k_{\alpha_x}$, que llamaremos simplemente k_x . Entonces, utilizando (2.20) el seno del ángulo de refracción está dado por

$$\text{sen}(\Theta_\alpha) = \frac{k_x}{k_\alpha} = \frac{k_1 \text{sen}(\Theta_1)}{\sqrt{k_0^2 n_\parallel^2 + (1 - a_\alpha) k_1^2 \text{sen}^2(\Theta_1)}} = \frac{n_1 \text{sen}(\Theta_1)}{\sqrt{n_\parallel^2 + (1 - a_\alpha) n_1^2 \text{sen}^2(\Theta_1)}} \quad (2.46)$$

Llamaremos $n = n_\parallel / n_1$ al "índice de refracción" relativo. En términos de esta la función

$$N_\alpha(\Theta) = \sqrt{n^2 + (1 - a_\alpha) \text{sen}^2(\Theta_1)} \quad (2.47)$$

es la que permite preservar la forma usual de la ley de Snell para escribir

$$N_\alpha(\Theta_1) \text{sen}(\Theta_\alpha) = \text{sen}(\Theta_1) \quad (2.48)$$

Se puede notar que incidencia normal Θ_α es siempre igual al del caso isotrópico, 0. La derivada (como función del ángulo) de $\text{sen}(\Theta_\alpha)$ es

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\Theta_1) N_\alpha(\Theta_1) - \text{sen}(\Theta_1) N'_\alpha(\Theta_1)}{N_\alpha^2(\Theta_1)} &= \frac{\cos(\Theta_1)}{N_\alpha^3(\Theta_1)} (N_\alpha^2(\Theta_1) - (1 - a) \text{sen}^2(\Theta_1)) \\ &= \frac{n^2 \cos(\Theta_1)}{N_\alpha^3(\Theta_1)} \end{aligned} \quad (2.49)$$

que sólo es cero en $\pi/2$. Θ_α será una función creciente de Θ_1 si n es real y decreciente si es imaginario. Como función de a_α , Θ_α es creciente.

Por otro lado, si n es real, el valor de $\text{sen}^2(\Theta_\alpha)$ será siempre menor o igual que uno si se cumple que

$$a_\alpha \leq n^2 \quad (2.50)$$

es decir, es la relación entre el índice de refracción relativo y el valor de la anisotropía la que determina la presencia de un ángulo crítico. Si esta no se cumple, existirá dicho ángulo, dado por

$$\Theta_{\alpha_c} = \arcsen\left(\frac{n}{\sqrt{a_\alpha}}\right) \quad (2.51)$$

En particular se puede notar que tener un valor negativo de a_α siempre evita la presencia de ángulo crítico.

Si n es imaginario (lo cual sucede si ϵ_{\parallel} y μ_{\parallel} tienen signos opuestos) entonces N_α siempre será imaginario para algunos valores de θ_1 , empezando con 0. Para que tenga un valor real al menos en $\theta_1 = \pi/2$ se requiere

$$a_\alpha \leq n^2 + 1 \quad , \quad (2.52)$$

Al ser Θ_α decreciente en este caso, habrá un efecto invertido de ángulo crítico, en el que los rayos incidentes con ángulos entre 0 y $\arcsen(n/\sqrt{a_\alpha})$ no se transmiten (gráfica (2.6)).

La gráfica (2.3) muestra el comportamiento de Θ_α como función de Θ_1 para diversos valores reales del índice de refracción y positivos de la anisotropía, mientras que la (2.4) hace lo propio con valores negativos de a_α .

Existe un límite destacable en el comportamiento de Θ_α . Conforme a_α se hace muy negativo (con n fijo) (2.47) se parece cada vez más a $\sqrt{-a_\alpha} \sin(\Theta_1)$, lo que, al ser introducido en (2.48) da como resultado Θ_α independiente de Θ_1 (para Θ_1 suficientemente grande) y con valor $\arcsen(1/\sqrt{-a_\alpha})$. En el límite $a_\alpha \rightarrow -\infty$, Θ_α es exactamente 0. Para cualquier caso práctico, para lograr esto se requiere n pequeño (lo que implica $\epsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}$ pequeño) y a_α grande, lo cual junto con la primera condición se obtiene preferiblemente con una componente ortogonal mucho más pequeña que la paralela. Este límite se puede apreciar en la gráfica (2.5).

2.4.2. Vector de Poynting

Si el vector eléctrico incidente es perpendicular al plano de incidencia (polarización s), $\vec{E}_1 = E_1 \hat{e}_y$, también \vec{D}_1 tiene únicamente componente y: $\vec{D}_1 = \epsilon_1 E_1 \hat{e}_y$. Dado que las componentes perpendiculares de \vec{D} a la interfaz deben ser continuas, $D_z = 0$, y ya que $E_{2z} = D_z/\epsilon_\perp$, $E_{2z} = 0$. Esto junto con las condiciones de continuidad de la componente paralela de \vec{E} implica que la polarización se conserve.

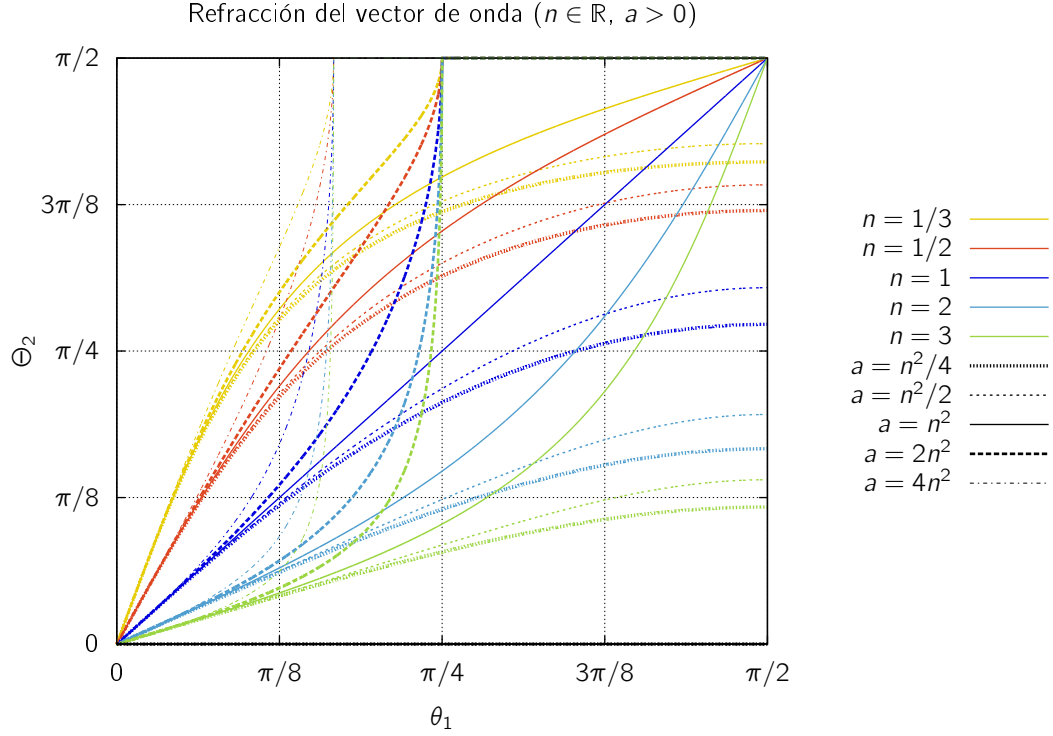


Figura 2.3: Gráfica del ángulo que forma el vector de onda refractado con la normal como función del ángulo de incidencia. Los colores denotan diferentes valores del índice de refracción mientras que los estilos de línea expresan diferentes valores de la anisotropía del material (todos positivos). Las líneas continuas tienen el valor crítico de a_α , aquél que hace que el ángulo crítico sea $\pi/2$ (dado por (2.50)). Todos los valores de a_α están dados en función de n correspondiente. Se puede ver que el cambio como función de la anisotropía para $n < 1$ es menos significativo.

Además, el hecho de que el eje óptico de este material sea normal a la interfaz hace que las componentes y de los campos sean normales al plano de incidencia. por ello, la expresión del vector de Poynting para el modo m (2.43) se traduce al vector de Poynting en esta polarización:

$$\vec{S}_s = \frac{E_{0m}^2}{2\omega} \left(\frac{k_x}{\mu_\perp}, 0, \frac{k_{mz}}{\mu_\parallel} \right) \quad (2.53)$$

Si, por el contrario, el vector eléctrico incidente está en el plano de incidencia

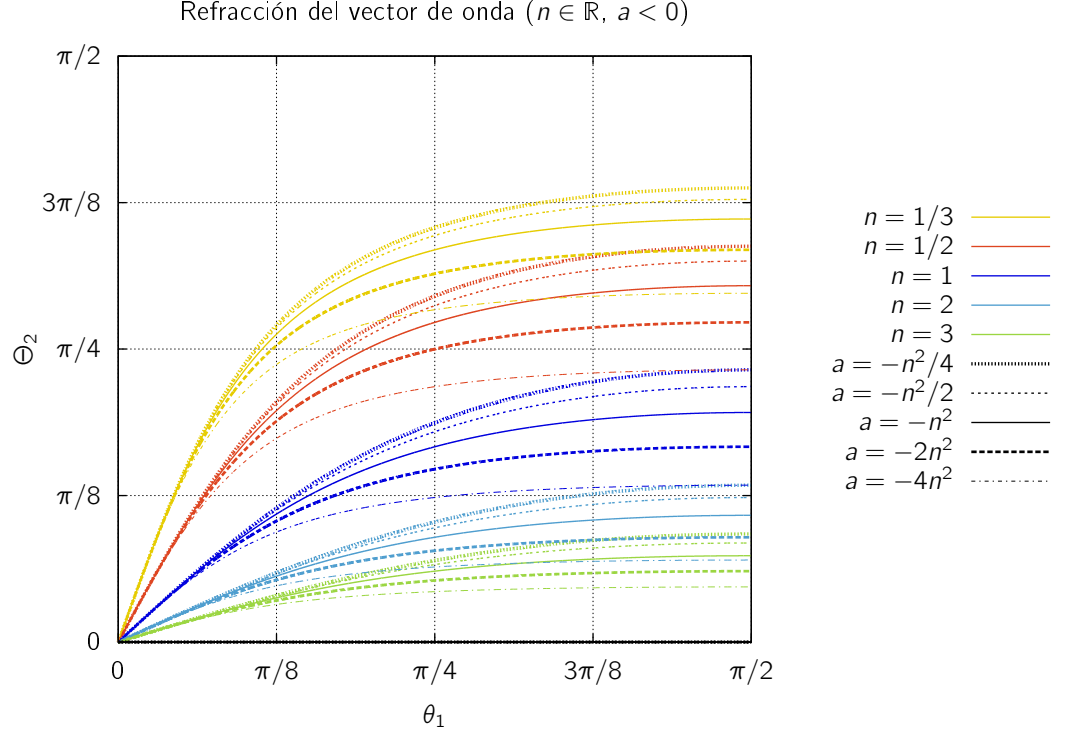


Figura 2.4: Esta es la gráfica que se obtiene de cambiar el signo de los valores de a_α en la gráfica 2.3. No existe ángulo crítico. Al igual que en dicha gráfica, el comportamiento de las curvas para ángulos pequeños depende exclusivamente del índice de refracción.

(polarización p), el vector \vec{H}_1 es perpendicular a este, y, dado que las componentes normales de \vec{B} también son continuas y $B_z = 0$, sucede análogamente que (2.44) se traduce a

$$\vec{S}_p = \frac{H_{0e}^2}{2\omega} \left(\frac{k_x}{\epsilon_\perp}, 0, \frac{k_{ez}}{\epsilon_\parallel} \right) \quad (2.54)$$

Para ambas polarizaciones, el ángulo de refracción (el que forma \vec{S} con la normal) está dado por

$$\text{sen}(\theta_\alpha) = \frac{S_{\alpha_x}}{S_\alpha} = \frac{k_x}{\alpha_\perp \sqrt{\frac{k_x^2}{\alpha_\perp^2} + \frac{k_{\alpha_z}^2}{\alpha_\parallel^2}}} = \frac{|\alpha_\parallel| k_x}{\alpha_\perp \sqrt{a_\alpha^2 k_x^2 + k_{\alpha_z}^2}} \quad (2.55)$$

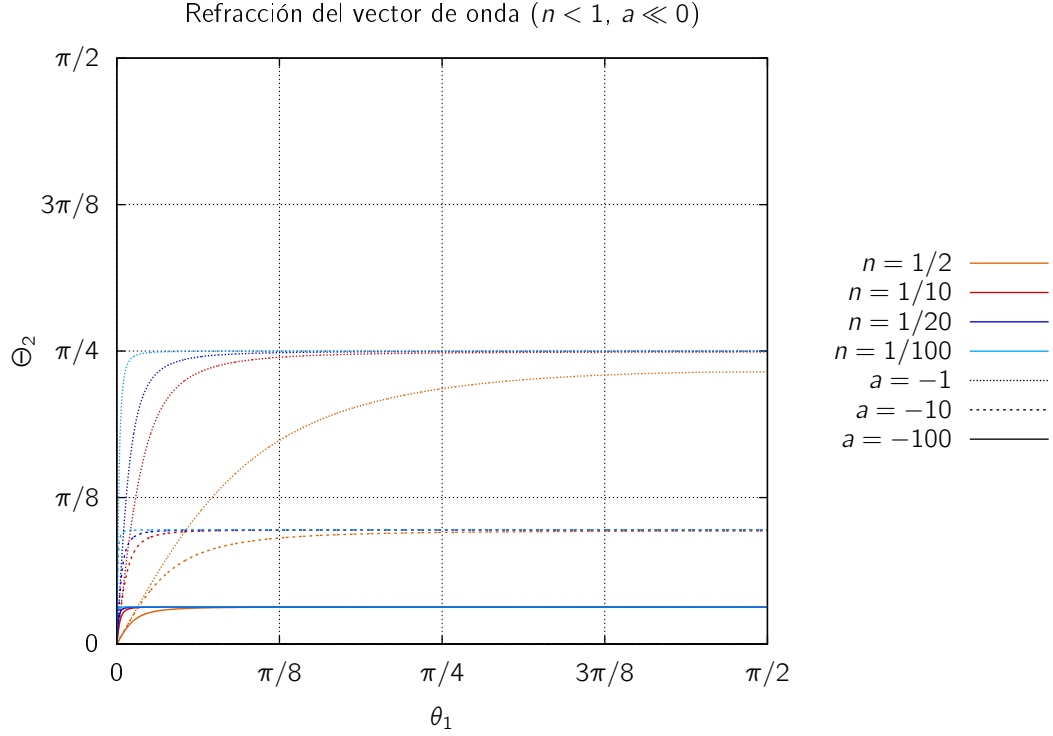


Figura 2.5: En esta gráfica se puede observar el límite de $a_\alpha \rightarrow -\infty$. Para valores suficientemente negativos de a_α y valores no cercanos a 0 de Θ_1 , Θ_α prácticamente no cambia y se parece a $\arcsen(1/\sqrt{-a_\alpha})$. Conforme $|a_\alpha|$ crece, Θ_α se acerca a 0. El efecto es más fácil de conseguir con n cercano a 0. En este caso no existe el ángulo crítico.

o, utilizando (2.20) y (2.48),

$$\begin{aligned}
 \text{sen}(\theta_\alpha) &= \frac{|\alpha_\parallel| \text{sen}(\theta_1)}{\alpha_\perp \sqrt{a(a-1) \text{sen}^2(\theta_1) + n^2}} \\
 &= \frac{\text{sgn}(\alpha_\parallel) a \text{sen}(\theta_1)}{\sqrt{a(a-1) \text{sen}^2(\theta_1) + n^2}}.
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

El requisito de ángulo crítico resulta ser nuevamente (2.50).

Como se puede apreciar, este material presenta refracción negativa cuando $\alpha_\perp < 0$, independientemente del signo de α_\parallel . Esto se puede entender pensando en las componentes del vector de Poynting paralelas y perpendiculares a la superficie;

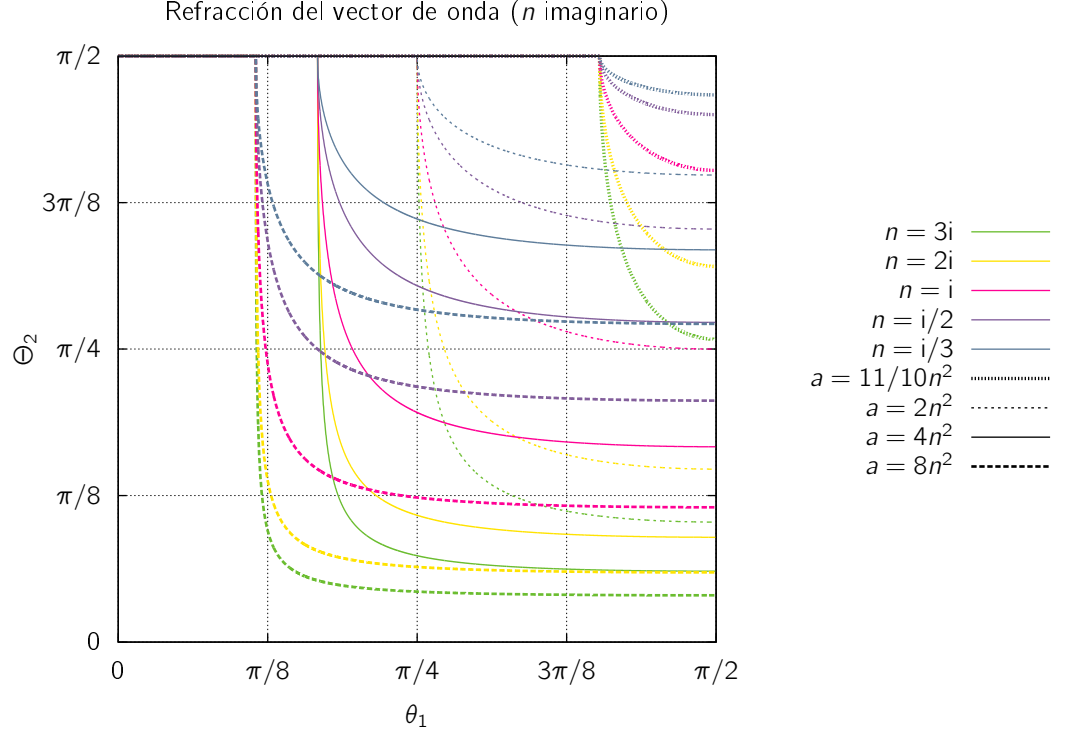


Figura 2.6: Cuando el índice de refracción es imaginario, Θ_α es una función decreciente del ángulo de incidencia, y no está definido para ángulos menores al crítico. Para que haya refracción se requiere un valor negativo de a_α , que debe ser siempre mayor a n^2 . Como se puede observar, a mayor valor de $|a_\alpha|$ el ángulo crítico es menor y mientras mayor es el módulo de n más pronunciada es la pendiente cerca del último. No existe una gráfica análoga a esta con $a_\alpha > 0$ pues, al no haber ángulo crítico en tal caso, no hay propagación de la onda.

en términos de las correspondientes componentes de los campos, tenemos que

$$\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{H}) = (\vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel) \times (\vec{H}_\perp + \vec{H}_\parallel) = \vec{E}_\perp \times \vec{H}_\parallel + \vec{E}_\parallel \times \vec{H}_\perp + \vec{E}_\parallel \times \vec{H}_\parallel \quad (2.57)$$

Los dos primeros sumandos son la componente paralela del vector de Poynting y el tercero es la componente normal. Las condiciones de frontera hacen que \vec{E}_\parallel y \vec{H}_\parallel sean iguales de ambos lados de la interfaz; \vec{S}_\perp se conservará, así que, para que \vec{S} se refracte en un ángulo opuesto al incidente, $\vec{E}_\perp \times \vec{H}_\parallel + \vec{E}_\parallel \times \vec{H}_\perp$ debe

cambiar de sentido, y, dado que \vec{H}_{\parallel} y \vec{E}_{\parallel} no cambian, \vec{E}_{\perp} ó \vec{H}_{\perp} deben cambiar. En polarización s , $\vec{E}_{1\perp} = \vec{0}$, por lo que el requisito se convierte en

$$\begin{aligned} 0 &> (\vec{E}_{\parallel} \times \vec{H}_{1\perp}) \cdot (\vec{E}_{2\perp} \times \vec{H}_{\parallel} + \vec{E}_{\parallel} \times \vec{H}_{2\perp}) \\ &= E_{\parallel} H_{\parallel} \vec{H}_{1\perp} \cdot \vec{E}_{2\perp} + E_{\parallel}^2 \vec{H}_{1\perp} \cdot \vec{H}_{2\perp} \\ &\Leftrightarrow \vec{H}_{1\perp} \cdot (H_{\parallel} \vec{E}_{2\perp} + E_{\parallel} \vec{H}_{2\perp}) < 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

y, en polarización p , en donde $\vec{H}_{1\perp} = \vec{0}$,

$$\begin{aligned} 0 &> (\vec{E}_{1\perp} \times \vec{H}_{\parallel}) \cdot (\vec{E}_{2\perp} \times \vec{H}_{\parallel} + \vec{E}_{\parallel} \times \vec{H}_{2\perp}) \\ &= H_{\parallel}^2 \vec{E}_{1\perp} \cdot \vec{E}_{2\perp} + H_{\parallel} E_{\parallel} \vec{E}_{1\perp} \cdot \vec{H}_{2\perp} \\ &\Leftrightarrow \vec{E}_{1\perp} \cdot (E_{\parallel} \vec{H}_{2\perp} + H_{\parallel} \vec{E}_{2\perp}) < 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Estos son requisitos generales, independientes del material. Como se puede ver, la presencia de refracción negativa en general depende de la polarización y de la impedancia superficial. Una manera de garantizar tal refracción es tener un material que produzca que las componentes normales de los campos vayan siempre opuestas a las de los campos incidentes.

En el caso particular que estamos tratando, la única manera de cambiar las componentes normales de los campos para satisfacer estas desigualdades es haciendo que $\tilde{\mu}_{\perp}$ ó $\tilde{\epsilon}_{\perp}$ sean negativos. Además, el vector de Poynting del modo m sólo tiene componente paralela de la forma $\vec{E}_{\parallel} \times \vec{H}_{\perp}$, mientras que el del modo e sólo tiene componente paralela de la forma $\vec{E}_{\perp} \times \vec{H}_{\parallel}$, lo que nos dice que $\tilde{\mu}_{\perp} < 0$ es una condición necesaria y suficiente para que haya refracción negativa del modo m . Sucede análogamente para $\tilde{\epsilon}_{\perp}$ en el modo e .

Cuando $a_{\alpha} = 0$, el ángulo de refracción es constante y vale 0. Además, en el límite en el que $a_{\alpha} \rightarrow -\infty$, el ángulo de refracción se va a $\text{sgn}(\alpha_{\perp})\pi/2$. Las gráficas (2.7), (2.8), (2.9) y (2.10) muestran el comportamiento del ángulo de refracción para medios con las mismas propiedades que los de las gráficas (2.3), (2.4) y (2.5) y (2.6), respectivamente, suponiendo que $\alpha_{\perp} > 0$. En el caso en el que $\alpha_{\perp} < 0$ las gráficas se reflejan sobre el eje vertical, según (2.56).

2.4.3. Proyección de \vec{S}_{α} sobre \vec{k}_{α}

En ambas polarizaciones, al utilizar la relación de dispersión (2.20), (2.48) y el hecho de que $k_{1x} = k_{\alpha x}$, la proyección de \vec{S}_{α} en la dirección de \vec{k}_{α} se puede

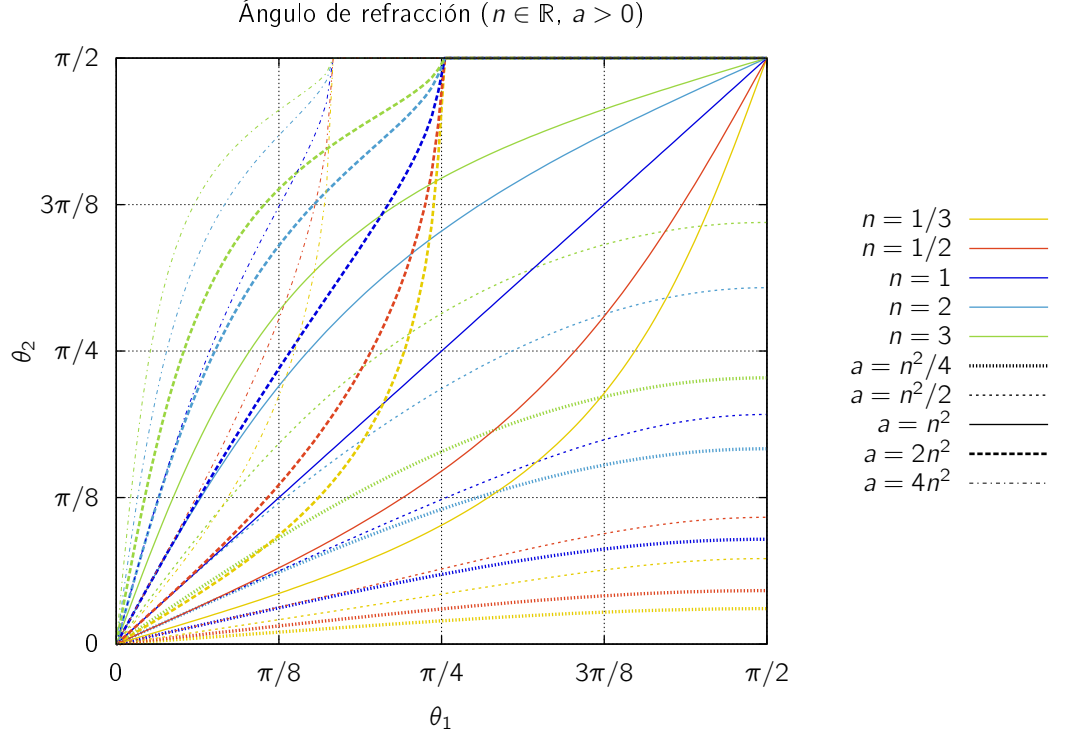


Figura 2.7: Ángulo de refracción como función del ángulo de incidencia ($\alpha_{\perp} > 0$). En colores, los distintos valores de n ; en estilos de línea las variantes de a_{α} . Se puede apreciar que, para valores iguales de n , cambios en a_{α} producen cambios más abruptos en θ_{α} a comparación de la gráfica correspondiente para Θ_{α} , en donde las curvas de un mismo n se parecen mucho para ángulos de incidencia pequeños. Asimismo, que los cambios como función de a_{α} para $n < 1$ son más pronunciados que los correspondientes casos con $n \geq 1$.

escribir así:

$$\begin{aligned}
 \frac{\vec{S}_{\alpha} \cdot \vec{k}_{\alpha}}{S_{\alpha} k_{\alpha}} &= \frac{k_x^2/\alpha_{\perp} + k_z^2/\alpha_{\parallel}}{k \sqrt{k_x^2/\alpha_{\perp}^2 + k_z^2/\alpha_{\parallel}^2}} \\
 &= \frac{k_0^2 n_{\parallel}^2/\alpha_{\parallel}}{k |\alpha_{\parallel}| \sqrt{a_{\alpha}(a_{\alpha} - 1)k_x^2 + k_0^2 n_{\parallel}^2}} \\
 &= \frac{\text{sgn}(\alpha_{\parallel})n^2}{N_{\alpha}(\theta_1) \sqrt{a_{\alpha}(a_{\alpha} - 1) \text{sen}^2(\theta_1) + n^2}} \\
 &= \frac{\text{sgn}(\alpha_{\parallel})n^2}{N_{\alpha}(\theta_1) \sqrt{a_{\alpha} N_{\alpha}^2(\theta_1) + n^2(1 - a_{\alpha})}}.
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

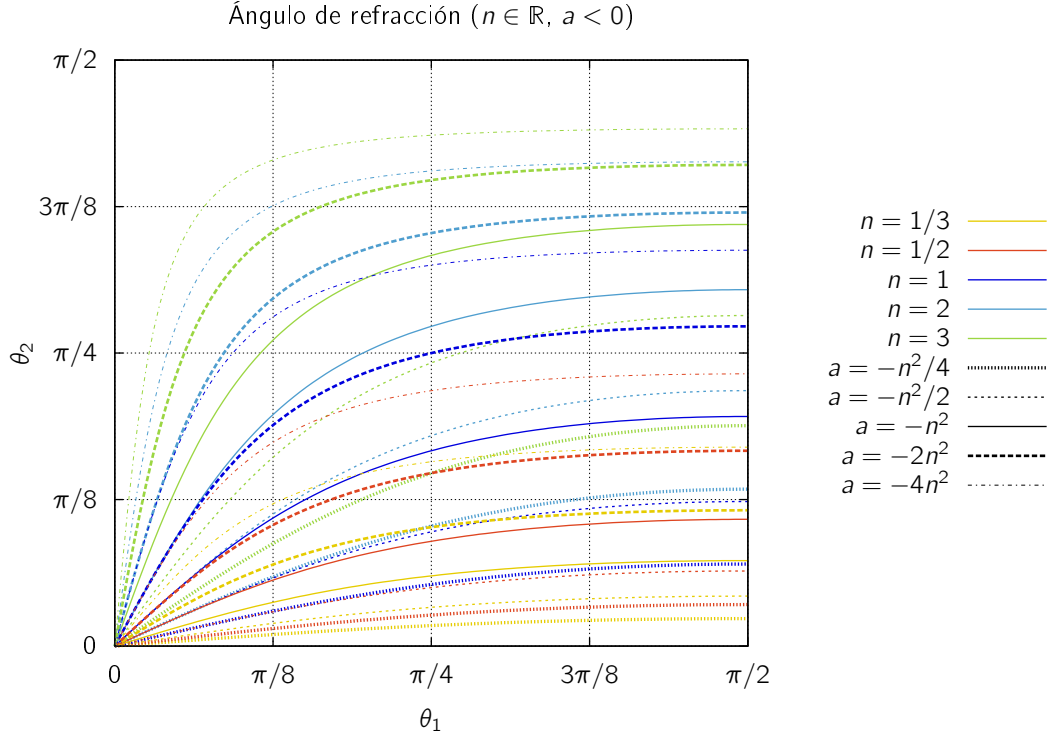


Figura 2.8: Gráfica que se obtiene de intercambiar los signos de a_α en la gráfica (2.7). No existe el ángulo crítico. La refracción será negativa si $\alpha_\perp < 0$, pero preservará la misma forma.

Esta proyección es siempre 1 en $\theta = 0$. Su signo es el de ϵ_\parallel para el modo m y el de μ_\parallel para el modo e . Esto, junto con el hecho de que el signo del ángulo sea el de las componentes ortogonales de $\vec{\epsilon}$ ó $\vec{\mu}$ nos dice que en este material la condición de que \vec{S} tenga una cierta proyección con \vec{k} no es sinónimo de que exista refracción negativa. Recordemos que la dirección de \vec{S} es

$$\left(\frac{k_x}{\alpha_\perp}, 0, \frac{k_z}{\alpha_\parallel} \right), \quad (2.61)$$

y que k_x está determinado por las condiciones de frontera (es positivo bajo nuestras hipótesis). k_{α_z} , sin embargo, está determinado por el hecho de que S_{α_z} debe ser mayor que cero para que el rayo realmente incida sobre la superficie. Así, k_{α_z} tendrá siempre el signo de α_\parallel ; cuando éste es positivo, la proyección de \vec{S} sobre

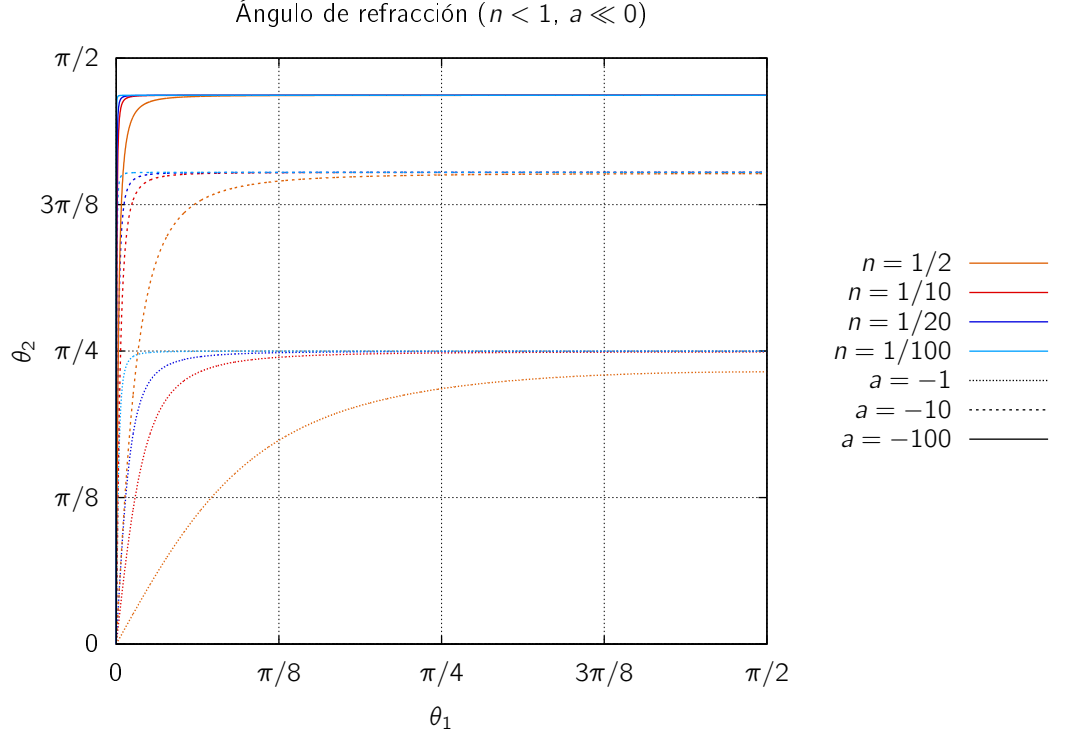


Figura 2.9: Comportamiento del ángulo de refracción cuando a_α tiende a menos infinito, correspondiente a la gráfica (2.5). Los ángulos que eran cercanos a 0 se van cerca de $\pi/2$ (ó $-\pi/2$ si $\alpha_\perp < 0$), pero la variación de éstos sigue siendo muy poca lejos del 0 y para a_α suficientemente negativa.

\vec{k} será positiva y la dirección de la refracción dependerá de S_{α_x} , que a su vez está determinada por α_\perp (si es negativa, la refracción es como en la figura (2.11)). Igualmente, si α_\parallel es negativa, k_{α_z} también, y \vec{S}_α puede formar con éste un ángulo mayor a $\pi/2$ (siendo la refracción positiva si $\alpha_\perp > 0$, como en la figura (2.12), o negativa si $\alpha_\perp < 0$). Es así que la proyección de \vec{S}_α en la dirección de \vec{k}_α no determina el signo de la refracción.

En el límite $a_\alpha \rightarrow -\infty$ esta proyección se hace cero para cualquier ángulo y cualquier índice de refracción. Es decir, si el medio tiene α_\perp y α_\parallel de signos opuestos y el segundo es muy grande en comparación con el primero, \vec{S}_α y \vec{k}_α se vuelven ortogonales.

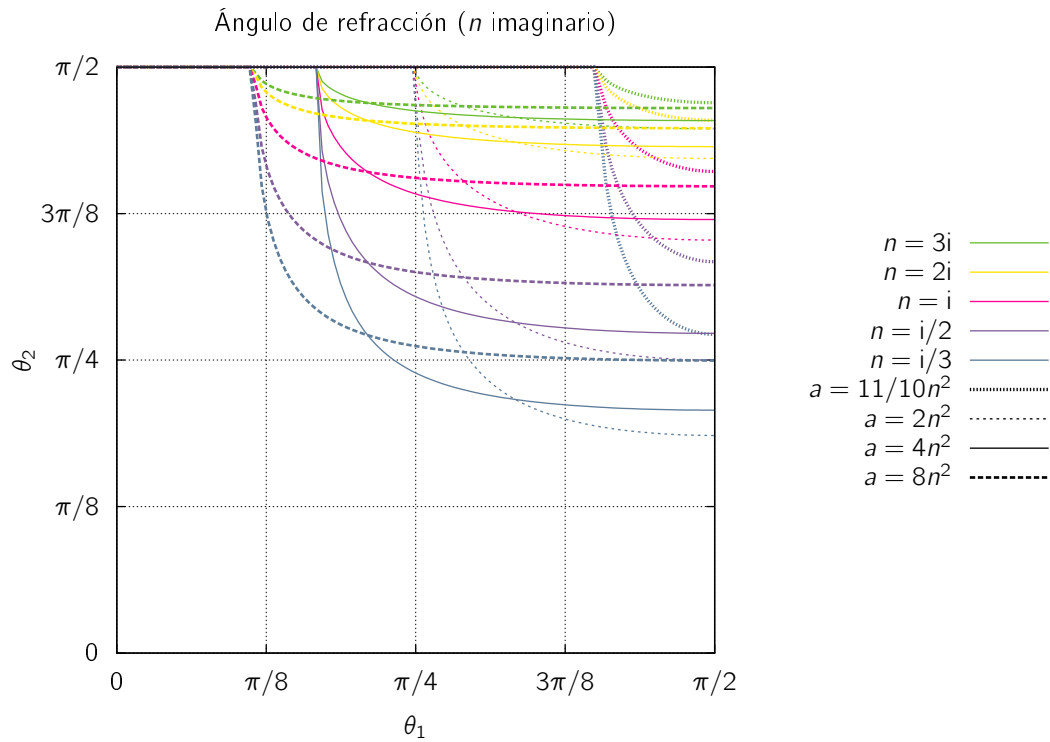


Figura 2.10: Aquí podemos ver el efecto de ángulo crítico inverso para el ángulo de refracción. Cuando el índice de refracción es imaginario (a_α debe ser negativo), el ángulo de refracción está definido desde θ_c hasta $\pi/2$.

¿Existen otros valores óptimos de θ_1 , a_α y n que hagan mínima esta proyección?
La condición

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\vec{S}_\alpha \cdot \vec{k}_\alpha}{S_\alpha k_\alpha} \right) (a_\alpha, n, \theta_1) = 0 \tag{2.62}$$

se da en tres casos:

- $\theta_1 = 0$. En este caso \vec{S}_α y \vec{k}_α coinciden en dirección, y tenemos un máximo de esta proyección.
- $\theta_1 = \arcsen(n/\sqrt{2a_\alpha})$. Este es un número real si $a_\alpha > 0$ y n es real o $a_\alpha < 0$

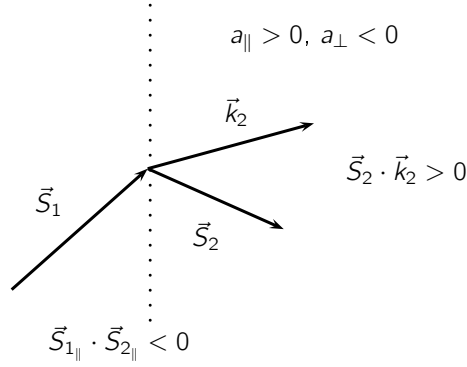


Figura 2.11: Un ejemplo de cómo la proyección de \vec{S} sobre \vec{k} puede ser positiva siendo la refracción negativa.

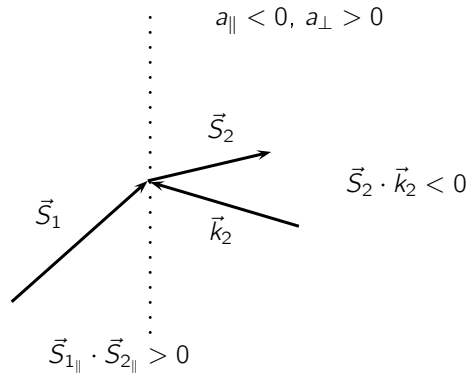


Figura 2.12: El ejemplo opuesto al de la figura (??). Si $\alpha_{\parallel} < 0$, la componente z de \vec{k}_{α} es negativa y los vectores pueden formar un ángulo obtuso aún con refracción positiva.

y n es imaginario; y $a_{\alpha} \geq n^2/2$. Para este ángulo, la condición

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\vec{S}_{\alpha} \cdot \vec{k}_{\alpha}}{S_{\alpha} k_{\alpha}} \right) (a_{\alpha}, n, \arcsen(n/\sqrt{2a_{\alpha}})) = 0 \quad (2.63)$$

se da a su vez en:

- $a_{\alpha} = 1$. En este caso no hay anisotropía y \vec{S} y \vec{k} coinciden para todo ángulo.
- $a_{\alpha} = -1$. Debe cumplirse que $n^2/2 \leq -1$ y además la condición (2.52):

$n^2 \geq -2$, lo cual no puede ocurrir.

Así, $\theta_1 = \arcsen(n/\sqrt{2a_\alpha})$ es candidato a ser un mínimo local sólo cuando n es real y a_α es un real positivo, y no hay un valor especial de a_α que minimice la proyección. Mientras más grande sea el valor de a_α , menor será ésta, pero igualmente al dejarse de cumplir la condición (2.50) habrá ángulos críticos más cercanos a 0. El valor de la proyección para ese ángulo no depende de n , por lo que se puede elegir un valor de n arbitrariamente alto para evitar esta situación.

- $\theta_1 = \pi/2$ (incidencia rasante). En este caso

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\vec{S}_\alpha \cdot \vec{k}_\alpha}{S_\alpha k_\alpha} \right) (a_\alpha, n, \pi/2) = 0 \quad (2.64)$$

se cumple en:

- $a_\alpha = 1$ (sin anisotropía)
- $a_\alpha = \frac{2n^2+1}{3}$. Para este valor, tenemos además que

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\vec{S}_\alpha \cdot \vec{k}_\alpha}{S_\alpha k_\alpha} \right) \left(\frac{2n^2+1}{3}, n, \pi/2 \right) = 0 \quad (2.65)$$

se da cuando

- $n^2 = 1$ ($a_\alpha = 1$; sin anisotropía)
- $n^2 = -2$ ($a_\alpha = -7/3$; no cumple la condición (2.52))
- $n = 0$ ($a_\alpha = 1/3$; de acuerdo con (2.48), el ángulo de refracción es complejo)

En conclusión, dado un material de este tipo con un índice de refracción real habrá un mínimo de la proyección entre \vec{S}_α y \vec{k}_α en $\theta_1 = \arcsen(n/\sqrt{2a_\alpha})$ si $2a_\alpha \geq n^2$. En caso contrario el mínimo se alcanzará en $\pi/2$. $n = 0$ también minimiza esta proyección (la hace cero) y $a_\alpha \rightarrow -\infty$ también.

Habiendo hecho este análisis, veamos ahora la gráfica (2.13), que muestra cómo varía la diferencia entre θ_α y Θ_α dados por (2.48) y (2.56) entre diferentes medios.

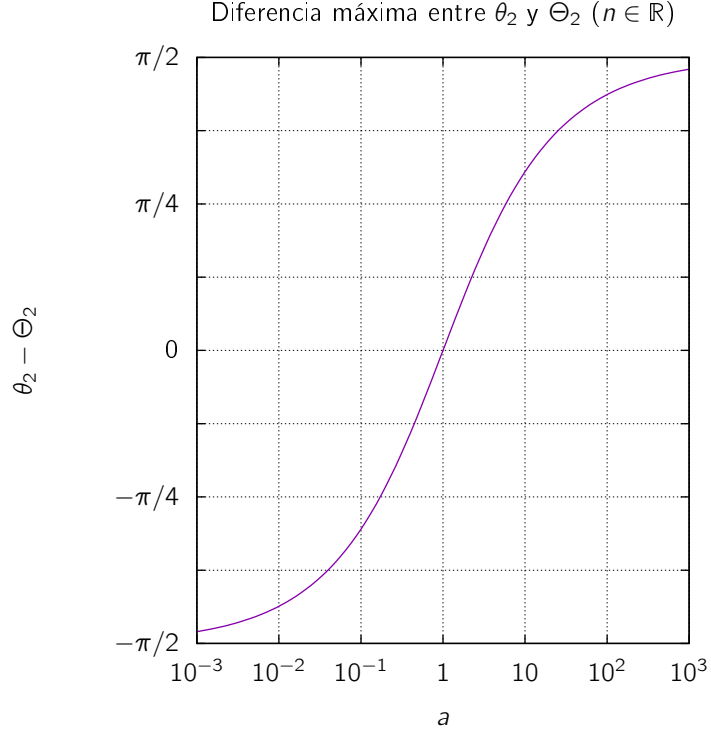


Figura 2.13: Diferencia entre el ángulo de refracción y el ángulo formado por el vector de onda con la normal como función de la anisotropía del medio (en escala logarítmica). Es la diferencia obtenida para un ángulo de incidencia $\arcsin(n/\sqrt{2a_\alpha})$, para el cual ésta es máxima siempre que $2a \geq n^2$; el valor para ese ángulo (siempre bajo el crítico) no depende de n , así que para cualquier valor de a_α de la gráfica se supone un valor de n suficiente para cumplir dicha desigualdad, pero arbitrario fuera de ese intervalo. Los límites $a_\alpha \rightarrow 0$ y $a_\alpha \rightarrow \infty$ llevan esta diferencia a $-\pi/2$ y $\pi/2$ respectivamente.

2.5. Coeficientes de transmisión y reflexión

Calcularemos el coeficiente de reflexión en las distintas polarizaciones, definido como

$$r_s := \frac{E_r}{E_i}; r_p := \frac{H_r}{H_i} \quad (2.66)$$

especificando con un subíndice s o p según sea el caso, y el coeficiente de transmisión, uno para cada rayo

$$t_m := \frac{E_m}{E_i}; t_e := \frac{H_e}{H_i} \quad . \quad (2.67)$$

2.5.1. Polarización s

Si el vector eléctrico en el medio 1 es $(E_i + E_r)\hat{e}_y$, las condiciones de frontera de \vec{E} implican que $\vec{E}_e + \vec{E}_m$ no puede tener componente x , y dado que \vec{E}_e y \vec{E}_m son independientes (pues $\vec{\epsilon}$ y $\vec{\mu}$ lo son)³, cada uno debe tener componente x nula. Análogamente, en el medio 1 \vec{H} no tiene componente y , por lo que \vec{H}_e y \vec{H}_m deben estar en el plano de incidencia y podemos utilizar directamente el resultado (2.32). Las condiciones de frontera para \vec{E} nos dicen entonces que

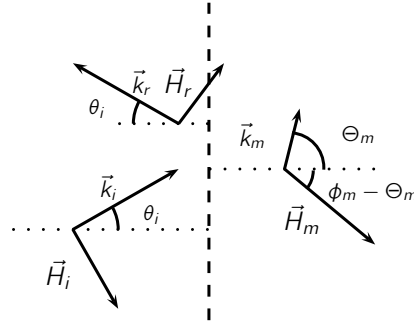


Figura 2.14: Reflexión y transmisión en polarización s . En cada modo el vector eléctrico sale del plano. Esta polarización sólo excita el modo m .

$$E_i + E_r = E_m \quad (2.68)$$

mientras que, suponiendo que \vec{E} no cambia de fase al reflejarse, las condiciones de frontera de \vec{H} nos dicen

$$-H_i \cos(\Theta_i) + H_r \cos(\Theta_r) = -H_m \cos(\Theta_m + (\pi/2 - \phi_m)) \quad . \quad (2.69)$$

³esto es cierto salvo en el caso de incidencia normal, en donde $k_e = k_m$ independientemente del valor de a_e y a_m . En ese caso el planteamiento sigue siendo correcto, pues los campos propuestos respetan las condiciones de frontera y cumplen la ecuación de onda.

Además, en el medio 1 tenemos que

$$H_i = \frac{k_i E_i}{\mu_1 \omega}; H_r = \frac{k_i E_r}{\mu_1 \omega} \quad (2.70)$$

lo que con las definiciones (2.66) y (2.67), (2.68) implica que

$$1 + r_s = t_m \quad , \quad (2.71)$$

mientras que (2.69) junto con (2.31) se leen

$$\frac{k_i}{\mu_1} \cos(\Theta_i)(1 - r_s) = \frac{1}{|\mu_{2\parallel}|} k_m t_m \beta_m(\Theta_m) \sin(\phi_m - \Theta_m) \quad (2.72)$$

Estas dos ecuaciones forman un sistema lineal para r_s y t_m , con solución

$$r_s = \frac{k_i |\mu_{2\parallel}| \cos(\Theta_i) - k_m \mu_1 \beta_m(\Theta_m) \sin(\phi_m - \Theta_m)}{k_i |\mu_{2\parallel}| \cos(\Theta_i) + k_m \mu_1 \beta_m(\Theta_m) \sin(\phi_m - \Theta_m)}$$

$$t_m = \frac{2k_i |\mu_{2\parallel}| \cos(\Theta_i)}{k_i |\mu_{2\parallel}| \cos(\Theta_i) + \mu_1 \beta_m(\Theta_m) \sin(\phi_m - \Theta_m)} \quad .$$

En vista de (2.47) podemos escribir

$$\frac{k_m}{k_i} = N_m(\Theta_i) \quad , \quad (2.73)$$

y definimos $\mu_{\parallel} := \mu_{2\parallel}/\mu_1$, lo que junto con (2.40) y (2.48) permite escribir todo en términos del ángulo de incidencia y las propiedades relativas de los medios: con

$$f_s(\theta_1) = N_m(\theta_1) \frac{\cos(\Theta_m)}{|\mu_{\parallel}| \cos(\theta_1)} \quad , \quad (2.74)$$

tenemos

$$r_s(\theta_1) = \frac{1 - f_s(\theta_1)}{1 + f_s(\theta_1)} \quad (2.75)$$

$$t_m(\theta_1) = \frac{2}{1 + f_s(\theta_1)} \quad . \quad (2.76)$$

2.5.2. Polarización p

De manera análoga, y suponiendo que ahora H no cambia de fase al reflejarse, las condiciones de frontera de \vec{H} y \vec{E} son, respectivamente:

$$H_i + H_r = H_e$$

$$E_i \cos(\Theta_i) - E_r \cos(\Theta_r) = E_e \cos(\Theta_e + (\pi/2 - \phi_e)) \quad , \quad (2.77)$$

mientras que, en el medio 1 se cumple que

$$E = \frac{k_i H}{\varepsilon_1 \omega} \quad (2.78)$$

así que (2.77) junto con (2.66), (2.67) y (2.34) queda

$$\begin{aligned} 1 + r_p &= t_e \\ \frac{k_i}{\varepsilon_1} \cos(\theta_i)(1 - r_p) &= \frac{k_e \beta_e(\Theta_e)}{|\varepsilon_{\parallel}| \omega} t_e \sin(\phi_e - \Theta_e) \end{aligned} \quad (2.79)$$

por lo cual, siendo $\varepsilon_{\parallel} := \varepsilon_{2\parallel}/\varepsilon_1$ y

$$f_p(\theta_1) = N_e(\theta_1) \frac{\cos(\Theta_e)}{|\varepsilon_{\parallel}| \cos(\theta_1)}, \quad (2.80)$$

los coeficientes quedan dados por

$$r_p(\theta_1) = \frac{1 - f_p(\theta_1)}{1 + f_p(\theta_1)} \quad (2.81)$$

$$t_e(\theta_1) = \frac{2}{1 + f_p(\theta_1)} \quad (2.82)$$

2.5.3. Algunas propiedades de r

Como se puede apreciar, r_p y t_e se pueden obtener de las mismas expresiones para r_s y t_m , respectivamente, al intercambiar las propiedades magnéticas por las eléctricas, así que analizaremos r con las propiedades genéricas antes definidas, a_{α} y α_{\parallel} . La gráfica de t se obtiene de la de r al trasladar, así que su comportamiento no es esencialmente distinto.

- En incidencia normal, $r = \frac{|\alpha_{\parallel}| - |n|}{|\alpha_{\parallel}| + |n|}$:

Cuando $\theta = 0$ tenemos que $\Theta_{\alpha} = 0$, $N_{\alpha} = |n|$ y $f = |n/\alpha_{\parallel}|$, lo cual nos da este resultado para r .

- En el ángulo crítico, $r = 1$:

Si el ángulo crítico existe, por definición de ángulo crítico tenemos que $\Theta_{\alpha} = \pi/2$, $f(\theta_{\alpha_c}) = 0$ y $r(\theta_{\alpha_c}) = 1$. Naturalmente se requiere que $\arcsen(n/\sqrt{a_{\alpha}})$ sea real y que $\cos(\theta_{\alpha_c})$ no sea cero.

- Si el ángulo crítico no es $\pi/2$ y $a_{\alpha} \neq 1 + n^2$, $r = -1$ en incidencia rasante.

Si se cumplen estas hipótesis $N_\alpha \cos(\Theta_\alpha)$ tiende a un valor no cero en $\pi/2$, el coseno en el denominador de (2.74) y (2.80) hace que f tienda a infinito. Así, r se obtiene del cociente de una cantidad que se va a infinito y otra que va a menos infinito, dando -1 .

En particular la situación en la que $\pi/2$ es el ángulo crítico no está en ninguno de estos dos primeros casos, y es el caso siguiente, sumamente interesante.

- Cuando $n^2 \in [a_\alpha, \alpha_\parallel^2] \cap [\alpha_\parallel^2, a]$ existe un ángulo de Brewster dado por

$$\theta_{\alpha_B} = \arcsen \left(\sqrt{\frac{n^2 - \alpha_\parallel^2}{a_\alpha - \alpha_\parallel^2}} \right) \quad (2.83)$$

para el cual no hay rayo reflejado.

Para encontrar este ángulo se busca la solución a la ecuación $r(\theta_{\alpha_B}) = 0$, o, equivalentemente $f(\theta_{\alpha_B}) = 1$. Utilizando la definición de f y la ley de Snell (2.48),

$$1 = \frac{N_\alpha^2(\theta_{\alpha_B}) \cos(\Theta)}{\alpha_\parallel^2 \cos^2(\theta_{\alpha_B})} = \frac{N_\alpha^2(\theta_{\alpha_B}) - \sin^2(\theta_{\alpha_B})}{\alpha_\parallel^2 - \alpha_\parallel^2 \sin^2(\theta_{\alpha_B})} = \frac{n^2 - a_\alpha \sin^2(\theta_{\alpha_B})}{\alpha_\parallel^2 - \alpha_\parallel^2 \sin^2(\theta_{\alpha_B})} \quad (2.84)$$

de lo cual se obtiene (2.83) al despejar θ_{α_B} . La condición impuesta sobre n^2 es la necesaria para que $\sin^2(\theta_{\alpha_B})$ sea un número entre 0 y 1. Se puede notar que, independientemente de la polarización y el valor de α_\perp relativo a α_\parallel , siempre se puede encontrar al menos un valor del índice de refracción para el cual exista este ángulo.

- Si $n \in \mathbb{R}$, para el valor crítico de a_α , $a_{\alpha_c} = n^2$, la reflexión es independiente del ángulo de incidencia:

De la refracción del vector de onda (2.48), tenemos que, como $a_\alpha = n^2$,

$$\cos(\Theta_\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\Theta_\alpha)} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta_1)}{N_\alpha^2}} = \frac{\sqrt{N_\alpha^2 - \sin^2(\theta)}}{N_\alpha} = \frac{|n| \cos(\theta_1)}{N_\alpha}, \quad (2.85)$$

lo que hace que el valor de f ((2.74) en polarización s y (2.80) en polarización p) sea constante, y consecuentemente el de r :

$$r_\alpha(\theta) = \frac{|\alpha_\parallel| - |n|}{|\alpha_\parallel| + |n|}. \quad (2.86)$$

Dado que $1+r = t$, también los coeficientes de transmisión serán constantes.

Hay que notar que esta condición sólo tiene sentido práctico cuando $n \in \mathbb{R}$, pues, en caso contrario, el ángulo crítico será $\pi/2$ y la reflexión será siempre total.

Otra consecuencia inmediata, es que un material con $|\alpha_{\parallel}| = |n|$ es totalmente antirreflejante en la polarización respectiva. Como $n^2 = \epsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}$, esto requiere que $\epsilon_{\parallel} = \mu_{\parallel}$, de manera que, si además resultara que $\epsilon_{\perp} = \mu_{\perp}$, el ángulo crítico sería el mismo para ambas polarizaciones, se tendría un único rayo transmitido, y ningún rayo reflejado. La condición $a_{\alpha} = n^2 = \epsilon_{\parallel}^2$, nos dice además que, en tal caso, $\mu_{\perp} = \epsilon_{\perp} = 1/\epsilon_{\parallel} = 1/\mu_{\parallel}$. Es decir, para que el material tenga la propiedad de ser antirreflejante en un caso de polarización arbitraria, se requiere que los tensores $\overleftrightarrow{\epsilon}$ y $\overleftrightarrow{\mu}$ sean iguales y con componentes paralelas inversas a la ortogonal.

Las gráficas (2.15), (2.16) y (2.17) muestran las amplitudes correspondientes a los ángulos de refracción de las gráficas (2.7), (2.8) y (2.10) y en ellas se pueden apreciar las propiedades recién enunciadas.

2.5.4. Reflectancia y transmitancia

Calcularemos ahora los coeficientes

$$R := \left| \frac{\vec{S}_r \cdot \hat{e}_z}{\vec{S}_i \cdot \hat{e}_z} \right|; \quad T := \left| \frac{\vec{S}_t \cdot \hat{e}_z}{\vec{S}_i \cdot \hat{e}_z} \right| \quad (2.87)$$

que representan la fracción de potencia reflejada desde y transmitida hacia la superficie por la onda. Habrá un par de estos coeficientes para cada polarización.

Dado que $k_{i_z} = -k_{r_z}$, y la definición de r (2.66),

$$R = \left| \frac{k_{r_z} E_{0r}^2 / 2\mu_1 \omega}{k_{i_z} E_{0i}^2 / 2\mu_1 \omega} \right| = r^2, \quad (2.88)$$

mientras que, utilizando (2.53)

$$T_m = \left| \frac{k_{m_z} E_{0m}^2 / 2\mu_{2\parallel} \omega}{k_{i_z} E_{0i}^2 / 2\mu_1 \omega} \right|. \quad (2.89)$$

Escribiendo $k_{m_z} = k_m \cos(\Theta_m)$, $k_i = k_i \cos(\theta_i)$ y utilizando (2.48) y la definición de t_m (2.67), esto queda

$$T_m = t_m^2 \frac{N_m(\theta_i) \cos(\Theta_m)}{|\mu_{\parallel}| \cos(\theta_i)}, \quad (2.90)$$

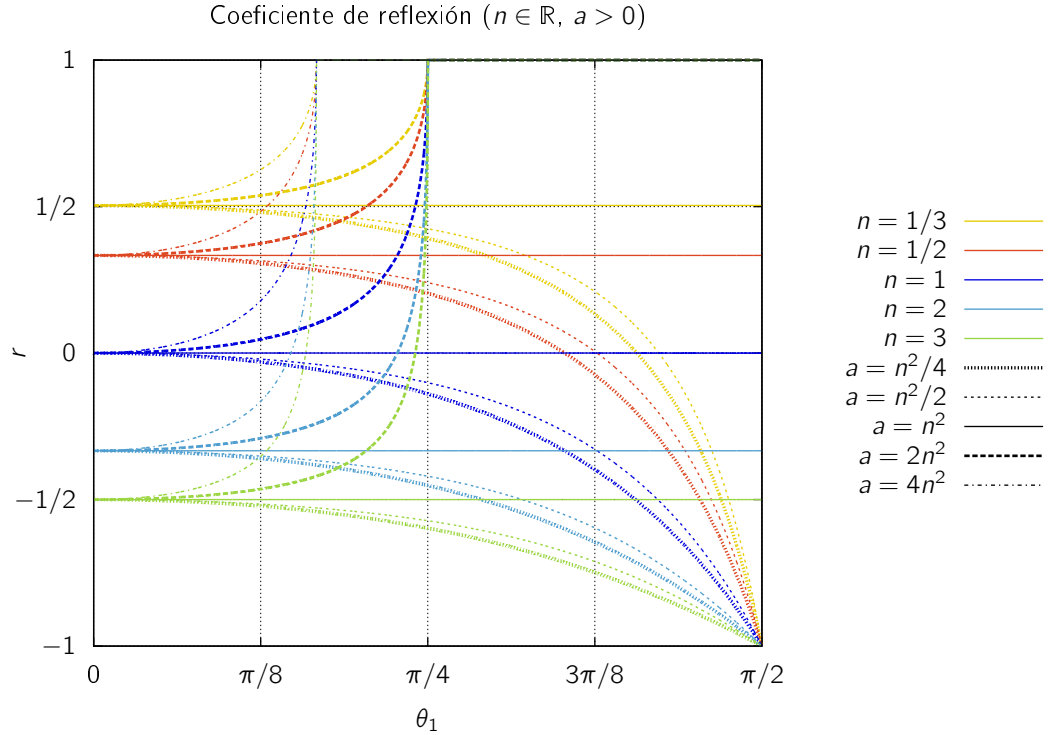


Figura 2.15: Coeficiente de reflexión para distintos valores de n (colores) y a_α (estilos de línea), con $\alpha_{\parallel} = 1$ y $n > 0$. Si $a_\alpha = a_m$ entonces es el coeficiente de reflexión en polarización s ; si $a_\alpha = a_e$ entonces estamos en polarización p . Las curvas con el valor crítico de a_α son constantes y valen $(1 - n)/(1 + n)$. Los casos con $a_\alpha > n^2$ tienen ángulo crítico y en éste el coeficiente se va a 1 y posteriormente permanece ahí (reflexión total). Los casos en los que no hay ángulo crítico se van a -1 en incidencia rasante ($\theta = \pi/2$). El valor para incidencia normal no depende de a_α , sólo de α_{\parallel} y n . Otros valores de α_{\parallel} modifican el valor en incidencia normal y desplazan las curvas de reflexión constante, pero no los valores en el ángulo crítico ni en incidencia rasante. La gráfica de t_m se obtiene de trasladar ésta una unidad hacia arriba.

que tiene exactamente la misma forma que la transmitancia de un medio isotrópico, dado que la diferencia en el vector de Poynting con respecto a ese caso es sólo una componente en dirección x . Naturalmente el coeficiente no es igual al del caso

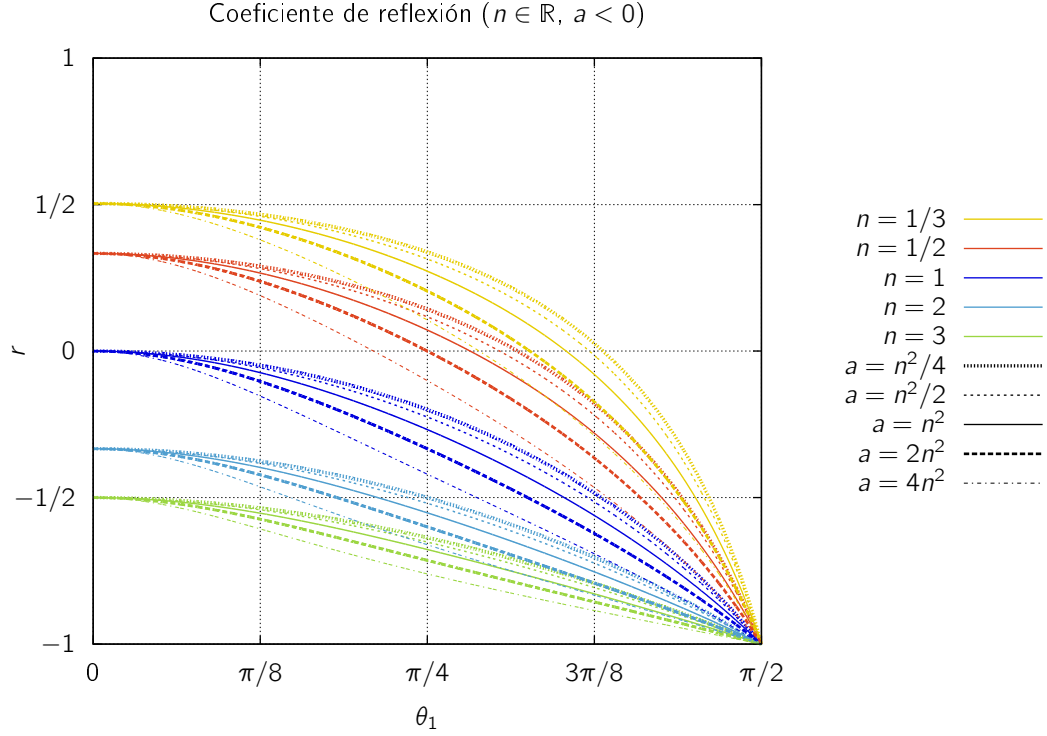


Figura 2.16: Gráfica análoga a la (2.15) para valores negativos de a_α .

isotrópico al no coincidir Θ_m y t_m con los de éste.

Para polarización p , por otro lado, utilizamos (2.54), la relación entre las amplitudes de \vec{H} y \vec{E} en el medio isotrópico (2.70) y anisotrópico (2.31) y obtenemos

$$\begin{aligned}
 T_e &= \left| \frac{k_{mz} H_{0e}^2 / 2\varepsilon_{2\parallel} \omega}{k_{iz} H_{0i}^2 / 2\varepsilon_{1\omega}} \right| \\
 &= t_e^2 \frac{N_e(\theta_i) \cos(\Theta_e)}{|\varepsilon_{\parallel}| \cos(\theta_i)}. \quad (2.91)
 \end{aligned}$$

Se puede ver que (2.90) ó (2.91) se escriben también como:

$$T_\alpha = t_\alpha^2 f_\alpha, \quad (2.92)$$

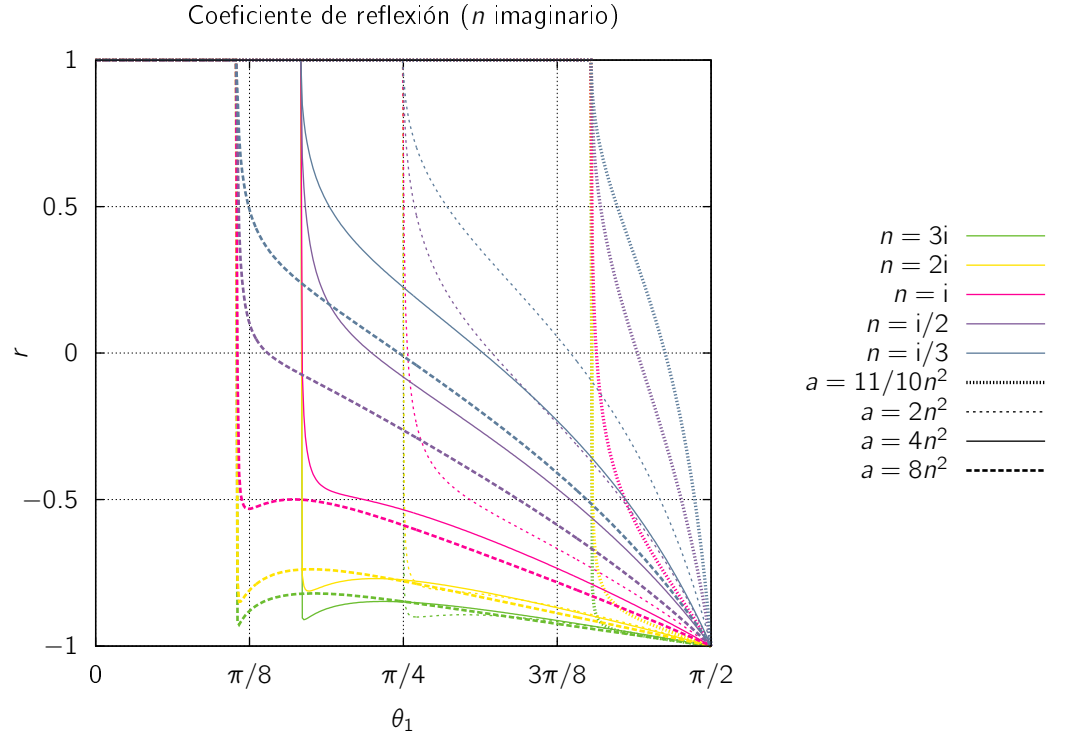


Figura 2.17: Amplitud de reflexión para valores imaginarios del índice de refracción.

y, al utilizar (2.71) ó (2.79) y (2.76) ó (2.82) obtenemos

$$R_\alpha + T_\alpha = (1 - t_\alpha)^2 + t_\alpha^2 f_\alpha = 1 - 2t_\alpha + t_\alpha^2(1 + f_\alpha) = 1 - 2t_\alpha + \frac{4}{1 + f_\alpha} = 1 \quad , \quad (2.93)$$

que es el resultado que usualmente se interpreta como la conservación de la energía.

2.6. Polarización mixta

Si el vector eléctrico incidente tiene una combinación de polarización s y p , siempre se pueden obtener las respectivas componentes y aplicar el análisis previo.

Sin embargo, en el medio anisotrópico,

$$\vec{E} \times \vec{H} = (\vec{E}_e + \vec{E}_m) \times (\vec{H}_e + \vec{H}_m) = \vec{S}_e + \vec{E}_e \times \vec{H}_m + \vec{S}_m \quad (2.94)$$

es un producto que incluye, como se puede ver, un término de interferencia. Al estar \vec{E}_e y \vec{H}_m en el plano de incidencia, esta componente irá en dirección ortogonal a este, así que, aunque para cada polarización el vector de Poynting se queda en el plano, no sucede así en el caso general. Utilizando el resultado (2.40) y la refracción del vector de onda (2.48) podemos escribir estos campos como

$$\begin{aligned} \vec{E}_e &= E_e(\cos(\phi_e - \Theta_e), 0, \sin(\phi_e - \Theta_e)) \\ &= \frac{E_e}{\beta_e(\Theta_e)} \left(\frac{|\varepsilon_{\parallel}|}{\varepsilon_{\perp}} \sin(\Theta_e), 0, \cos(\Theta_e) \right) \\ &= \frac{E_e}{\beta_e(\Theta_e)} \left(\frac{|\varepsilon_{\parallel}| \sin(\theta_i)}{\varepsilon_{\perp} N_e(\theta_i)}, 0, \cos(\Theta_e) \right) , \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\vec{H}_m = \frac{H_m}{\beta_m(\Theta_m)} \left(\frac{|\mu_{\parallel}| \sin(\theta_i)}{\mu_{\perp} N_m(\theta_i)}, 0, \cos(\Theta_m) \right) . \quad (2.96)$$

Así, el término de interferencia será

$$\vec{E}_e \times \vec{H}_m = \frac{E_e H_m}{\beta_m \beta_e} \sin(\theta_i) \left(\frac{|\mu_{\parallel}| \cos(\Theta_e)}{\mu_{\perp} N_m(\theta_i)} - \frac{|\varepsilon_{\parallel}| \cos(\Theta_m)}{\varepsilon_{\perp} N_e(\theta_i)} \right) \hat{e}_y . \quad (2.97)$$

Ahora, ya que

$$\begin{aligned} E_e &= E_{0,e} \cos(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega t) \\ H_m &= H_{0,m} \cos(\vec{k}_m \cdot \vec{r} - \omega t) \end{aligned} \quad (2.98)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(a_1 - \omega t) \cos(a_2 - \omega t) dt &= \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(a_1 + a_2 - 2\omega t) + \cos(a_1 - a_2) dt \\ &= \frac{\sin(2\omega T - a_1 - a_2) + \sin(a_1 + a_2)}{4\omega T} \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos(a_1 - a_2) \\ &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cos(a_1 - a_2) , \end{aligned} \quad (2.99)$$

tenemos que, el promedio, para frecuencias ópticas, del término de interferencia es

$$\vec{S}_{e,m} = \frac{E_{0,e} H_{0,m}}{2\beta_m \beta_e} \sin(\theta_i) \cos((\vec{k}_m - \vec{k}_e) \cdot \vec{r}) \left(\frac{|\mu_{\parallel}| \cos(\Theta_e)}{\mu_{\perp} N_m(\theta_i)} - \frac{|\varepsilon_{\parallel}| \cos(\Theta_m)}{\varepsilon_{\perp} N_e(\theta_i)} \right) \hat{e}_y \quad (2.100)$$

Si el vector eléctrico entra polarizado linealmente, formando un ángulo δ con respecto al plano de incidencia, su componente s es $E_i \sin(\delta)$ y la p es $E_i \cos(\delta)$. Siendo así, y utilizando la relación (2.70), y los coeficientes de transmisión (2.82) y (2.76) este promedio queda

$$\vec{S}_{m,e} = \frac{t_m t_e \sin(2\delta) E_{0i}^2 k_i \sin(\theta_i) \hat{e}_y}{4\beta_m(\Theta_m) \beta_e(\Theta_e) \mu_1 \omega} \cos((k_{mz} - k_{ez})z) \left(\frac{|\mu_{\parallel}| \cos(\Theta_e)}{\mu_{\perp} N_m(\theta_i)} - \frac{|\varepsilon_{\parallel}| \cos(\Theta_m)}{\varepsilon_{\perp} N_e(\theta_i)} \right) \quad (2.101)$$

2.7. Incidencia desde un medio anisotrópico

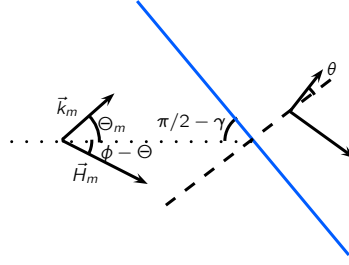


Figura 2.18: Incidencia desde un medio anisotrópico hacia uno isotrópico cuando el eje óptico está en el plano de incidencia.

Ahora calcularemos las propiedades de reflexión y transmisión cuando la incidencia es desde el medio anisotrópico y hacia el medio isotrópico, en el caso en el que el eje óptico está en el plano de incidencia y forma un ángulo $\pi/2 - \gamma$ con la interfaz. Si bien este no es el caso más general, será importante posteriormente.

2.7.1. Vectores de onda y Ley de Snell

El vector de onda forma un ángulo Θ_{α} con el eje óptico. De la figura, podemos deducir que entonces forma un ángulo $\Theta_{\alpha} - \gamma$ con la normal a la superficie. Por tanto, las condiciones de frontera del vector de onda de cada modo son

$$k_{\alpha} \sin(\Theta_{\alpha} - \gamma) = k_{\alpha} \sin(\theta_1) \quad (2.102)$$

pues, nuevamente, en el medio isotrópico los ángulos de refracción coinciden con los formados por los vectores de onda. De (2.20) podemos despejar k_{α} al escribir

$k_{\alpha_x} = k_\alpha \sin(\Theta_\alpha)$, obteniendo

$$k_\alpha = \frac{k_0 n_{\parallel}}{\sqrt{1 + (a_\alpha - 1) \sin^2(\Theta_\alpha)}} \quad , \quad (2.103)$$

por lo que, con

$$M_\alpha(\Theta) = \frac{\sqrt{1 + (a_\alpha - 1) \sin^2(\Theta)}}{n} \quad (2.104)$$

el ángulo de refracción está dado, en términos exclusivamente de las propiedades del medio y Θ_α , por

$$M_\alpha(\Theta_\alpha) \sin(\theta_1) = \sin(\Theta_\alpha - \gamma) \quad . \quad (2.105)$$

La ecuación (2.56) se puede invertir para obtener

$$\sin(\theta_1) = \frac{\text{sgn}(\alpha_\perp) n \sin(\theta_\alpha)}{\sqrt{a(a + (1 - a) \sin^2(\theta_\alpha))}} \quad , \quad (2.106)$$

lo cual se puede utilizar junto con (2.48) para escribir la ley de Snell, en términos de los ángulos de incidencia y refracción.

2.7.2. Coeficientes de reflexión y transmisión

Para el modo m , las condiciones de frontera son

$$\begin{aligned} E_{m_i} + E_{m_r} &= E_{m_t} \\ (H_{m_i} - H_{m_r}) \cos(\phi_m - \Theta_m + \gamma) &= H_{m_t} \cos(\theta_1) \quad , \end{aligned} \quad (2.107)$$

que, en términos de las definiciones (2.66) y utilizando las relaciones (2.31) y (2.70) son equivalentes a

$$\begin{aligned} 1 + r &= t \\ \cos(\phi_m - \Theta_m + \gamma) \frac{k_m \beta_m(\Theta_m)}{|\mu_{\parallel}|} (1 - r) &= t \frac{k_1}{\mu_1} \cos(\theta_1) \end{aligned} \quad (2.108)$$

que, tienen solución, en términos de

$$f_m(\Theta) = \frac{|\tilde{\mu}_{\parallel}| \cos(\theta_1)}{\beta_m(\Theta) \cos(\phi_m - \Theta + \gamma) M(\Theta)} \quad , \quad (2.109)$$

igual a

$$\begin{aligned} r_m(\Theta_m) &= \frac{1 - f_m(\Theta_m)}{1 + f_m(\Theta_m)} \\ t_m(\Theta_m) &= \frac{2}{1 + f_m(\Theta_m)} \quad . \end{aligned} \quad (2.110)$$

Utilizando los resultados (2.40) y (2.38) junto con la identidad para el coseno de una suma, podemos simplificar f_m :

$$f_m(\Theta_m) = \frac{|\tilde{\mu}_{\parallel}| \cos(\theta_1)}{(\text{sgn}(\mu_{\parallel}) a_m \sin(\Theta_m) \cos(\gamma) - \cos(\Theta_m) \sin(\gamma)) M(\Theta)} \quad (2.111)$$

Para el modo e, tenemos, por otro lado,

$$\begin{aligned} H_{e_i} + H_{e_r} &= H_{e_t} \\ (E_{e_i} - E_{e_r}) \cos(\phi_e - \Theta_e + \gamma) &= E_{m_t} \cos(\theta_1) \end{aligned} \quad (2.112)$$

que tiene solución análoga a la del otro modo, en términos de

$$f_e(\Theta) = \frac{|\tilde{\epsilon}_{\parallel}| \cos(\theta_1)}{\beta_e(\Theta) \cos(\phi_e - \Theta + \gamma) M(\Theta)} \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} r_e(\Theta_e) &= \frac{1 - f_e(\Theta_e)}{1 + f_e(\Theta_e)} \\ t_e(\Theta_e) &= \frac{2}{1 + f_e(\Theta_e)} \end{aligned} \quad (2.114)$$

2.7.3. Reflectancia y transmitancia

Ahora la normal a la superficie es $\hat{e}_n = (\cos(\gamma), 0, \sin(\gamma))$, así que la reflectancia del modo m es

$$\begin{aligned} R_m &= \left| \frac{\vec{S}_{m_r} \cdot \hat{e}_n}{\vec{S}_{m_i} \cdot \hat{e}_n} \right| = \left| \frac{E_{m_0}^2 k_m (\sin(\Theta_m) \cos(\gamma) / \mu_{\perp} + \cos(\Theta_m) \sin(\gamma) / \mu_{\parallel}) / 2\omega \mu_{\parallel}}{E_{m_0}^2 k_m (\sin(\Theta_m) \cos(\gamma) / \mu_{\perp} - \cos(\Theta_m) \sin(\gamma) / \mu_{\parallel}) / 2\omega \mu_{\parallel}} \right| \\ &= r_m^2 \left| \frac{1 + a_m \tan(\Theta_m) \cot(\gamma)}{1 - a_m \tan(\Theta_m) \cot(\gamma)} \right| \end{aligned} \quad (2.115)$$

y su transmitancia,

$$\begin{aligned} T_m &= \left| \frac{\vec{S}_{m_t} \cdot \hat{e}_n}{\vec{S}_{m_i} \cdot \hat{e}_n} \right| = \left| \frac{E_{m_0}^2 k_1 (\sin(\theta_1) \cos(\gamma) + \cos(\theta_1) \sin(\gamma)) / 2\mu_1 \omega}{E_{m_0}^2 k_m (\sin(\Theta_m) \cos(\gamma) / \mu_{\perp} - \cos(\Theta_m) \sin(\gamma) / \mu_{\parallel}) / 2\omega \mu_{\parallel}} \right| \\ &= t_m^2 \left| \frac{\tilde{\mu}_{\parallel} M(\Theta_m) \sin(\theta_1 - \gamma)}{\sin(\Theta_m) \cos(\gamma) / \mu_{\perp} - \cos(\Theta_m) \sin(\gamma) / \mu_{\parallel}} \right| \end{aligned} \quad (2.116)$$

3. Refracción negativa en un metamaterial laminado

Veremos ahora cómo se puede obtener refracción negativa construyendo un metamaterial anisotrópico uniaxial muy simple.

3.8. Propiedades efectivas de un material laminado

Consideremos un metamaterial infinito formado por una repetición de láminas de materiales isotrópicos de funciones dieléctricas ϵ_a y ϵ_b y magnéticas μ_a y μ_b , como se muestra en la figura (3.19). La celda unitaria tiene un espesor d y una fracción f_a de éste es ocupado por el material a , mientras que una fracción $f_b = 1 - f_a$ es ocupado por el material b ⁴.

Supondremos que la longitud de onda incidente es mucho mayor que las dimensiones de la celda unitaria, en cuyo caso es válido aplicar la teoría del medio efectivo para obtener las propiedades promedio de este material. En particular, dicha suposición implica que los campos prácticamente no varíen dentro de la celda.

Si en el metamaterial se propaga un modo, el campo eléctrico correspondiente tendrá componente paralela a las láminas continua, mientras que el campo de desplazamiento tendrá componente ortogonal a éstas continua. Además, en cada material se cumplen las ecuaciones materiales correspondientes a un material

⁴Pueden verse mayores detalles del tema en [17]

isotrópico, de manera que

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{E}_\perp \rangle &= \frac{1}{V} \int \vec{E}_\perp \\
 &= \frac{1}{V} \int_a \vec{E}_\perp + \frac{1}{V} \int_b \vec{E}_\perp \\
 &= \frac{1}{V} \int_a \frac{\vec{D}_{\alpha_\perp}}{\epsilon_a} + \frac{1}{V} \int_b \frac{\vec{D}_{b_\perp}}{\epsilon_b} \\
 &= \frac{V_a}{V} \frac{\langle \vec{D}_{\alpha_\perp} \rangle}{\epsilon_a} + \frac{V_b}{V} \frac{\langle \vec{D}_{b_\perp} \rangle}{\epsilon_b} .
 \end{aligned} \tag{3.117}$$

Como la longitud de onda es muy grande comparada con las dimensiones de la celda unitaria, y \vec{D}_\perp es una función continua, $\langle \vec{D}_{\alpha_\perp} \rangle \approx \langle \vec{D}_{b_\perp} \rangle \approx \langle \vec{D}_\perp \rangle$. V_a/V y V_b/V son simplemente las fracciones ocupadas, por lo que

$$\langle \vec{E}_\perp \rangle \approx \left(\frac{f_a}{\epsilon_a} + \frac{f_b}{\epsilon_b} \right) \langle \vec{D}_\perp \rangle . \tag{3.118}$$

La componente paralela de \vec{E} también es continua, y, bajo las mismas conside-

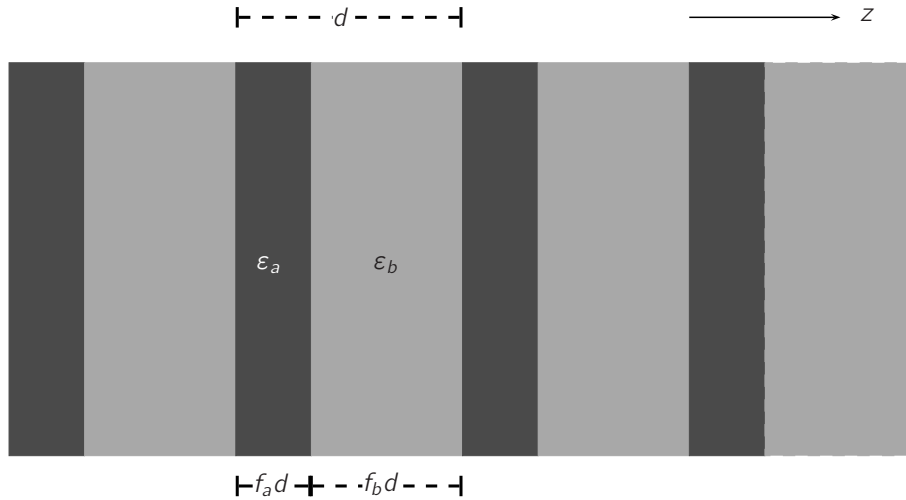


Figura 3.19:

raciones,

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{D}_{\parallel} \rangle &= \frac{1}{V} \int \vec{D}_{\parallel} \\
 &= \frac{1}{V} \int_a \vec{D}_{\parallel} + \frac{1}{V} \int_b \vec{D}_{\parallel} \\
 &= \frac{1}{V} \int_a \epsilon_a \vec{E}_{\alpha\parallel} + \frac{1}{V} \int_b \epsilon_b \vec{E}_{b\parallel} \\
 &\approx (f_a \epsilon_a + f_b \epsilon_b) \langle \vec{E}_{\parallel} \rangle .
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

Esto nos dice que, en la escala apropiada, el campo eléctrico se relaciona con el de desplazamiento linealmente, en la forma

$$\langle \vec{D} \rangle = \left((f_a \epsilon_a + f_b \epsilon_b) (\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{e}_y \hat{e}_y) + \frac{\epsilon_a \epsilon_b}{f_a \epsilon_b + f_b \epsilon_a} \hat{e}_z \hat{e}_z \right) \langle \vec{E} \rangle . \tag{3.120}$$

Ya que las componentes normales de \vec{B} y las paralelas de \vec{H} también son continuas y las relaciones entre ellos son análogas a las de \vec{D} y \vec{E} en cada medio, también tenemos que

$$\langle \vec{B} \rangle = \left((f_a \mu_a + f_b \mu_b) (\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{e}_y \hat{e}_y) + \frac{\mu_a \mu_b}{f_a \mu_b + f_b \mu_a} \hat{e}_z \hat{e}_z \right) \langle \vec{H} \rangle . \tag{3.121}$$

Es decir, de manera efectiva, este metamaterial es anisotrópico y uniaxial, y sus tensores dependen de las funciones de respuesta de los materiales que lo componen y la fracción ocupada por cada uno de ellos en la celda unitaria. Por supuesto, en la celda unitaria podría haber una distribución diferente a la mostrada en la figura, mientras que las láminas ocuparan en total la misma fracción.

Además, por construcción este material tiene su eje óptico alineado con la normal a la superficie, por lo cual podemos aplicar los resultados de la sección anterior en el rango adecuado de frecuencias. También es posible obtener un material con otra alineación del eje óptico con respecto a la normal, haciendo un corte recto de este material en la dirección apropiada, y cambiando con ello la interfaz.

Esta construcción muestra que hay casos en donde, como se supuso de inicio, existen materiales cuyos tensores magnéticos y eléctricos son simultáneamente diagonalizables, o, como se dijo antes, cuyos "ejes ópticos" magnético y eléctrico coinciden.

3.9. Modelo de Drude

El modelo de Drude es una aproximación clásica a la respuesta electrónica de un material. Supone que éste está formado por una colección de cargas idénticas q , distribuidas uniformemente en el material, con una densidad n , sujetas a una fuerza que los mantiene en él, alrededor de una posición de equilibrio (ubicada en $\vec{0}$ para cada carga, y con un coeficiente de restitución k) y a un campo eléctrico poco intenso. Supone además que el material ejerce una resistencia de tipo viscosa a su movimiento, con coeficiente b . Bajo tales hipótesis, la ecuación de movimiento de una de estas cargas es

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - b\dot{\vec{r}} + q\vec{E} \quad . \quad (3.122)$$

La transformada de Fourier de esta ecuación es

$$-m\omega^2\hat{r} = -k\hat{r} + i\omega b\hat{r} + q\hat{E} \quad (3.123)$$

que se puede escribir también como

$$q\hat{r} = \frac{\frac{q^2}{m}}{\frac{k}{m} - i\omega\frac{b}{m} - \omega^2} \hat{E} \quad . \quad (3.124)$$

El lado izquierdo es la transformada de Fourier del momento dipolar de esa carga con respecto a su posición de equilibrio. El momento dipolar total en un volumen V de este material será el número de cargas N en tal volumen multiplicado por el momento individual, y la densidad de momento dipolar será a su vez esta cantidad dividida entre dicho volumen. En promedio, tendremos entonces que la transformada de la densidad de momento dipolar será

$$\hat{P} = nq\hat{r} = \frac{\frac{nq^2}{m}}{\frac{k}{m} - i\omega\frac{b}{m} - \omega^2} \hat{E} \quad . \quad (3.125)$$

Esta es una relación lineal entre las transformadas de \hat{P} y \hat{E} , por lo que el coeficiente de proporcionalidad dividido entre ϵ_0 es la transformada de la susceptibilidad eléctrica:

$$\hat{\chi}_e(\omega) = \frac{\frac{nq^2}{m\epsilon_0}}{\frac{k}{m} - i\omega\frac{b}{m} - \omega^2} \quad , \quad (3.126)$$

por lo cual la función dieléctrica de un material de Drude está dada por

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}(\omega) = 1 + \frac{\frac{nq^2}{m\epsilon_0}}{\frac{k}{m} - i\omega\frac{b}{m} - \omega^2} \quad . \quad (3.127)$$

Usualmente se le llama a la cantidad en el numerador la *frecuencia del plasma*, y se denota por ω_p ,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{nq^2}{m\epsilon_0}} \quad (3.128)$$

y, en el modelo mecánico, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ sería la frecuencia natural de oscilación de las cargas. Por otro lado, m/b es el tiempo en el cual la amplitud inicial del movimiento individual de cada carga decaería a $1/e$ en ausencia de forzamiento. Este tiempo es a su vez una medida inversa de la capacidad disipadora del medio, pues, a mayor disipación, el decaimiento es más veloz.

Resulta natural utilizar la frecuencia del plasma como unidad para este problema. Definiendo $\Omega := \omega/\omega_p$, $\Omega_0 := \omega_0/\omega_p$ y $\tau := \omega_p \frac{m}{b}$, la función dieléctrica se puede expresar en la forma

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}(\Omega) = 1 - \frac{1}{\Omega^2 - \Omega_0^2 + i\Omega/\tau} \quad (3.129)$$

que depende del parámetro τ , que es una medida adimensional del tiempo de decaimiento y Ω_0 que es una medida adimensional de la frecuencia natural de oscilación de las cargas.

En particular cuando se tienen cargas libres (como los electrones libres en un metal), no hay fuerza de restauración que lo mantenga alrededor de una posición de equilibrio, y $\Omega_0 = 0$.

3.10. Metamaterial metálico-dieléctrico sin disipación

Utilizaremos el modelo de Drude y las propiedades efectivas del material laminado para construir un metamaterial sin actividad magnética en el que se pueda encontrar refracción negativa. Para ser consistentes con la primera parte del texto, supondremos además que estamos en una región en donde la disipación del material es despreciable, es decir, en donde $\tau \rightarrow \infty$.

Consideraremos entonces una serie de capas de un metal de Drude con baja disipación, ocupando una fracción f_a de la celda unitaria y un dieléctrico, que ocupa el resto de la celda, con una fracción f_b y que en este rango de frecuencias tenga

una función dieléctrica constante $\epsilon_0(1 + \chi_d)$. El tensor dieléctrico efectivo de tal metamaterial es entonces

$$\begin{aligned} \frac{\overleftrightarrow{\epsilon}}{\epsilon_0}(\Omega) &= \left(f_a \left(1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) + f_b(1 + \chi_d) \right) (\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{e}_y \hat{e}_y) \\ &\quad + (1 + \chi_d) \frac{1 - \frac{1}{\Omega^2}}{f_b \left(1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) + f_a(1 + \chi_d)} \hat{e}_z \hat{e}_z \\ &= \left(f_a \left(1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) + f_b g \right) (\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{e}_y \hat{e}_y) \\ &\quad + (1 + \chi_d) \frac{\Omega^2 - 1}{f_b(\Omega^2 - 1) + f_a(1 + \chi_d)\Omega^2} \hat{e}_z \hat{e}_z \quad . \end{aligned} \quad (3.130)$$

La permeabilidad (de manera exacta) será simplemente la del vacío, dado que hemos supuesto que ambos materiales son no magnéticos.

Tomando en cuenta que $f_a + f_b = 1$, y llamando simplemente $f = f_a$, podemos expresar

$$\begin{aligned} \frac{\overleftrightarrow{\epsilon}}{\epsilon_0}(\Omega) &= \left(1 + \chi_d - f \left(\chi_d + \frac{1}{\Omega^2} \right) \right) (\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{e}_y \hat{e}_y) \\ &\quad + (1 + \chi_d) \frac{\Omega^2 - 1}{\Omega^2(1 + f\chi_d) + f - 1} \hat{e}_z \hat{e}_z \quad . \end{aligned} \quad (3.131)$$

Como se espera, cuando $f = 0$, $\overleftrightarrow{\epsilon} = \epsilon_0(1 + \chi_d)\overleftrightarrow{I}$, y cuando $f = 1$, $\overleftrightarrow{\epsilon} = \epsilon_0(1 - 1/\Omega^2)\overleftrightarrow{I}$.

Como estamos pensando en un dieléctrico típico, supondremos $\chi_d > 0$. Recordemos que en estos medios la condición equivalente a la de refracción negativa es $\epsilon_{\perp} < 0$ para el modo e y $\mu_{\perp} < 0$ para el modo m . Así, buscamos frecuencias que, cumpliendo el requisito de baja disipación, satisfagan además que

$$\frac{\Omega^2 - 1}{\Omega^2(1 + f\chi_d) + f - 1} < 0 \quad . \quad (3.132)$$

Para frecuencias mayores a la del plasma ($\Omega > 1$), necesitamos que

$$\begin{aligned} \Omega^2(1 + f\chi_d) + f - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow \Omega &< \sqrt{\frac{1 - f}{1 + f\chi_d}} \quad . \end{aligned} \quad (3.133)$$

Sin embargo, el número del lado derecho de la desigualdad es siempre menor que 1, por lo que esta condición nunca puede darse para frecuencias mayores que la

del plasma. Si, por el contrario, $\Omega < 1$, entonces la condición se vuelve

$$\Omega > \sqrt{\frac{1-f}{1+f\chi_d}}, \quad (3.134)$$

es decir, en el rango de frecuencias

$$\left(\omega_p \sqrt{\frac{1-f}{1+f\chi_d}}, \omega_p \right) \quad (3.135)$$

la componente ortogonal del tensor dieléctrico será siempre negativa, y para todas esas frecuencias habrá refracción negativa del modo e . Si en particular hacemos incidir luz con polarización p , veremos un único rayo refractándose en sentido inverso al incidente.

En el límite en el que $f \rightarrow 1$ (cuando sólo está el metal) naturalmente este intervalo va desde 0 a ω_p . Sin embargo, este material laminado presenta un comportamiento más rico que el metal puro, pues tiene un parámetro fácilmente manipulable (f) que permite modificar el valor de ε , el rango en donde se obtienen sus valores negativos, y –muy importante– aumentar la cantidad de luz que puede pasar cuando el metal tiene algo de disipación.

Ahora, la componente paralela del tensor dieléctrico

$$\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_d - f \left(\chi_d + \frac{1}{\Omega^2} \right) \quad (3.136)$$

es, dado que $f < 1$, siempre mayor que $1 - 1/\Omega^2$, lo que nos dice que en este metamaterial las componentes ortogonal y paralela no pueden ser simultáneamente negativas, pues esta última cantidad sólo es negativa después de la frecuencia del plasma.

Por otro lado, el factor de anisotropía es

$$a_e(\Omega) = \frac{\varepsilon_{\parallel}(\Omega)}{\varepsilon_{\perp}(\Omega)} = \frac{1 + \chi_d - f(\chi_d + 1/\Omega^2)}{(1 + \chi_d) \frac{\Omega^2 - 1}{\Omega^2(1+f\chi_d)+f-1}}, \quad (3.137)$$

que, en el límite en el que $\Omega \rightarrow 1$ se va a infinito. Establecida una fracción del metal de Drude ocupada en la celda unitaria, siempre se puede escoger un rango de frecuencias (antes de la del plasma) en donde la componente paralela del tensor dieléctrico sea negativa y además el factor de anisotropía sea arbitrariamente grande, por lo que en particular se puede obtener el comportamiento de ángulo de refracción poco variable como función del incidencia mostrado en (2.9).

Otra manera de obtener este límite, de forma exacta, es hacer $\varepsilon_l = 0$. Para ello se requiere una fracción ocupada por el metal igual a

$$f = \frac{1 + \chi_d}{1/\Omega^2 + \chi_d} . \quad (3.138)$$

Ya que f es un número menor que 1, esto sólo puede pasar cuando $\Omega < 1$. Es decir, dada una frecuencia menor que la del plasma, siempre se puede construir el metamaterial con una fracción ocupada por el metal tal que, para esa frecuencia, el índice de refracción n_{\parallel} sea nulo.

·4· Aplicación: colimador de luz difusa por refracción

Consideremos un dispositivo como el de la figura (4.20), formado de un metamaterial con $a_\alpha \ll 0$, y una onda plana incidiendo en el extremo izquierdo. Supondremos que las escalas del problema son tales que el límite de la óptica geométrica es válido. Como vimos en la sección de refracción, el vector de onda del modo α se refracta, si el ángulo de incidencia es suficientemente grande, en un ángulo muy cercano a $\arcsen(1/\sqrt{-a_\alpha}) \approx 1/\sqrt{-a_\alpha}$. Como se puede ver, forma además un ángulo γ con la normal a la segunda superficie.

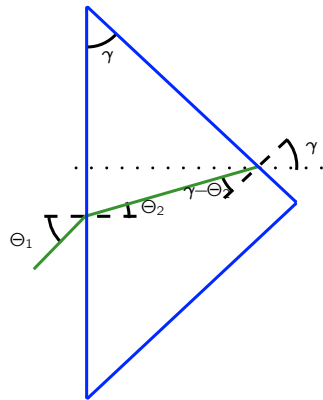


Figura 4.20: Esquema del colimador

El vector de Poynting, por su lado, se refracta a un ángulo cercano a $\pi/2$, por lo que el rayo refractado incide nuevamente desde dentro en la cara superior del

triángulo. Al pasar la segunda superficie, el rayo tiene un vector de Poynting que nuevamente coincide con el vector de onda, y sale con un ángulo determinado por la Ley de Snell (2.105),

$$M_\alpha(\Theta_a) \text{sen}(\theta_3) = \text{sen}(\Theta_a - \gamma) \quad . \quad (4.139)$$

Exploraremos la posibilidad de asignar un valor adecuado a γ para que, en este límite, tal dispositivo sirva para colimar luz.

En principio, una opción es escoger γ de manera tal que el ángulo de refracción tras la segunda reflexión sea también γ ,

$$\begin{aligned} \text{sen}(\gamma) &= (\text{sen}(\Theta_a) \cos(\gamma) - \cos(\Theta_\alpha) \text{sen}(\gamma)) / M_\alpha(\Theta_\alpha) \\ \Leftrightarrow \frac{\text{sen}(\gamma)}{\text{sen}(\Theta_a) \cos(\gamma) - \cos(\Theta_\alpha) \text{sen}(\gamma)} &= \frac{1}{M_\alpha(\Theta_\alpha)} \\ \Leftrightarrow \text{sen}(\Theta_\alpha) \tan(\gamma) - \cos(\Theta_a) &= M_\alpha(\Theta_\alpha) \\ \Leftrightarrow \tan(\gamma) &= \frac{M_\alpha(\Theta_\alpha)}{\text{sen}(\Theta_\alpha)} + \cot(\Theta_\alpha) \quad . \end{aligned} \quad (4.140)$$

Sin embargo, en el límite en el que $a_\alpha \rightarrow -\infty$, tenemos que

$$\frac{M_\alpha(\Theta_\alpha)}{\text{sen}(\Theta_\alpha)} = \frac{\sqrt{1 + (a_\alpha - 1) \text{sen}^2(\Theta_\alpha)}}{n \text{sen}(\Theta_\alpha)} = \frac{1}{\text{sen}(\theta_1)} \quad , \quad (4.141)$$

es decir, aunque el ángulo formado por \vec{k}_α varía poco con θ_1 , el ángulo de salida tras la segunda interfaz vuelve a tener una dependencia de éste, lo que hace poco viable este camino para el colimador.

Una segunda opción consiste en observar que la reflectancia en la segunda interfaz (2.115) puede anularse siempre que a_α es negativo, cuando

$$1 + a_\alpha \tan(\Theta_\alpha) \cot(\gamma) = 0 \quad , \quad (4.142)$$

que justamente se logra para un ángulo

$$\gamma = \text{arccot} \left(\frac{1}{-a_\alpha} \cot(\Theta_\alpha) \right) \approx \text{arccot} \left(\frac{1}{\sqrt{-a_\alpha}} \right) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{-a_\alpha}} \quad (4.143)$$

Sin embargo, al introducir este valor de γ en la ley de Snell, obtenemos reflexión total para una gran parte de los ángulos, y, además, un dispositivo sumamente alargado, que no es resulta muy práctico ni realizable.

Consideraremos una tercera opción, que es la de hacer γ tal, que la incidencia sobre la segunda superficie sea normal, es decir $\gamma = 1/\sqrt{-a_\alpha}$. Esto garantiza que los rayos que entran con $\Theta_\alpha = 1/\sqrt{-a_\alpha}$ se transmitan (estamos suponiendo $n \in \mathbb{R}$) y además no se desvíen. Ahora los rayos salen con una ligera inclinación, así que colocamos un segundo dispositivo como en la figura (4.21), de un material isotrópico, de índice de refracción n_3 , con su extremo izquierdo separado una distancia d del correspondiente al metamaterial anisotrópico, y con una altura extra a la de éste igual a $B - d$.

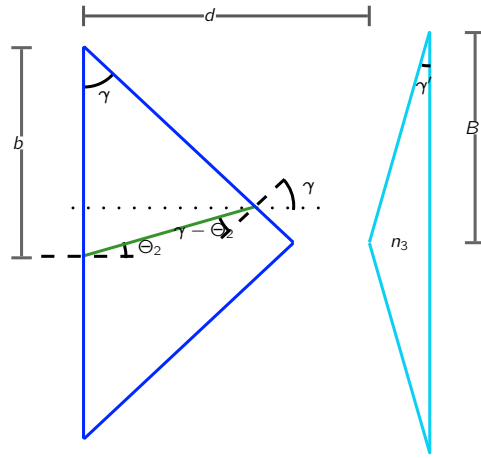


Figura 4.21: Agregamos un segundo dispositivo de un material isotrópico.

Escogeremos el ángulo γ' de manera que el rayo salga horizontal de esta tercera interfaz, y no se desvíe en la cuarta. Esto implica que el ángulo de refracción sea justamente γ' , por lo que la ley de Snell nos dice que

$$n_1 \operatorname{sen}(\gamma' - \gamma) = n_3 \operatorname{sen}(\gamma') \quad , \quad (4.144)$$

o sea,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\gamma') \cos(\gamma) - \cos(\gamma') \operatorname{sen}(\gamma) &= \tilde{n}_3 \operatorname{sen}(\gamma') \\ \Leftrightarrow \gamma' &= \operatorname{arccot} \left(\frac{\cos(\gamma) - \tilde{n}_3}{\operatorname{sen}(\gamma)} \right) . \end{aligned} \quad (4.145)$$

Haremos además $B = \frac{d \tan(\gamma) + b}{1 - \tan(\gamma) \tan(\gamma')}$ para garantizar que aún el rayo que salga más alto llegue al segundo dispositivo.

Finalmente, rotaremos este arreglo por un eje paralelo al eje óptico, que pase por el vértice derecho del triángulo. Obtenemos así simetría rotacional, de manera que, si sobre el extremo izquierdo del arreglo incide luz difusa, cualquier rayo incide sobre algún plano en el que está el eje óptico. El rayo se refracta dentro del material anisotrópico en un ángulo cercano a $1/\sqrt{-a_\alpha}$, y sale del prisma con el mismo ángulo. Tenemos entonces un conjunto de rayos que se abren ligeramente, –aproximadamente sobre la superficie de un cono– y que son enderezados finalmente por el segundo dispositivo.

En el caso ideal tenemos un metamaterial con $\vec{\epsilon} = \vec{\mu}$, y un sólo rayo refractado dentro de éste. Aún si esto no se puede lograr, este razonamiento es válido para el modo con $a_\alpha \ll 0$. Si la luz difusa está polarizada en promedio 1/2 en polarización s y 1/2 en polarización p , lo dicho se aplicará para la mitad de la luz incidente.

Ahora, ¿cuál es la fracción F de la luz incidente que colima este arreglo? Hay que tomar en cuenta, primero, que la luz no saldrá exactamente al ángulo esperado; y segundo, que el paso por ambos medios le hará perder intensidad.

Para cuantificar esta fracción, estableceremos un nivel de precisión deseado en el ángulo final de salida: $\Delta\theta$. La fracción de luz colimada será entonces la suma de la intensidad de todos los rayos que salen a menos de este ángulo (medido con respecto a la normal del segundo triángulo), dividida entre la suma de la intensidad de todos los rayos incidentes. Dada la simetría rotacional, este cálculo puede efectuarse en un corte plano como el de las figuras anteriores, suponiendo una distribución homogénea de los rayos incidentes.

Se puede resolver la desigualdad que determina los ángulos de incidencia para los cuales se cumple la precisión deseada tras el paso por el arreglo, sin embargo, la integral para obtener las intensidades dista mucho de ser trivial. Veremos algunos cálculos numéricos que muestran cómo se comporta la fracción F como función de a_α para diferentes valores de n y n' .

Aunque en el límite de a_α muy negativa se obtienen los resultados de ángulo de refracción poco variable, para fines numéricos y de búsqueda de valores más realistas de a_α (no sumamente extremos), se utilizó como valor de γ el ángulo de refracción para una incidencia rasante, aprovechando el hecho de la monotonía de Θ_α . Para dicho rayo, el ángulo de salida es exactamente 0 al final del arreglo, por construcción.

Se realizó una integración numérica de la intensidad sobre el intervalo $[0, \pi/2]$, dividido en 1000 subintervalos iguales, estableciendo un valor de $\Delta\theta$ de 1 grado, muestreando 100 valores de a_α entre -100 y -1 . Los resultados se pueden ver en la gráfica (4.22). Fracción de luz colimada ($\Delta\theta = 1^\circ$)

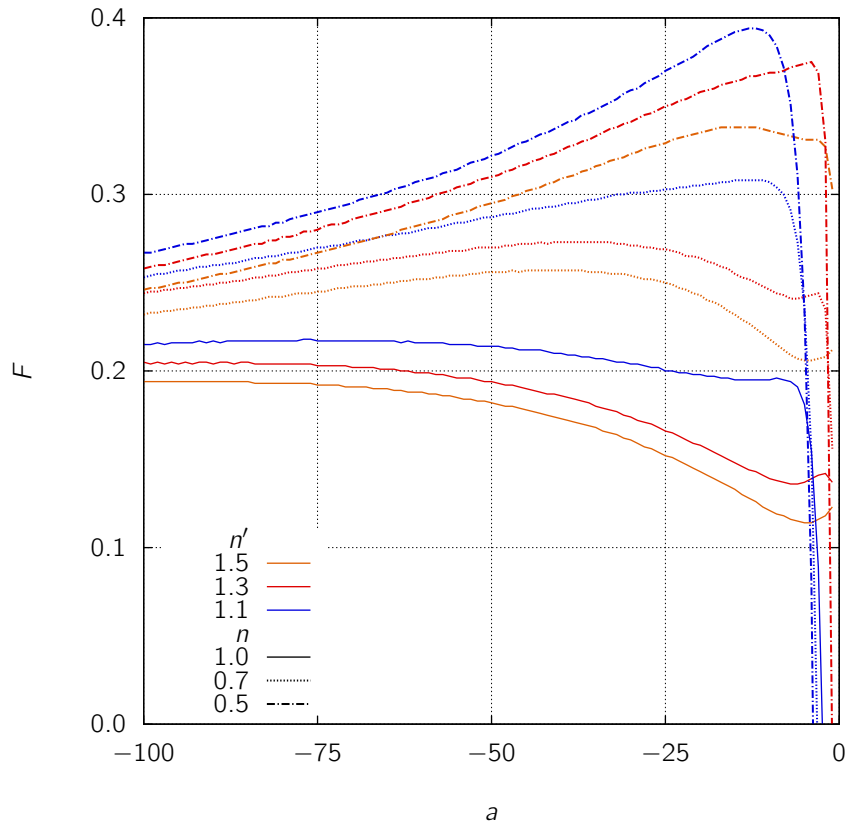


Figura 4.22: Resultados numéricos que muestran la fracción de luz colimada a 1 grado por el arreglo propuesto, como función de la anisotropía del medio, suponiendo que los tensores eléctrico y magnético son iguales (en otro caso, los valores son la mitad de lo mostrado). Se muestran para tres valores de n , cercanos a 1 (en diferentes estilos de línea) y tres de n' , también cercanos, pero mayores (en diferentes colores).

Como podemos observar, el comportamiento de F es complicado, pero logra valores relativamente grandes, aún para valores de a_α no tan lejanos a -1 . Es importante hacer notar que utilizamos valores de n y n' no muy lejanos de 1 para mostrar que, aún si no se tiene mucho control sobre las componentes paralelas de

los tensores (como podría ser en el metamaterial laminado), se pueden obtener resultados interesantes. Es destacable que para las curvas con $n < 1$ se observen máximos globales para valores no muy altos de a_α ; en particular podemos mencionar algunos detalles:

- Para $n = 1.0$ y $n' = 1.1$ hay un máximo local en $a_\alpha = -12.55$, con $F = 0.198$, y el máximo global menos negativo se alcanza en $a_\alpha = -65.20$, teniendo un valor de $F = 0.220$.
- Para $n = 0.7$ y $n' = 1.3$ F crece abruptamente desde cerca de 0 y alcanza muy rápidamente un máximo local en $a_\alpha = -6.00$ con una fracción colimada de 0.245. El mayor valor lo alcanza en $a_\alpha = -33.20$, dando $F = 0.276$, no muy lejano del valor anterior.
- Para $n = 0.5$ y $n' = 1.1$, el máximo global, $F = 0.397$ se alcanza muy rápidamente, en $a_\alpha = -13.9$. Además, hay una fracción colimada mayor al 39% desde -10.05 y hasta -15.90 . Este caso se puede visualizar en la figura (4.27).

El ángulo de salida en este caso es suficiente para que los rayos más alejados se separen 1cm al recorrer una distancia de 57.3cm . También podemos observar, en comparación, los mismos resultados si se requiere una precisión de medio grado, en la gráfica (4.23), en cuyo caso tendríamos una desviación máxima de 1cm tras 1.14m . Como podemos observar, la fracción de luz colimada no disminuye drásticamente.

Por supuesto, hace falta tomar en cuenta la presencia de disipación, pero estos resultados muestran los valores de F a los que se puede aspirar trabajando en regiones en donde la primera es baja. Además, el arreglo planteado tiene la ventaja de que, en el límite en el que estamos trabajando, el primer dispositivo es muy delgado, disminuyendo así la posible atenuación. Veamos por último algunos diagramas de rayos de algunos casos particulares. Los rayos que se coliman dentro de la precisión de 1° se muestran en verde, mientras que los que salen de este rango están en amarillo. Se muestran 60 rayos, distribuidos uniformemente en ángulo, y con los de menor ángulo de incidencia colocados más al centro del arreglo (para fines de visualización únicamente). Los rayos están dibujados con la intensidad correspondiente.

No está de más mencionar que, un colimador usual de luz difusa, sólo selecciona

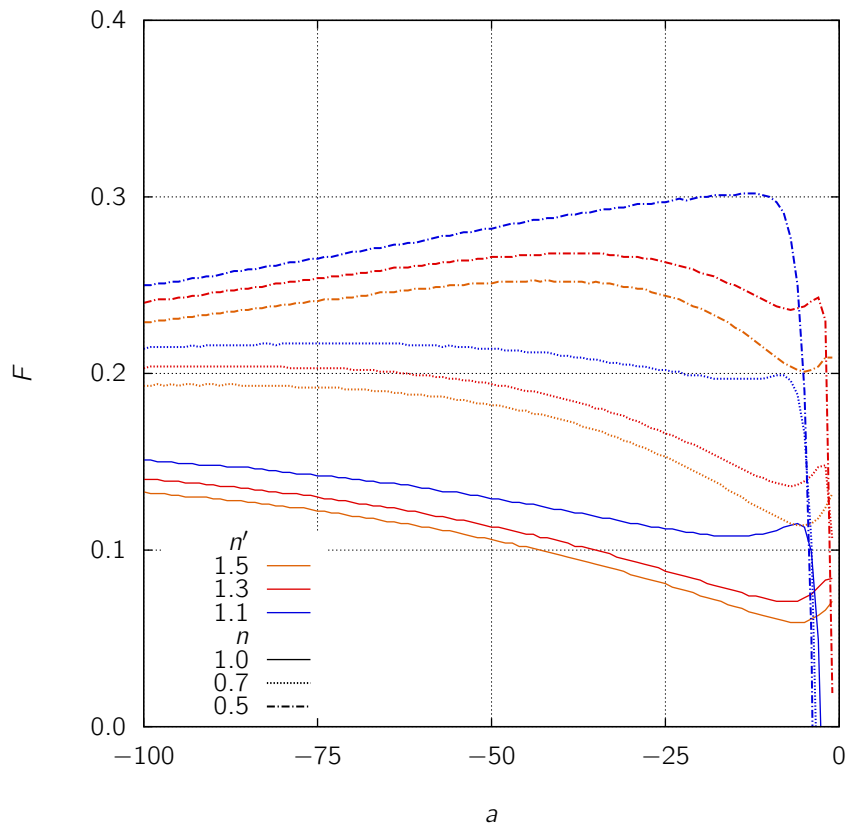


Figura 4.23: Fracción de la luz colimada para los mismos valores de n y n' de la gráfica (4.22) cuando la precisión deseada es de 0.5° .

los rayos dentro de un cierto rango angular, de modo que, la cantidad total de luz colimada por ellos es de la precisión deseada (en grados) entre 90. Esto hace que los colimadores tengan eficiencias muy pobres, del orden de 1% ó menos [18]⁵.

⁵También existen colimadores ópticos, aunque su principio es colimar la luz proveniente de fuentes puntuales.

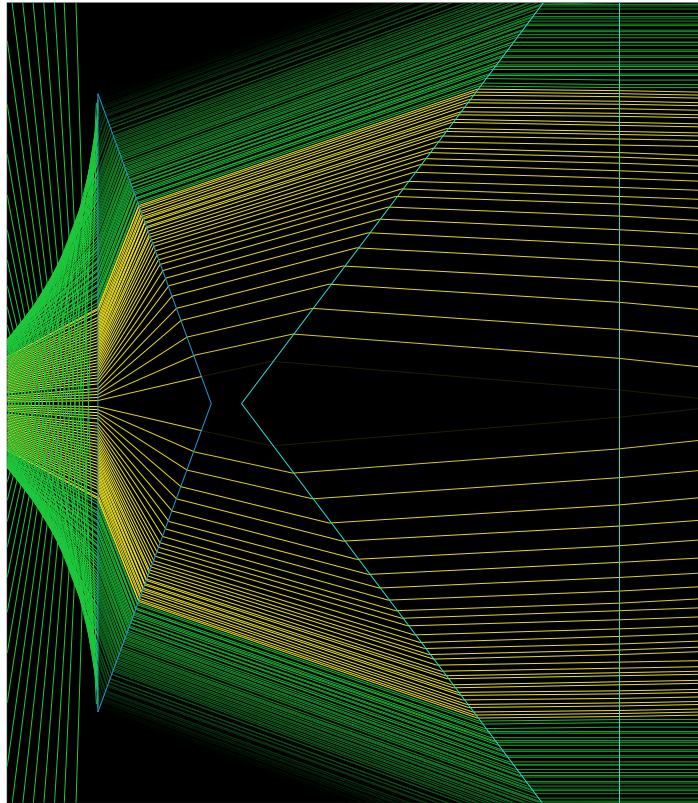


Figura 4.24: Diagrama de rayos del colimador para $a_\alpha = -7$, $n = 0.5$, $n' = 1.4$.
Se obtiene $F \approx 0.36$.

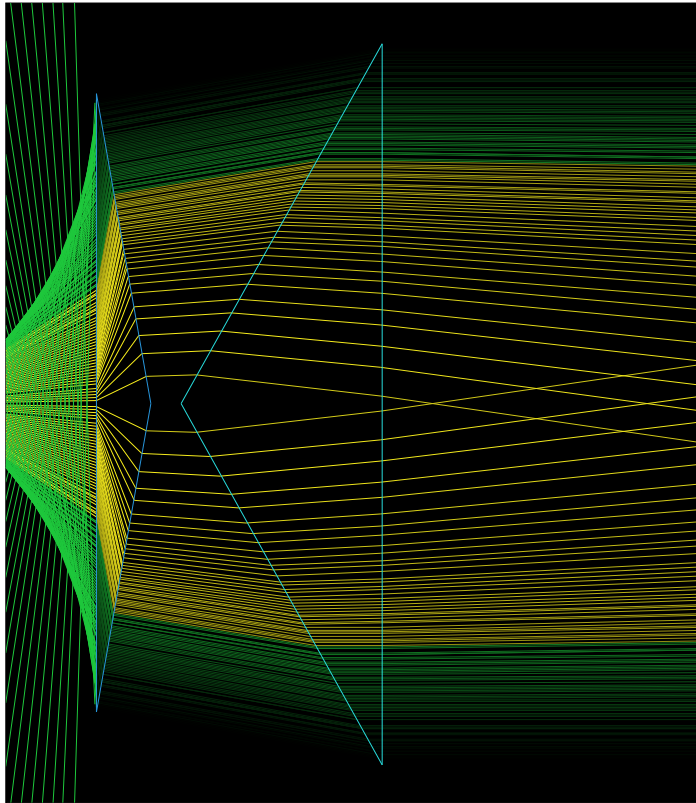


Figura 4.25: Diagrama de rayos del colimador para $a_\alpha = -30$, $n = 1.0$, $n' = 1.3$.
Se obtiene $F \approx 0.17$.

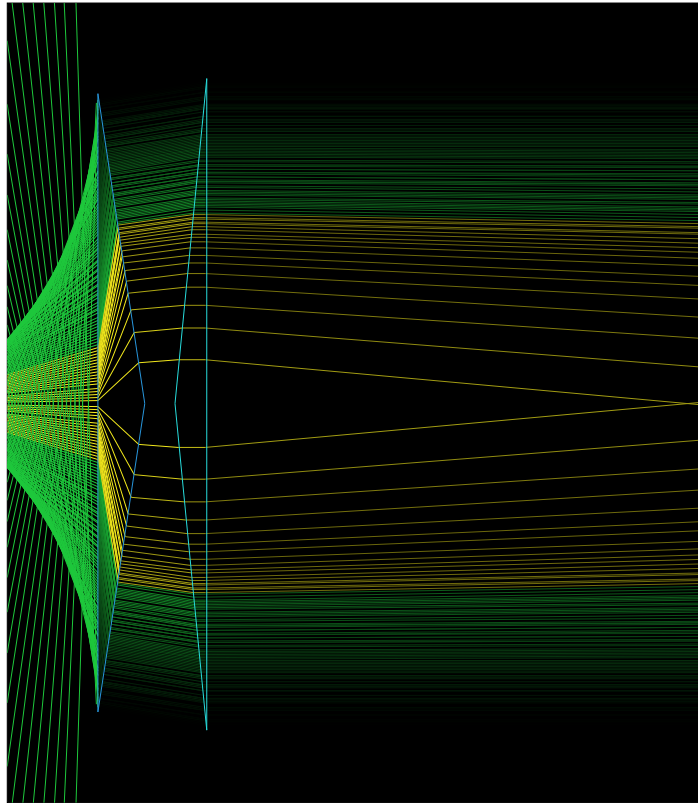


Figura 4.26: Diagrama de rayos del colimador para $a_\alpha = -41$, $n = 0.7$, $n' = 2.5$. Se obtiene $F \approx 0.19$.

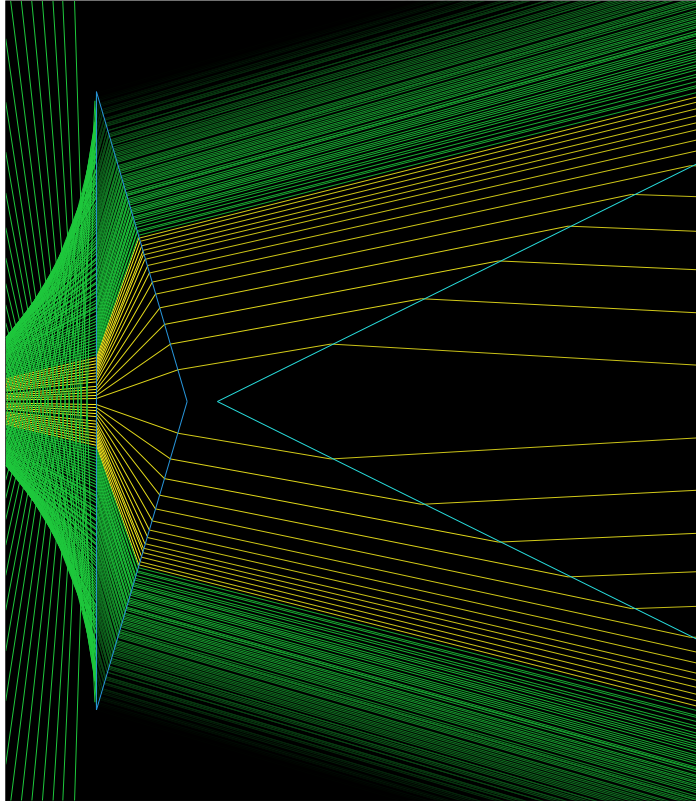


Figura 4.27: Diagrama de rayos del colimador para $a_\alpha = -11$, $n = 0.5$, $n' = 1.1$. Se obtiene $F \approx 0.39$. También podemos ver este caso, más alejados del colimador, en la figura (4.28), lo que nos da una idea de cómo entra la luz difusa y cómo se ven los rayos refractados tras una mayor distancia.

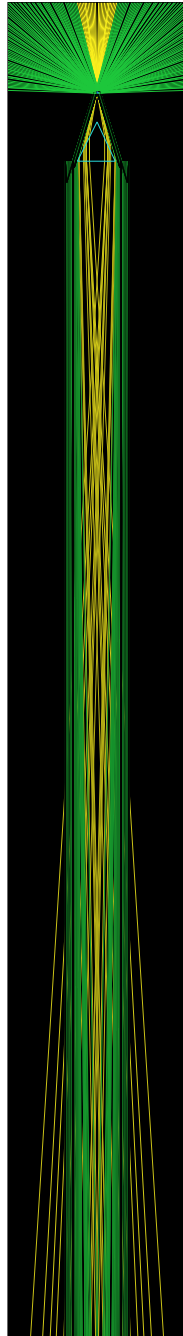


Figura 4.28: Vista lejana del caso (4.27) (rotada 90 grados, el colimador está arriba y desde ahí incide luz difusa sobre éste).

·5· Resumen y conclusiones

En este trabajo se analizaron las propiedades ópticas de un material anisotrópico uniaxial no disipador, caracterizado por componentes paralelas y ortogonales de los tensores $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$ y $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$, para valores arbitrarios de éstas. Se mostró que existen dos modos fundamentales en el material que se comportan simétricamente con respecto a los cambios de \vec{E} por $-\vec{H}$ y $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$ por $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$, y que como consecuencia de la no ortogonalidad de los campos \vec{E} y \vec{H} con el vector de onda, el vector de Poynting en general no coincide con la dirección de éste, sino que es paralelo a

$$\vec{k} + (a - 1)k_x \hat{e}_x \quad (5.146)$$

siendo a_α el cociente de las componentes paralela y ortogonal del tensor eléctrico o magnético.

Posteriormente se dedujeron las propiedades de refracción de dicho material cuando su eje óptico es la normal a la interfaz con un medio isotrópico usual. Se calcularon los ángulos formados por cada vector de onda con la normal, manteniendo la forma usual de la Ley de Snell

$$\text{sen}(\theta_1) = N(\Theta_1) \text{sen}(\Theta_\alpha) \quad (5.147)$$

pero con un índice de refracción funcional, dependiente de las propiedades del medio y el ángulo de incidencia, mostrando que en general existe un ángulo crítico que, a diferencia del caso usual, no requiere un índice de refracción relativo menor a uno, y puede presentar refracción aún en el caso de índice de refracción imaginario.

Para cada caso de polarización se calcularon los ángulos de refracción, los formados por el vector de Poynting y la normal, obteniendo nuevamente la propiedad de simetría con respecto al intercambio mencionado arriba. Se postularon las condiciones generales para la existencia de refracción negativa, y se mostró que en este

material corresponden, para cada modo, a una componente ortogonal negativa del tensor respectivo. Esto representa una diferencia muy importante con respecto al caso isotrópico, en el que hay un compromiso entre los signos de las propiedades del material. También se mostró que la condición que en aquellos materiales era equivalente a la de tener refracción negativa

$$\vec{S} \cdot \vec{k} < 0 \quad (5.148)$$

no tiene ninguna conexión con la misma propiedad en los materiales anisotrópicos, y que estos materiales, en general, no son ni izquierdos ni derechos, y, sin embargo, pueden presentar este tipo de refracción.

También se analizaron las propiedades de reflexión y transmisión de la luz. Se encontró que se preserva el hecho de reflexión total a partir del ángulo crítico y se establecieron las condiciones de cambio de fase. Se mostró que en ambas polarizaciones siempre se puede encontrar un ángulo de Brewster para valores establecidos de alguno de los tensores $\vec{\epsilon}$ y $\vec{\mu}$, y se mostró que hay valores de las propiedades del material que hacen que el coeficiente de reflexión sean independientes del ángulo de incidencia, y que en particular se puede hacer que los coeficientes en ambas polarizaciones sean cero, dando lugar a un material antirreflejante.

Se evidenció también que, en el caso de polarización mixta, el vector de Poynting no es aditivo, a diferencia del caso isotrópico, y que esto da lugar a un patrón de interferencia que varía en la dirección del eje óptico.

Asimismo, se analizó un metamaterial laminado, formado por capas de un dieléctrico y un metal de Drude, que en el límite de la teoría del medio efectivo es un material anisotrópico uniaxial. Se mostró que, siendo este un metamaterial sin actividad magnética, puede presentar refracción negativa, y se encontraron los rangos de frecuencia en donde esto puede suceder. También se mostró que existen rangos de frecuencia en los cuales el metamaterial posee los comportamientos de ángulo de refracción constante como función del de incidencia. Sin buscar incluir los detalles más realistas, este ejemplo intenta mostrar de una manera sencilla, que es posible construir materiales anisotrópicos en los cuales aplicar el estudio realizado.

Finalmente, se aprovecharon los resultados calculados para proponer la construcción de un arreglo óptico que tiene el efecto de colimar luz difusa en altas proporciones, y con una geometría sumamente sencilla.

Bibliografía

- [1] K. R. Ramanathan et al. Optical anisotropy of inorganic gaseous compounds. *Philosophical Magazine*, 1:491–496, 1926.
- [2] John Lekner. Reflection and refraction by uniaxial crystals. *J. Phys.: Condens. Matter*, 3:6121–6133, 1991.
- [3] V. G. Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Soviet Physics Uspekhi*, 10, 1968.
- [4] J. B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, and W.J. Stewart. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*, 47(11), 1999.
- [5] Nader Engheta and Richard W. Ziolkowski. *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations*. Wiley & Sons, 2006.
- [6] Saïd Zouhdi, Ari Sihvola, and Alexei P. Vinogradov. *Metamaterials and Plasmonics: Fundamentals, Modelling, Applications*. Springer-Verlag, 2008.
- [7] David R. Smith. *What are Electromagnetic Metamaterials?* http://people.ee.duke.edu/~drsmith/about_metamaterials.html, 2009.
- [8] L.D. Landau and E.M Lifshitz. *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon Press, 1984.
- [9] D.R. Smith and D. Schurig. Electromagnetic wave propagation in media with indefinite permittivity and permeability tensors. *Physical Review Letters*, 90(077405), 2003.
- [10] Liangbin Hu and S. T. Chui. Characteristics of electromagnetic wave propagation in uniaxially anisotropic left-handed materials. *Physical Review Letters*, 66(085108), 2002.
- [11] Robyn Wangberg Justin Elser and, Viktor A. Podolskiy, and Evgenii E. Narimanov. Nanowire metamaterials with extreme optical anisotropy. *Applied Physics Letters*, 89(261102), 2006.
- [12] Ulf Leonhardt and Thomas G Philbin. General relativity in electrical engineering. *New Journal of Physics*, 8, 2006.
- [13] M. Brédov, V. Rumiántsev, and I. Toptiguin. *Electrodinámica clásica*. Editorial Mir, 1986.
- [14] J. David Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1999.
- [15] M. Born and E. Wolf. *Principles of optics*. Pergamon Press, 1985.
- [16] Carlos Prieto López. *Disipación y transporte de energía en materiales con refracción negativa*. (Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM), 2009.

- [17] Martin Klein Kreisler. *Propiedades electromagnéticas de heteroestructuras laminadas*. (Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM), 1987.
- [18] James A. Sorenson and Michael E. Phelps. *Physics in nuclear medicine*. W.B. Saunders Company, 2003.