



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

# Óptica de Transformación y Metamateriales

T E S I S

*Para obtener el título de*

FÍSICO

*Presenta:*

Ezequiel Murillo Cortés

*Tutor:*

Dr. Rubén Gerardo Barrera Pérez

2012





# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Luz y Materia</b>	<b>7</b>
1.1. La naturaleza electromagnética de la luz . . . . .	7
1.2. Medios materiales . . . . .	9
1.2.1. Polarización y magnetización . . . . .	10
1.2.2. Respuesta lineal . . . . .	14
1.2.3. Disipación de energía . . . . .	17
<b>2. Rayos de luz</b>	<b>21</b>
2.1. Óptica geométrica . . . . .	21
2.1.1. La onda cuasi-plana . . . . .	22
2.1.2. La ecuación eikonal . . . . .	23
2.1.3. Rayos en la teoría electromagnética . . . . .	26
2.1.4. El Principio de Fermat . . . . .	31
2.2. El Hamiltoniano óptico . . . . .	34
2.2.1. Reparametrización del Hamiltoniano óptico . . . . .	37
2.2.2. El Hamiltoniano en coordenadas cilíndricas . . . . .	39
2.3. Doblando luz: Espejismos . . . . .	40
<b>3. Medios anisotrópicos</b>	<b>49</b>
3.1. Propiedades materiales tensoriales . . . . .	51
3.2. La relación de dispersión anisotrópica . . . . .	53
3.3. El caso no-magnético ( $\mu = 1$ ) . . . . .	57
3.4. El caso $\bar{\epsilon} = \bar{\mu}$ . . . . .	58
<b>4. Coordenadas y Transformaciones</b>	<b>63</b>
4.1. Coordenadas Generalizadas . . . . .	64

4.1.1.	La base . . . . .	64
4.1.2.	La base dual . . . . .	67
4.1.3.	La métrica . . . . .	70
4.2.	Transformación de Coordenadas . . . . .	72
4.2.1.	Transformando la base . . . . .	74
4.2.2.	Transformando componentes de vectores . . . . .	74
4.2.3.	Transformando la métrica . . . . .	75
4.3.	Operadores Diferenciales en Coordenadas Generalizadas . . . . .	76
4.3.1.	La derivada covariante . . . . .	77
4.3.2.	La divergencia . . . . .	78
4.3.3.	El rotacional . . . . .	79
4.3.4.	Transformando Operadores Diferenciales . . . . .	80
4.4.	Geodésicas . . . . .	81
<b>5.</b>	<b>Óptica de transformación</b>	<b>85</b>
5.1.	Ecuaciones de Maxwell en coordenadas generalizadas . . . . .	85
5.2.	Interpretación material de la métrica . . . . .	86
5.3.	Medios y Transformaciones . . . . .	90
5.3.1.	Transformación desde espacio EM Cartesiano . . . . .	90
5.3.2.	Transformación desde espacio EM general . . . . .	93
5.4.	Rayos como geodésicas . . . . .	96
5.4.1.	El Hamiltoniano óptico anisotrópico . . . . .	96
5.4.2.	Transformando rayos de luz . . . . .	99
<b>6.</b>	<b>Medios transformadores</b>	<b>103</b>
6.1.	Compresión/Dilatación del eje óptico . . . . .	103
6.1.1.	Condiciones de frontera . . . . .	107
6.1.2.	Dirección de campos y rayos . . . . .	108
6.1.3.	Transferencia de energía . . . . .	113
6.1.4.	Impedancia del medio . . . . .	114
6.2.	Índice negativo como transformación . . . . .	116
6.3.	Capa cilíndrica de invisibilidad . . . . .	120
6.3.1.	Propiedades materiales . . . . .	121
6.3.2.	Simulación numérica en COMSOL . . . . .	125
6.3.3.	Trazado de rayos . . . . .	127
6.3.4.	Propiedades materiales reducidas . . . . .	131

<b>7. Análisis riguroso de invisibilidad y condiciones de frontera para propiedades materiales degeneradas</b>	<b>135</b>
<b>8. Metamateriales</b>	<b>141</b>
8.1. Medios Efectivos . . . . .	142
8.2. Respuesta eléctrica . . . . .	147
8.2.1. Arreglo de tubos metálicos . . . . .	151
8.3. Respuesta magnética . . . . .	153
8.3.1. Resonador de anillo cortado (SRR) . . . . .	154
8.4. Capa de invisibilidad . . . . .	157
<b>Conclusiones</b>	<b>161</b>
<b>Apéndices</b>	<b>163</b>
A.1. Curvas Paramétricas . . . . .	163
A.2. Ecuación de Euler-Lagrange . . . . .	164
A.3. Transformada de Legendre y Lagrangiano degenerado . . . . .	166
A.4. Algunas identidades del tensor métrico . . . . .	170
<b>Bibliografía</b>	<b>172</b>

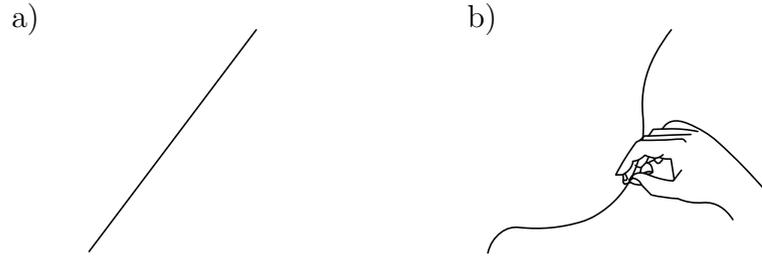


# Introducción

La Óptica de Transformación es una nueva herramienta para controlar y manipular la luz. En ella, convergen principalmente: la óptica, la geometría y la ingeniería de materiales. La intención de esta tesis es presentar de un modo simple, pero detallado, las ideas esenciales detrás de esta teoría y sus posibles aplicaciones utilizando metamateriales.

Sin duda, la idea más importante detrás de la óptica de transformación es que *los medios materiales establecen una geometría para la propagación de la luz*. Esto quiere decir que, cuando la luz atraviesa un material, la “distancia óptica” que recorre está determinada por las propiedades del material. Esta idea no es de ningún modo nueva; el matrimonio entre la óptica y la geometría, de hecho, se remonta a los orígenes mismos de la ciencia como la conocemos. La óptica de transformación, sin embargo, lleva este matrimonio un paso adelante, y abre *la posibilidad de diseñar materiales novedosos a partir de transformaciones geométricas*. No hay duda de que esta posibilidad podría tener un enorme impacto tecnológico en el futuro, y, por esta razón, la óptica de transformación ha generado rápidamente gran interés dentro y fuera de la comunidad científica.

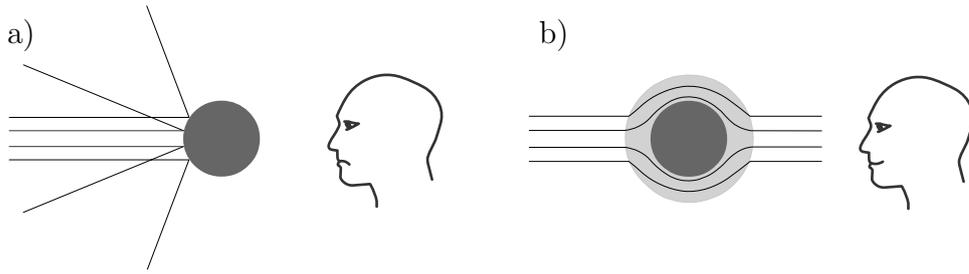
Para entender un poco más las ideas detrás de la óptica de transformación, regresemos a la conexión entre óptica y geometría. Quizá el hecho geométrico más básico acerca de la luz es que, normalmente, viaja en línea recta. Esto se corresponde con la idea intuitiva de *rayo de luz*, y simplemente dice que, bajo circunstancias comunes y corrientes, la luz mantiene una misma dirección de propagación. En general, sin embargo, la dirección de propagación de la luz se ve afectada cuando atraviesa un material, y esto da origen a muchos efectos e ilusiones ópticas. El modo más simple en que los rayos de luz cambian de dirección es cuando pasan de un material a otro. Este fenómeno se conoce como *refracción*, y se puede observar fácilmente, por ejemplo, al poner un lápiz dentro de un vaso con agua. El fenómeno de la



**Figura 1:** a) La luz viaja normalmente en línea recta. b) Transformar una línea recta es como cambiarle la forme a un pedazo de hilo.

refracción se hace evidente al notar que la parte sumergida del lápiz parece quebrarse. Esto se debe a que la luz que sale de la parte sumergida del lápiz, al tener que pasar por el agua, el vidrio y el aire, cambia de dirección antes de llegar a los ojos. Que tanto cambia la dirección de los rayos depende de las propiedades específicas de los materiales. Para medios materiales simples, las propiedades ópticas se pueden resumir en un sólo número que se denota como  $n$ , y se conoce como el *índice de refracción*. Esta cantidad determina justamente como son las distancias ópticas dentro del material, y es en este sentido que las propiedades del medio —dadas por el índice de refracción— establecen una geometría dentro del material.

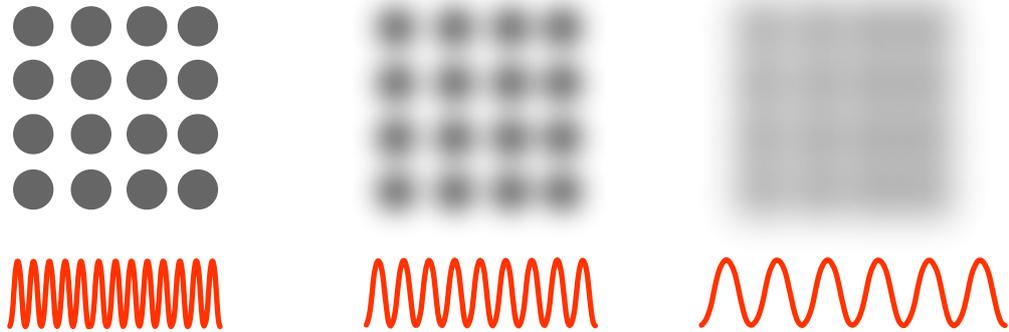
Para entender los detalles de la óptica de transformación, sin embargo, se necesita una descripción mucho más general de la que ofrece el índice de refracción. Primero, debemos reconocer que la luz es una onda electromagnética y, por tanto, cualquier descripción general debe partir de las leyes fundamentales del electromagnetismo. Estas leyes fundamentales se resumen en un grupo de cuatro ecuaciones conocidas como las ecuaciones de Maxwell (ver (1.1)). En el Capítulo 5, mostraremos explícitamente como el sistema de coordenadas que usemos en estas ecuaciones se puede interpretar como un medio material. Como la estructura del sistema de coordenadas determina la geometría del espacio, concluiremos que, de un modo fundamental, los medios materiales son como geometrías para la propagación de la luz. La idea novedosa de la óptica de transformación es aprovechar este hecho y asociar directamente una transformación geométrica con un medio material, pensando primero en transformaciones entre sistemas coordenados y luego interpretando el sistema coordenado transformado como un medio material. Estos temas los trataremos en detalle y desde un punto de vista general, y haremos especial énfasis en como podemos entender estas ideas en términos de los



**Figura 2:** a) No podemos ver detrás de un objeto porque la luz rebota en la parte posterior del objeto. b) Si lo cubrimos con un material que guíe la luz alrededor del objeto, éste se vuelve invisible.

rayos de luz. Este caso, de hecho, es más fácil de visualizar. Ya mencionamos que las trayectorias que sigue la luz al propagarse son normalmente líneas rectas. Transformar estas líneas rectas es simplemente cambiarles de forma, y lo podemos pensar como cambiarle la forma a un hilo o cuerda (Figura 1). Con esto, entonces, podemos diseñar un material, primero transformando los rayos de luz en la forma que queramos, y luego determinando las propiedades electromagnéticas que tendrían el mismo efecto sobre la propagación de la luz.

Sin duda, el ejemplo que más interés y entusiasmo ha generado es *la posibilidad teórica* de construir una capa de invisibilidad. Para entender este ejemplo, recordemos primero porque los objetos son visibles: cuando los rayos llegan al objeto desde una fuente de luz (como el sol o una lámpara), éstos “rebotan” en el objeto y llegan a los ojos, lo que permite que el cerebro construya la imagen del objeto. Este mismo “rebotar” de la luz es el que impide que veamos detrás de la mayoría de los objetos, ya que la luz que rebota en la parte posterior del objeto no llega al observador (Figura 2a). Con esto en mente, un modo de hacer un objeto invisible es cubrirlo con una capa que no rebote luz y que guíe los rayos de luz alrededor del objeto como se muestra en la Figura 2b. Como explicamos en el párrafo anterior, para diseñar un material que logre esta hazaña, sólo debemos encontrar una transformación de la estructura del espacio que haga que los rayos de luz tengan la forma que deseamos y, a partir de esta transformación, podemos simplemente calcular las propiedades materiales necesarias (estas propiedades se calculan en detalle en la Sección 6.3). A pesar de que la capa de invisibilidad es uno de los materiales más interesantes que se han diseñado usando la óptica de transformación, es importante recalcar que es sólo una de las muchas posi-



**Figura 3:** Que tantos detalles distingue una onda depende de su longitud de onda. Si la estructura es mucho más pequeña que la longitud de onda, el medio se puede aproximar como continuo.

bles aplicaciones de esta teoría. En el Capítulo 6 discutiremos otros ejemplos sencillos.

Como hemos visto, la óptica de transformación es una poderosa herramienta de diseño, pero, una vez que se obtienen las propiedades materiales de un medio transformador, surge un enorme problema: ningún material que se encuentre en la naturaleza tiene las propiedades que se necesitan. Esto parecería indicar que la óptica de transformación no es más que una curiosidad teórica y que cualquier aplicación práctica es imposible. Este problema, sin embargo, podría ser superado con el desarrollo de los metamateriales. La disciplina de los metamateriales precede apenas por unos años a la óptica de transformación, y ambas disciplinas han tenido un desarrollo conjunto. Los metamateriales son materiales fabricados artificialmente y, en principio, pueden ser estructurados para tener casi cualquier propiedad óptica que deseemos. Para que esto funcione, sin embargo, se necesita que la unidad de estructura sea mucho más chica que el tamaño de la onda (la longitud de onda) de modo que, al propagarse, la luz no distinga los detalles de la estructura y “vea” un medio continuo (Figura 3). En este caso, la estructura forma un medio efectivo que se puede describir como un material ordinario. A pesar de que esta nueva tecnología ha tenido un gran desarrollo, los metamateriales siguen enfrentando muchos retos y *probablemente pasen todavía muchos años antes de que podamos apreciar su verdadero impacto tecnológico*.

Aunque en el contexto de la relatividad especial, probablemente el primero

en darse cuenta de la relación entre la geometría (la métrica) y los medios materiales anisotrópicos fue Igor Y. Tamm\* en un artículo publicado en 1924 [1]. En 1960, la idea fue desarrollada explícitamente por Jerzy Plebanski\*\*, quien incluso la propuso como técnica para controlar rayos de luz a través de medios materiales [2]. El reciente interés, sin embargo, está ligado a los trabajos teóricos de Ulf Leonhardt y John B. Pendry\*\*\*, en la Universidad de St Andrews en Escocia y el Imperial College de Londres respectivamente. En 2006, estos autores publicaron independientemente —en la misma edición de la revista *Science*— los artículos donde mostraban explícitamente como la relación entre la geometría y las propiedades de los materiales podía ser usadas como herramienta para diseñar medios materiales novedosos [4][5]. En los años posteriores a estos artículos seminales, la óptica de transformación ha seguido arrojando nuevos resultados y es todavía un área de investigación en expansión [6][7][8][9][10][32][30][31].

La disciplina de los metamateriales empezó a desarrollarse en los años noventa, pero el interés en esta nueva tecnología se disparó en el año 2000, cuando un metamaterial con índice de refracción negativo —una propiedad óptica que no se encuentra en la naturaleza— fue propuesto y construido por un grupo encabezado por David R. Smith[11] en la Universidad de California en San Diego. Detrás de esta propuesta también estaba el propio Pendry cuyas contribuciones habían sido fundamental para establecer las bases teóricas detrás del diseño de metamateriales. Smith y Pendry, en colaboración con David Schuring, construyeron posteriormente (2006) la primera capa de invisibilidad para microondas [12], confirmando que, en principio, construir una capa de invisibilidad era posible. En la Sección 6.3 desarrollamos en detalle el diseño de este tipo de capas de invisibilidad. Estos primeros diseños, sin embargo, aunque perfectos, resultan extremadamente difíciles de construir (la capa construida en 2006 era solamente un prototipo aproximado). En 2008, J. Li y J.B. Pendry propusieron un medio más simple (isotrópico) que podría funcionar en circunstancias más restrictivas (para los detalles de este diseño ver [13]). En 2009, a partir de este diseño, se realizaron dos experimentos (en la Universidad Cornell y en la Universidad de California en Berkeley) en los

---

\*Premio Nobel de Física en 1958 por el co-descubrimiento de la radiación Cherenkov.

\*\*Personaje importante en el desarrollo de la ciencia en México, ya que trabajó casi 40 años en el Departamento de Física del CINVESTAV.

\*\*\*Otro precedente interesante se debe al mismo Pendry y a A.J. Ward quienes, en 1996, usaron esta idea para simplificar el uso de coordenadas en un método numérico para calcular campos electromagnéticos en la materia [3].

que se construyeron capas de invisibilidad para el infrarrojo-cercano [14][15], y, posteriormente (Berkeley, 2011), para luz visible [16]. A pesar de estos grandes avances, una capa de invisibilidad como las que se ven comúnmente en producciones hollywoodenses está probablemente todavía muy lejana. Como ya hemos dicho, tanto la óptica de transformación como los metamateriales son disciplinas nacientes que continúan desarrollándose.

Como mencionamos al principio de esta introducción, la intención de la tesis es exponer en detalle la teoría de la óptica de transformación. Con esta intención en mente, se buscó que la tesis fuera lo más autocontenida posible y esto se traduce en que gran parte de la tesis está dedicada a explicar los conceptos previos que se han considerado necesarios. En el Capítulo 1 expondremos la teoría básica de la interacción entre la luz y la materia, y partiendo de esta teoría básica daremos un sentido formal a los rayos de luz y a la óptica geométrica en el Capítulo 2. Los medios que asociaremos con transformaciones serán, en general, anisotrópicos (que dependen de la dirección de los rayos), por lo que discutiremos este tipo de materiales con cierto detalle en el Capítulo 3. Crucial para entender las particularidades de la óptica de transformación será discutir estructuras geométrica y transformaciones entre sistemas coordenados. Estos temas son parte de la geometría diferencial, y expondremos únicamente los conceptos más esenciales en el Capítulo 4. Todos estos temas serán importantes para entender los detalles de los Capítulos 5 y 6 en donde desarrollamos —finalmente— la teoría de la óptica de transformación y resolvemos algunos ejemplos. En el Capítulo 7, basándonos en [32][30][31], haremos un breve análisis del sentido riguroso de la invisibilidad y las condiciones de frontera que se deben considerar. Por último, en el Capítulos 8 expondremos brevemente las ideas más importantes detrás de los metamateriales.

# Capítulo 1

## Luz y Materia

### 1.1. La naturaleza electromagnética de la luz

Hace aproximadamente 150 años, James Clerk Maxwell escribió las ecuaciones con las que completó y sintetizó la teoría electromagnética clásica. En 1831, Micheal Faraday —quizá el primer hombre en “visualizar” los campos electromagnéticos— había descubierto que el cambio en el tiempo de un campo magnético generaba un campo eléctrico. Este descubrimiento permitió que Faraday diseñara el primer motor eléctrico. Inspirado en este fenómeno, Maxwell teorizó que, a su vez, el cambio en el tiempo de un campo eléctrico generaría un campo magnético. Al explorar las consecuencias de su teoría, Maxwell se dio cuenta que los campos electromagnéticos se podrían propagar como ondas por el espacio vacío\*. Cuando calculó la velocidad con la que se propagarían estas ondas, encontró que ésta coincidía exactamente con la velocidad de la luz. En 1864, en el mismo artículo donde publicó por primera vez las ecuaciones que llevan su nombre, escribió[17]:

“La concordancia de los resultados parece mostrar que la luz y el magnetismo son afectaciones de la misma substancia, y que la luz es una alteración electromagnética que se propaga [...] de acuerdo a las leyes del electromagnetismo.”

---

\*En realidad, Maxwell pensaba, como la mayoría de sus contemporáneos, que las ondas electromagnéticas eran una perturbación en el éter luminífero; un medio que podría establecerse como un sistema de referencia universal en reposo. La relatividad especial de Einstein implicó que dicho medio no era posible y que la propagación de la radiación electromagnética podía ser pensada en el vacío.

Unos veinte años después Heinrich Hertz probó experimentalmente la existencia de las ondas electromagnéticas predichas por la teoría de Maxwell, y la naturaleza electromagnética de la luz quedó establecida. Esto implicó que la óptica —una de las disciplinas más antiguas de la civilización humana— quedara unificada junto con los fenómenos eléctricos y magnéticos bajo una sola teoría. El descubrimiento de las ondas electromagnéticas mostró, además, que la luz corresponde sólo a una pequeña fracción del espectro de frecuencias de la radiación electromagnética. La comprensión de estos hechos trascendió rápidamente el ámbito científico y sus posteriores aplicaciones fueron pieza fundamental en el desarrollo sin precedentes de la tecnología y las comunicaciones en el siglo XX. Las ecuaciones de Maxwell representan las leyes fundamentales que gobiernan la dinámica espacio-temporal del campo\* eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y el campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  en términos de las “fuentes” de los campos: las cargas eléctricas  $\rho(\mathbf{r}, t)$  y las corrientes eléctricas  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ . Aunque aquí hemos escrito explícitamente que campos y fuentes son funciones de la posición  $\mathbf{r}$  y el tiempo  $t$ , esta dependencia será sobreentendida en muchos casos para simplificar las expresiones. En notación moderna, las ecuaciones que nos legó Maxwell se escriben en el Sistema Internacional de Unidades (SI) como[18]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Las constantes  $\varepsilon_0$  y  $\mu_0$  son conocidas como la permitividad eléctrica\*\* y la permeabilidad magnética\*\*\* del vacío, respectivamente. A partir de (1.1) se puede encontrar directamente una ecuación de onda para los campos, y son justamente estas constantes,  $\varepsilon_0$  y  $\mu_0$ , las que se combinan para determinar la velocidad de propagación de las ondas en el vacío; esto es, a partir de estas “constantes electromagnéticas” se puede determinar la velocidad de la luz en el vacío:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (1.2)$$

---

\*El campo eléctrico representa una fuerza por unidad de carga y el campo magnético determina una fuerza en términos de carga y velocidad. La fuerza total es:  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

\*\*  $\varepsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

\*\*\*  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

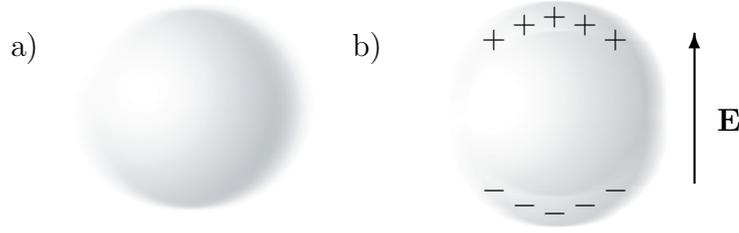
## 1.2. Medios materiales

Al pensar en nuestra experiencia cotidiana con la materia nos damos cuenta rápidamente que ésta, en su mayoría, es eléctricamente neutra. Este hecho es una consecuencia de la escala macroscópica en la que vivimos, ya que sabemos que los componentes de la materia, átomos y moléculas, tienen una cierta distribución de carga eléctrica. Esta carga eléctrica “escondida”, sin embargo, puede generar efectos macroscópicos que podemos observar y medir cuando la materia está expuesta a campos electromagnéticos externos.

Como una ilustración simple pensemos en un átomo neutro; éste tiene toda la carga positiva concentrada en el núcleo y alrededor una “nube” de electrones cargados negativamente. Como el átomo es neutro, las cargas positivas y negativas son idénticas en magnitud, y, en ausencia de un campo eléctrico externo, los campos eléctricos y magnéticos son nulos fuera del átomo debido a que la distribución de la carga eléctrica no posee momentos multipolares (las cargas se acomodan, para todo fin práctico, como dos esferas concéntricas de cargas opuestas (Fig. 1.1a)). Sin embargo, al “sentir” un campo eléctrico externo las cargas positivas se desplazarán en dirección del campo y las negativas contra éste, provocando que la distribución adquiera un momento dipolar, el cual tendrá asociado un campo eléctrico apreciable fuera del átomo (Fig. 1.1b). En un medio material, esta redistribución sucede en todos los átomos que lo componen, y es este comportamiento colectivo lo que genera efectos macroscópicos. En general, para un campo externo oscilante, el reacomodo de cargas está acompañado de corrientes inducidas en el material que dependen de la dirección, la magnitud y la frecuencia de oscilación del campo electromagnético externo.

Si el medio tiene electrones libres, es común diferenciar las corrientes asociadas a estos electrones (llamadas corrientes de conducción) de las corrientes asociadas a la redistribución de las cargas en los átomos (llamadas corrientes de polarización). En función de que efecto es dominante es común clasificar a los medios como *conductores* o *dieléctricos*, respectivamente. En esta tesis buscaremos tomar un punto de vista general y no haremos explícitamente esta distinción. La clasificación conductor-dieléctrico, de hecho, no siempre es de utilidad; si un material se comporta como dieléctrico o conductor depende, entre otras cosas, de la frecuencia de oscilación de los campos

También, es importante mencionar que los campos y fuentes que consideraremos en este capítulo son cantidades macroscópicas que surgen de promediar los campos y fuentes asociados a fuentes microscópicas. La descripción



**Figura 1.1:** Esquema de distribución de carga en un átomo neutro (a) sin campo externo; (b) el átomo se polariza en presencia de un campo externo.

de la materia en términos de cantidades macroscópicas (promediadas) no siempre es posible, y, en esta tesis, asumiremos siempre que estamos en circunstancias tales que la visión macroscópica es adecuada. En el Capítulo 7 estableceremos una conexión simple entre el mundo microscópico y el macroscópico.

### 1.2.1. Polarización y magnetización

El reacomodo de las cargas se puede expresar macroscópicamente como una nueva densidad de cargas y corrientes inducidas dentro del medio. Con esto en mente, distinguiremos entre dos tipos de fuentes, y escribiremos las fuentes totales en (1.1) como dos sumandos independientes:

$$\rho = \rho_{ind} + \rho_{ext} \qquad \mathbf{J} = \mathbf{J}_{ind} + \mathbf{J}_{ext} \qquad (1.3)$$

Con esta separación señalamos que los campos electromagnético están dados por dos tipos de fuentes: las *fuentes inducidas* ( $\rho_{ind}$ ,  $\mathbf{J}_{ind}$ ) tienen origen en la redistribución de cargas dentro del material debido a la presencia de los campos externos, y las *fuentes externas* ( $\rho_{ext}$ ,  $\mathbf{J}_{ext}$ ) son las cargas y corrientes que generan estos campos externos en primer lugar (las fuentes que permanecen incluso en ausencia del medio).

Un modo de aprovechar estas ideas es pensar que  $\rho_{ind}$  es la “fuente” de un nuevo campo  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  tal que:

$$\rho_{ind} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \qquad (1.4)$$

Podemos obtener una primera pista de como es este campo  $\mathbf{P}$  notando que, como las cargas inducidas son sólo un reacomodo en un material previamente

neutro, la integral de estas cargas sobre el volumen del material debe anularse. Por tanto, si  $\Omega$  es un volumen cualquiera que contenga por completo al medio, usando el teorema de la divergencia, tenemos:

$$\int_{\Omega} \rho_{ind} dV = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{P} dV = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (1.5)$$

donde  $\partial\Omega$  es la superficie del volumen  $\Omega$ . Esto implica que, fuera del material,  $\mathbf{P} = 0$ , ya que sólo de este modo la integral sobre cualquier  $\Omega$  se anulará. Notemos también que, como la integral de volumen de  $\rho_{ind}$  es cero, el campo eléctrico asociado a estas fuentes carece de momento monopolar.

Al decir que las fuentes externas e inducidas son independientes queremos decir que no se mezclan entre si. Esto implica que cada una debe cumplir con la ecuación de continuidad\* ( $\nabla \cdot \mathbf{J} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ) por separado. Aplicando ésta condición a las fuentes inducidas y usando (1.4), obtenemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{ind} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{P}) = \nabla \cdot \left( \mathbf{J}_{ind} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.6)$$

El término entre paréntesis tiene divergencia cero y por tanto se puede escribir como el rotacional de un nuevo campo que llamaremos  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ . Usando este hecho, podemos escribir la corriente inducida en términos de este nuevo campo:

$$\mathbf{J}_{ind} = \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (1.7)$$

Hasta ahora lo que hemos hecho es sustituir las fuentes inducidas por dos nuevos campos,  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$ , lo que parece simplemente trasladar el problema, e, incluso, complicarlo, ya que, en principio, estos campos no están definidos unívocamente\*\*. Sin embargo, debido a que es posible asignarles un sentido físico preciso, estos nuevos campos resultan de una gran utilidad.

El campo  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  es conocido como la *polarización del medio*, y representa un momento dipolar por unidad de volumen en cada punto del medio material. Por otro lado,  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  representa un momento dipolar magnético

---

\*Esta ecuación se puede obtener de (1.1) y expresa la conservación de la carga eléctrica de un modo matemáticamente idéntico a la conservación de la masa en un fluido.

\*\*Como  $\mathbf{P}$  está definido como una divergencia se le podría sumar el rotacional de una función arbitraria y seguiría representando las mismas cargas inducidas. También, debido a que  $\mathbf{M}$  está definido como un rotacional, si se le suma el gradiente de una función arbitraria sigue representando la misma corriente inducida.

por unidad de volumen, y es llamado la *magnetización del medio*. Esta interpretación física está basada en una comparación rigurosa de los campos asociados a  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$ , y los que tendrían distribuciones de dipolos eléctricos y magnéticos en cada punto del material. La interpretación, además, ayuda a definir únicamente a los campos y es válida para cualquier frecuencia [19]. Debemos comentar, sin embargo, que la interpretación se limita al contexto macroscópico, y no implica que los componentes del medio sean necesariamente dipolos físicos.

Introducir la polarización y la magnetización trae un beneficio adicional, ya que, a partir de estas cantidades, podremos definir campos auxiliares tal que las ecuaciones de Maxwell queden expresadas únicamente en términos de las fuentes externas. Al sustituir directamente (1.3) en (1.1), y usando (1.4) y (1.7), obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} &= \rho_{ext} - \nabla \cdot \mathbf{P} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{J}_{ext} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Si definimos los campos auxiliares:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (1.9)$$

podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell (1.1) como:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{ext} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J}_{ext}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Estas ecuaciones son llamadas comúnmente las ecuaciones de Maxwell en medios materiales. El campo  $\mathbf{D}$  es conocido como el *campo de desplazamiento eléctrico* y nos referiremos a  $\mathbf{H}$  simplemente como el *campo-H*. Estos campos auxiliares no tienen una interpretación física tan directa como  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$ ; y, en principio, solamente “esconden” los detalles de la polarización y la magnetización, y señalan que, dentro de un medio material, los campos electromagnéticos se ven afectados de algún modo. Su utilidad recae en que, una vez que establezcamos un modelo que nos diga como es la respuesta del

material (polarización y magnetización) en la presencia de campos externos, nos ayudarán a definir propiedades materiales con las que podremos describir y caracterizar de un modo relativamente simple a los materiales. En la siguiente sección estableceremos dicho modelo.

Para describir adecuadamente la radiación electromagnética a través de medios materiales es necesario dar cuenta de como es transportada la energía. En el vacío, la energía electromagnética es transportada en forma de fotones; al pasar por un medio material, los fotones son absorbidos y reemitidos por los componentes del medio, y, en este proceso, la radiación puede “ceder” energía al material. Esto se traduce en que, poco a poco, la energía de las ondas es absorbida por el medio. Qué tan “poco a poco” sucede este proceso es una propiedad que caracteriza a cada medio material.

Desde el punto de vista macroscópico —que es el que venimos desarrollando en esta tesis— este complejo proceso de transporte de energía puede ser descrito de un modo relativamente simple. A continuación desarrollaremos un primer concepto macroscópico importante. Primero, notemos que, dentro del medio, podemos tomar  $\rho_{ext}, \mathbf{J}_{ext} = 0$ . Con esto, directamente de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales (1.10), podemos obtener la expresión:

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.11)$$

Usando una identidad vectorial conocida\*\* y reacomodando términos, reescribiremos la ecuación anterior como:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.12)$$

A partir de esta expresión definimos:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.13)$$

Este vector es conocido como *el vector de Poynting* y representa la densidad de flujo de energía electromagnética [20]. El vector de Poynting nos dirá, entonces, en que dirección es transportada esta energía y cual es su magnitud por unidad de volumen.

---

\* Como obtendremos densidades de energía, esto es equivalente a que, al integrar en el espacio para obtener la energía, consideremos un volumen cuya superficie contenga sólo al medio y excluya a las fuentes externas.

\*\*  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

La ecuación (1.12) es conocida como *el teorema de Poynting*, y expresa el balance de las contribuciones energéticas asociadas a los campos electromagnéticos. Si suponemos que podemos despreciar la disipación de energía, la expresión general (1.12) se puede escribir como:

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.14)$$

donde la cantidad  $u(\mathbf{r}, t)$  representa la densidad de energía\*, y está dada en términos de los campos electromagnéticos y el cambio en el tiempo de los campos auxiliares (ver (1.12)). Podemos ver que (1.14) *no puede tomar en cuenta la disipación de energía* notando que establece precisamente la conservación de ésta, al expresar que el cambio total de energía se debe únicamente al transporte de energía electromagnética. Esto es una consecuencia de que, cuando los campos disipan energía en el material, la energía electromagnética no puede establecerse como una variable de estado termodinámico\*\*. En cualquier caso, el vector de Poynting siempre puede ser interpretado como el flujo de energía electromagnética [20].

### 1.2.2. Respuesta lineal

La idea crucial de la sección anterior es que, en presencia de campos electromagnéticos externos, la respuesta de un medio material puede ser descrita como una polarización y una magnetización del medio.

Cada material sostendrá una polarización y magnetización distinta dependiendo de su estructura interna y de las características de los campos externos mismos. Macroscópicamente, este proceso es modelado como un sistema impulso-respuesta donde los campos son los impulsos y la polarización y la magnetización son las respuestas resultantes. Si suponemos además que mantienen una *relación lineal*, la expresión impulso-respuesta toma la forma:

---

\* Como no hemos hecho la distinción dieléctrico-conductor, debemos mencionar que esta energía se compone tanto de energía electromagnética (asociada con los campos) como de energía mecánica (asociada a la conducción de electrones).

\*\* Para intervalos de frecuencia donde la absorción sea despreciable, es posible definir una energía electromagnética. [20, p.304]

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \quad (1.15)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_m(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{B}(\mathbf{r}, t') dt'$$

Las funciones  $\chi_e$  y  $\chi_m$  son llamadas la susceptibilidad eléctrica y magnética respectivamente. Estas funciones caracterizan el modo en el que cada medio material responde a campos externos. Como estas funciones dependen de la posición, en principio, distintos puntos del medio pueden responder de maneras distintas.

Matemáticamente, las susceptibilidades representan la respuesta que resulta a partir de un impulso unitario (un impulso delta)\*, por lo que las integrales en (1.15) nos dicen que la respuesta del medio es una superposición de impulsos “pesados” en cada tiempo  $t'$  por las funciones  $\chi_e$  y  $\chi_m$ . Esta operación es conocida como *convolución*. La dependencia  $t - t'$  nos asegura que el sistema responderá a un impulso en  $t' = t_0$  del mismo modo que lo haría para un impulso en  $t' = t_0 + \tau$ , sólo que, correspondientemente, un tiempo  $\tau$  después. Adicionalmente, esperamos que la susceptibilidad cumpla con que  $\chi(t - t') \rightarrow 0$  cuando  $t - t' \rightarrow \infty$ , ya que el efecto de un impulso debe disminuir conforme pasa el tiempo.

Físicamente, esta no-localidad en el tiempo tiene origen en que, cuando las frecuencias de los campos son comparables a las frecuencias atómicas o moleculares que causan la polarización y la magnetización en la materia, los componentes del material no logran estar en fase con los campos; esto es, no logran “seguirles el paso” a los campos y por tanto dependen del valor de los campos en tiempos anteriores. En este modelo hemos mantenido la localidad espacial, esto significa que la respuesta en un punto dado dentro del material sólo depende del valor del campo en el mismo punto.

Es importante notar que hemos integrado hasta infinito en (1.15) a pesar de que es claro que, para un tiempo dado  $t$ , la respuesta no puede depender de impulsos futuros. Esto lo corregimos pidiendo que:

$$\chi(\mathbf{r}, t - t') = 0 \quad \text{si } t' > t \quad (1.16)$$

---

\*Vemos esto de (1.15), notando que, para un impulso en un tiempo  $t' = t_0$  de la forma:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t') = \delta(t' - t_0) \hat{\mathbf{e}}$ , la respuesta resultante es:  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \chi_e(\mathbf{r}, t - t_0) \hat{\mathbf{e}}$ .

Este requerimiento es conocido como *causalidad* y nos asegurará que sólo impulsos anteriores a  $t$  afecten a la respuesta en el mismo tiempo  $t$ . Integrar hasta infinito nos dará la posibilidad de simplificar considerablemente la ecuación (1.15) al permitirnos escribirla como un producto en el espacio de frecuencias. Este hecho lo probaremos en detalle a continuación.

Empecemos con la polarización. Este campo, como función de la frecuencia, es la transformada de Fourier de  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  definida como:

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (1.17)$$

La transformada inversa correspondiente es:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.18)$$

Muchas veces, en vez de usar el sombrero  $\hat{\phantom{x}}$  para distinguir entre estas dos funciones, simplemente explicitaremos si nos referimos a la polarización como función de la frecuencia o como función del tiempo. Si sustituimos el modelo lineal (1.15) en la polarización (1.17), se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(\mathbf{r}, t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \right) e^{i\omega t} dt \quad (1.19) \\ &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(\mathbf{r}, t-t') e^{i\omega(t-t')} d(t-t') \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') e^{i\omega t'} dt' \\ &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') e^{i\omega t'} dt' \\ &= \varepsilon_0 \hat{\chi}_e(\mathbf{r}, \omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned}$$

donde  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$  y  $\hat{\chi}_e(\mathbf{r}, \omega)$  son el campo eléctrico y la susceptibilidad eléctrica como función de la frecuencia respectivamente. Estos campos están dados por las transformadas de Fourier:

$$\hat{\chi}_e(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(\mathbf{r}, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (1.20)$$

Si hubiéramos empezado con la transformada de Fourier  $\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \omega)$  de la magnetización  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ , usando el mismo procedimiento, llegaríamos a una expresión análoga para el campo  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega)$  y la respuesta magnética en el espacio de

frecuencias. Con esto podemos concluir que, como función de la frecuencia, la relación entre los campos y la respuesta del medio es una simple proporcionalidad dada por:

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \hat{\chi}_e \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\mu_0} \hat{\chi}_m \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.21)$$

Como la transformada de Fourier es un operador lineal, podemos obtener directamente los campos auxiliares en (1.9) como función de la frecuencia\*:

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 (1 + \hat{\chi}_e) \hat{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \hat{\mathbf{E}} \quad (1.22)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{\mu_0} (1 - \hat{\chi}_m) \hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{\mu_0} \hat{\mu}^{-1} \hat{\mathbf{B}}$$

donde hemos introducido las importantes cantidades:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) &= (1 + \hat{\chi}_e(\mathbf{r}, \omega)) \\ \hat{\mu}(\mathbf{r}, \omega) &= (1 - \hat{\chi}_m(\mathbf{r}, \omega))^{-1} \end{aligned} \quad (1.23)$$

$\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega)$  y  $\hat{\mu}(\mathbf{r}, \omega)$  son conocidas como la *permitividad eléctrica del medio* y la *permeabilidad magnética del medio* respectivamente\*\*. Estas cantidades son las que utilizaremos para caracterizar la respuesta de los materiales, y las llamaremos colectivamente *las propiedades del medio*. Cuando no haya ambigüedad de que hablamos de las funciones en el espacio de frecuencias, también las *escribiremos simplemente* como  $\varepsilon$  y  $\mu$ .

### 1.2.3. Disipación de energía

Notemos que la definición (1.17) implica que los campos, como función de la frecuencia, son cantidades complejas. Esto aplica también para las susceptibilidades  $\hat{\chi}$ , y, por tanto, se extiende para  $\varepsilon$  y  $\mu$ . Este hecho nos permite

---

\*En el caso magnético hemos ido *contra* la convención que define a la susceptibilidad magnética como:  $\hat{\mathbf{M}} = \hat{\chi}'_m \hat{\mathbf{H}}$ . Nuestra definición es equivalente a la convención en el sentido de que define la misma permeabilidad magnética:  $\hat{\mu} = (1 - \hat{\chi}_m)^{-1} = (1 + \hat{\chi}'_m)$ .

\*\*También es común definir  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 (1 + \hat{\chi}_e)$  y  $\hat{\mu} = \mu_0 (1 - \hat{\chi}_m)^{-1}$ . En cuyo caso las funciones que hemos definido en (1.23) son conocidas como la *permitividad relativa* y la *permeabilidad relativa* respectivamente.

escribir las propiedades materiales como la suma de una parte real y una parte imaginaria:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon' + i\varepsilon'' \\ \mu &= \mu' + i\mu''\end{aligned}\tag{1.24}$$

Ambas componentes poseen un significado físico preciso. Por el momento, mostraremos que las componentes imaginarias son las que describen la absorción de energía en el medio. Un poco informalmente, podemos notar de (1.22) que las partes imaginarias ( $\varepsilon''$  y  $\mu''$ ), aportarán una componente fuera de fase al campo de desplazamiento, ya que  $i = e^{i\pi/2}$ . Para simplificar la demostración, analizaremos únicamente el caso de una onda plana monocromática con frecuencia angular  $\omega$  y vector de onda  $\mathbf{k}$ , cuyo campo eléctrico está dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}\}\tag{1.25}$$

y  $\mathbf{E}_0$  no depende del tiempo. Aplicando la transformada de Fourier a esta cantidad, el campo eléctrico como función de la frecuencia resulta ser\*:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega') = \pi (\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \delta(\omega' - \omega) + \mathbf{E}_0^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \delta(\omega' + \omega))\tag{1.26}$$

Como en el espacio de frecuencias tenemos simplemente:  $\hat{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}}$ , usando la transformada inversa de Fourier (1.18), el campo de desplazamiento como función del tiempo debe ser:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega') \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left[ \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \varepsilon(\mathbf{r}, -\omega) \mathbf{E}_0^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \right]\end{aligned}\tag{1.27}$$

Se puede mostrar[21] que las funciones definidas a partir de transformadas de Fourier —como en la sección anterior—, cumplen con la propiedad:  $\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega)$ , con lo que podemos escribir (1.27) simplemente como:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}\}\tag{1.28}$$

---

\*Para obtener el resultado sólo hace falta recordar[21] que la transformada de Fourier de  $\cos(\omega t)$  está dada por:  $\pi(\delta(\omega' - \omega) + \delta(\omega' + \omega))$ .

Con esto, hemos encontrado que, en el caso monocromático, el campo de desplazamiento  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  es simplemente la parte real del campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  por la permitividad evaluada en  $\omega$ .

Podemos usar estos campos para calcular la energía que absorbe el medio recordando que el transporte de energía está dada por (1.12). Esta cantidad, sin embargo, depende del tiempo por lo que, para medir la energía, debemos establecer un periodo de medición:  $T \gg 2\pi/\omega$ , en el que consideremos el promedio temporal\* de (1.12):

$$-\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rangle + \langle \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rangle \quad (1.29)$$

Esta cantidad representa, entonces, el valor promedio del calor absorbido por el medio (por unidad de tiempo y por unidad de volumen) durante el periodo de medición[20]. Si sustituimos los campos (1.25) y (1.28) en el primer sumando de (1.29), (recordando:  $\text{Re}\{z\} = (z + z^*)/2$ ) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{1}{4}(\mathbf{E}_0 e^{i\phi} + \mathbf{E}_0^* e^{-i\phi}) \cdot (-i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}_0 e^{i\phi} + i\omega \varepsilon_0 \varepsilon^* \mathbf{E}_0^* e^{-i\phi}) \quad (1.30) \\ &= \frac{i\omega \varepsilon_0}{4}((\varepsilon^* - \varepsilon) \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* + \varepsilon^* \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E}_0 e^{-2i\phi} - \varepsilon \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 e^{2i\phi}), \end{aligned}$$

donde  $\phi = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$  es la fase de la onda monocromática. Al tomar el promedio temporal, los términos con  $e^{\pm 2i\phi}$  desaparecen, ya que el promedio de  $e^{\pm 2i\omega t}$  se anula (cuando  $T \gg 2\pi/\omega$ ). Con esto y  $\text{Im}\{z\} = i(z^* - z)/2$ , obtenemos:

$$\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rangle = \frac{i\omega \varepsilon_0}{4}((\varepsilon^* - \varepsilon) \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) = \frac{\omega}{2} \varepsilon_0 \varepsilon'' E_0^2 \quad (1.31)$$

Para el segundo sumando de (1.29) notemos que, para el caso monocromático, el campo- $H$  tiene la forma:  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{H}_0 e^{i\phi}\}$ . Esta expresión se corresponde exactamente con (1.25), por lo que, al repetir el procedimiento anterior, escribiendo  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mu_0 \mu(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}_0 e^{i\phi}\}$  y sustituyendo los términos correspondientes, obtenemos:

$$\langle \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rangle = \frac{\omega}{2} \mu_0 \mu'' H_0^2 \quad (1.32)$$

---

\*El promedio temporal está definido como:  $\langle A \rangle = (\int_0^T A(t) dt)/T$ .

Juntando las dos contribuciones, la absorción sistemática de energía (1.29) queda expresada como:

$$-\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle = \frac{\omega}{2} (\varepsilon_0 \varepsilon'' E_0^2 + \mu_0 \mu'' H_0^2) \quad (1.33)$$

Inmediatamente podemos ver que  $\varepsilon''$  y  $\mu''$  determinan por completo la manera en la que la energía es disipada en el medio. Si en ausencia del campo externo el material estaba en equilibrio termodinámico, la expresión anterior implica:  $\varepsilon'', \mu'' > 0$ , ya que el calor “cedido” al medio debe ser positivo[20]. Como consecuencia de (1.33), notemos que tendremos un *material perfectamente no-absorbente* sólo si se cumple la condición:

$$\varepsilon'' = 0 \qquad \mu'' = 0, \quad (1.34)$$

esto es, sólo si las propiedades materiales son cantidades reales. Un material con esta característica, sin embargo, es necesariamente un material idealizado, ya que los medios materiales verdaderos siempre presentan pérdidas de energía. Esto es una consecuencia de que cualquier proceso real es, en mayor o menor grado, termodinámicamente irreversible. Desde un punto de vista formal esto se expresa en que, si las partes imaginarias de  $\varepsilon$  y  $\mu$  son exactamente cero, las correspondientes partes reales también se anulan. Este hecho se deriva de que las partes reales e imaginarias cumplen con las llamadas relaciones de Kramers-Kronig[19]; estas nos dicen que, rigurosamente, la condición (1.34) nunca se cumple. Sin embargo nada de esto excluye la posibilidad de que las pérdidas energéticas sean muy pequeñas y que tenga “sentido” suponer, en algunos casos, que la condición (1.34) sea aproximadamente cierta. Los intervalos de frecuencias donde es posible suponer esto son conocidos como *regiones de transparencia*[20]. En la mayor parte de esta tesis discutiremos materiales para los que asumiremos propiedades materiales reales, y es importante no perder de vista que la aplicabilidad de los resultados dependerá fuertemente de que, en verdad, podamos despreciar la absorción de energía.

# Capítulo 2

## Rayos de luz

### 2.1. Óptica geométrica

Visualizar la luz como líneas o rayos ha sido, desde tiempos antiguos, una de las ideas más exitosas y fundamentales de la óptica; ha servido para resolver importantes problemas prácticos a través de la historia y ha inspirado el desarrollo de la física en general. Hemos visto, sin embargo, que, desde un punto de vista más fundamental, la luz es un fenómeno electromagnético. La visión electromagnética es más fundamental, en parte, porque puede tomar la teoría de los rayos y revelarla como un caso particular.

Este caso es conocido como *óptica geométrica* y, en general, describe a la luz como trayectorias (posiblemente curvas) que llamaremos simplemente: *rayos de luz*. Desde la teoría electromagnética, esta descripción es posible cuando las cantidades relevantes (propiedades materiales y magnitud de los campos) se distribuyen en el espacio tal que, para un tiempo dado, podamos considerarlas localmente como constantes desde “el punto de vista” de la onda. En otras palabras, el tamaño de la longitud de onda ( $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ ) debe ser despreciable en comparación con los cambios espaciales de las cantidades relevantes. En la óptica geométrica, por tanto, *al comparar*  $\lambda_0$  con otras cantidades, tomaremos el límite\*:

$$\lambda_0 \rightarrow 0 \tag{2.1}$$

Para la luz visible las longitudes de onda son del orden de  $10^{-7}m$  por lo que,

---

\*Este límite nos provee de una expresión simple pero es un poco informal. Equivalentemente se pide:  $\lambda_0 \ll A/|\nabla A|$ , donde  $A$  es alguna cantidad relevante para el problema.

si los cambios en las cantidades relevantes son de orden macroscópico, podemos aplicar con confianza la óptica geométrica. Es importante, sin embargo, siempre estar conscientes de esta aproximación ya que, en la medida en la que no se cumpla, será imposible despreciar los efectos ondulatorios.

### 2.1.1. La onda cuasi-plana

Quizá la consecuencia más relevante de (2.1) es que la propagación de la radiación puede ser descrita, localmente, como la de una onda plana. Tal y como fue escrita en (1.25), una onda plana monocromática está caracterizada por la fase:  $\phi = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ . La onda se llama “plana” porque se puede visualizar como planos de fase constante desplazándose por el espacio en dirección de  $\mathbf{k}$  (Fig. 2.1a). Esta visualización es una consecuencia directa de  $\phi$ ; por ejemplo: en  $t = 0$  la ecuación  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = 0$  define un plano donde todo punto tiene fase:  $\phi = 0$ ; un tiempo  $t = t_1$  después, el plano donde  $\phi = 0$  cumple ahora con  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega t_1$ , este plano tiene la misma orientación que el anterior, pero está desplazado una distancia  $\omega t_1/|\mathbf{k}|$  en dirección del vector de onda. Esto indica, además, que el plano se desplazó con la velocidad de fase:  $v = \omega/|\mathbf{k}|$ . Un argumento idéntico sirve para describir la propagación de cualquier plano que cumpla:  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{constante}$ . Tomaremos esta idea y la generalizaremos definiendo la fase para una *onda cuasi-plana* monocromática como:

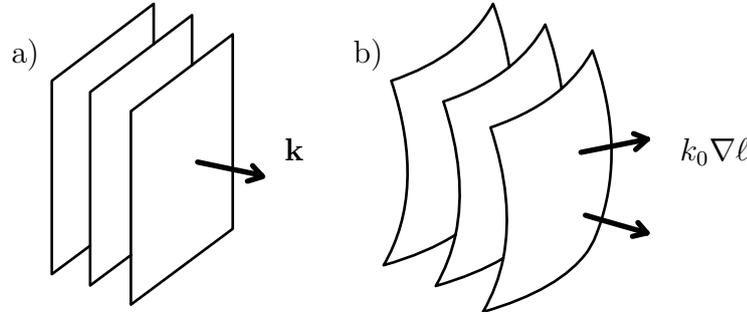
$$\phi = k_0 \ell(\mathbf{r}) - \omega t \quad (2.2)$$

donde  $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$ . Debido a que  $\phi$  es adimensional, la función  $\ell(\mathbf{r})$  tendrá dimensiones de longitud. Vemos que, en este caso, la contribución espacial a la fase  $\phi$  está dada por el término  $k_0 \ell(\mathbf{r})$  en lugar de  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ , como en el caso de la onda plana. El papel de  $\ell(\mathbf{r})$  queda claro notando que, para un tiempo y una constante dados, todos los puntos sobre la superficie descrita por la ecuación:

$$\ell(\mathbf{r}) = \text{constante} \quad (2.3)$$

tendrán exactamente la misma fase. Y, en analogía con la onda plana, podemos visualizar la propagación de la onda como superficies de fase constante desplazándose en el espacio (Fig. 2.1b). Estas superficies se conocen como los *frentes de onda*. Para un conjunto de constantes la ecuación (2.3) representa una familia de superficies y estas pueden dar nombre a distintos tipos de

frentes de onda; por ejemplo: para una familia de planos, esferas o cilindros tendremos ondas planas, esféricas o cilíndricas respectivamente.



**Figura 2.1:** Frentes de onda: (a) onda plana (b) ejemplo de onda cuasi-plana.

Los campos que corresponden a la fase (2.2) son:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{i(k_0\ell(\mathbf{r})-\omega t)}\} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{i(k_0\ell(\mathbf{r})-\omega t)}\} \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{H}_0$  pueden ser funciones complejas de la posición, en cuyo caso se puede pensar que añaden un término espacial a la fase total  $\phi(\mathbf{r}, t)$ . Un poco informalmente, podemos notar el carácter local de onda plana fijándonos en un punto  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  en la vecindad de  $\mathbf{r}$ . En este caso, la parte espacial de la fase se puede aproximar como:  $\ell(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \ell(\mathbf{r}) + \nabla\ell \cdot d\mathbf{r}$ ; y al sustituir en los campos (2.4) (absorbiendo  $\ell(\mathbf{r})$  en el argumento de  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{H}_0$ ) tendremos exactamente la expresión para una onda plana con un vector de onda dado por (comparar con (1.25)):

$$\mathbf{k} = k_0\nabla\ell \quad (2.5)$$

La identificación (2.5) permite que, en la localidad de un punto  $\mathbf{r}$ , podamos pensar que la onda viaja en dirección del vector  $\nabla\ell(\mathbf{r})$  con velocidad de fase  $v(\mathbf{r}) = \omega/|k_0\nabla\ell(\mathbf{r})|$ .

### 2.1.2. La ecuación eikonal

Para seguir analizando las ondas cuasi-planas, debemos sustituir los campos correspondientes en las ecuaciones de Maxwell. Por el momento, nos

fijaremos únicamente en el campo eléctrico. Del mismo modo que se obtuvo (1.28), el campo de desplazamiento asociado a la onda cuasi-plana (2.4) es:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r}, \omega_0)\mathbf{E}_0e^{i(k_0\ell - \omega t)}\} \quad (2.6)$$

Debido a que los operadores diferenciales en las ecuaciones de Maxwell son lineales, podemos manipular los campos complejos sin escribir explícitamente que consideramos sólo la parte real, y simplemente tomar la parte real del resultado final\*. Tomando esto en cuenta, al aplicar los operadores diferenciales en (1.10) a los campos (2.4) y (2.6) obtenemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = e^{i\phi}\varepsilon_0(\nabla \cdot (\varepsilon\mathbf{E}_0) + ik_0\nabla\ell \cdot (\varepsilon\mathbf{E}_0)) \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = e^{i\phi}(\nabla \times \mathbf{E}_0 + ik_0\nabla\ell \times \mathbf{E}_0)$$

$$\partial\mathbf{D}/\partial t = -e^{i\phi}(i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}_0) = -e^{i\phi}(ik_0c\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}_0)$$

donde  $\phi$  es la fase (2.2). El caso magnético es idéntico, sólo hace falta sustituir:  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ , y  $\varepsilon \rightarrow \mu$ . Usando las expresiones (2.7), las ecuaciones de Maxwell en (1.10) quedan escritas como (tomando, como en la Sección 1.2.3,  $\rho_{ext}, \mathbf{J}_{ext} = 0$ ):

$$\nabla\ell \cdot \varepsilon\mathbf{E}_0 = -\frac{1}{ik_0}(\nabla \cdot \varepsilon\mathbf{E}_0) \quad \nabla\ell \cdot \mu\mathbf{H}_0 = -\frac{1}{ik_0}(\nabla \cdot \mu\mathbf{H}_0)$$

$$\nabla\ell \times \mathbf{E}_0 - c\mu_0\mu\mathbf{H}_0 = -\frac{1}{ik_0}\nabla \times \mathbf{E}_0 \quad \nabla\ell \times \mathbf{H}_0 + c\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}_0 = -\frac{1}{ik_0}\nabla \times \mathbf{H}_0$$

Usaremos ahora la aproximación de la óptica geométrica, esto es, tomaremos el límite (2.1), o equivalentemente:  $1/k_0 \rightarrow 0$ . De las ecuaciones anteriores se observa directamente que el resultado del límite es:

$$\nabla\ell \cdot \varepsilon\mathbf{E}_0 = 0 \quad \nabla\ell \cdot \mu\mathbf{H}_0 = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla\ell \times \mathbf{E}_0 - c\mu_0\mu\mathbf{H}_0 = 0 \quad \nabla\ell \times \mathbf{H}_0 + c\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}_0 = 0 \quad (2.9)$$

Estas son las ecuaciones de Maxwell para la onda cuasi-plana definida en (2.2) bajo la aproximación de la óptica geométrica. Despejando  $\mathbf{H}_0$  del lado izquierdo de (2.9) y sustituyendo en el lado derecho obtenemos:

---

\*Cualquier operador lineal  $\nabla$  cumple:  $\nabla\text{Re}\{z\} = \frac{1}{2}\nabla(z+z^*) = \frac{1}{2}(\nabla z + \nabla z^*) = \text{Re}\{\nabla z\}$

$$\nabla\ell \times \left(\frac{\mu^{-1}}{c\mu_0}\nabla\ell \times \mathbf{E}_0\right) + c\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}_0 = 0 \quad (2.10)$$

Si el medio material es *isotrópico*, esto es, si no depende de la dirección de los campos, la permeabilidad  $\mu$  es un escalar y podemos usar el triple producto vectorial\*\* en la ecuación anterior para obtener:

$$\frac{1}{c\mu_0\mu}(\nabla\ell(\nabla\ell \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0(\nabla\ell)^2) + c\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}_0 = 0 \quad (2.11)$$

El lado izquierdo de (2.8) implica que el primer término dentro del paréntesis se anula por lo que simplificando llegamos a que:

$$\left(-\frac{1}{c\mu_0\mu}(\nabla\ell)^2 + c\varepsilon_0\varepsilon\right)\mathbf{E}_0 = 0 \quad (2.12)$$

Como esto se debe cumplir para cualquier vector  $\mathbf{E}_0$ , llegamos finalmente a una relación entre el cambio espacial de  $\ell(\mathbf{r})$  y las propiedades materiales del medio:

$$(\nabla\ell)^2 = c^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu = \varepsilon\mu = n^2 \quad (2.13)$$

Ésta es la *ecuación eikonal*\*\*\* y es de donde derivaremos el significado físico de la óptica geométrica. Notemos que lo que hemos encontrado con esta ecuación es una relación entre la evolución espacial de la fase y las propiedades del medio. De la ecuación eikonal hemos definido directamente el *índice de refracción* como:

$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mu(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.14)$$

También de la ecuación (2.13) obtenemos, al multiplicarla por  $k_0^2$ , la relación de dispersión para la onda cuasi-plana bajo la aproximación de la óptica geométrica (ver (2.5)). Vemos este hecho a partir de que, para el caso de onda plana, la ecuación eikonal se reduce\* a:  $|\mathbf{k}| = k_0n = \omega n/c$ . La velocidad de fase en este caso es:  $v = \omega/|\mathbf{k}| = c/n$ , por lo que el índice de refracción no es más que la razón entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad

---

\*\*  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

\*\*\* Del griego  $\varepsilon\iota\kappa\tilde{\omega}\nu$  = imagen. También en castellano: iconal.

\* De la ecuación eikonal obtenemos realmente:  $|\mathbf{k}| = \pm k_0n = \pm \omega n/c$ . Asumiremos en esta sección el caso positivo; en la Sección 6.2 comentaremos el sentido físico del caso negativo.

de la luz en el medio. Como la onda cuasi-plana es localmente como una onda plana,  $n(\mathbf{r}, \omega)$  es la razón correspondiente, pero definida en cada punto  $\mathbf{r}$  dentro del material. Para la óptica geométrica en medios isotrópicos, las propiedades materiales quedan completamente descritas por  $n(\mathbf{r}, \omega)$ .

### 2.1.3. Rayos en la teoría electromagnética

Ahora estamos en posición de definir formalmente *los rayos de luz* en el contexto electromagnético[22][20][7]:

*Los rayos de luz son las líneas de flujo de energía de las ondas electromagnéticas.*

Como el flujo de densidad de energía esta dado por el vector de Poynting, *los rayos de luz deben ser las líneas de campo de  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$* . Recordando la definición:  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  en (1.13), encontramos que el vector de Poynting para una onda cuasi-plana (2.4) es:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{4}(\mathbf{E}_0 e^{i\phi} + \mathbf{E}_0^* e^{-i\phi}) \times (\mathbf{H}_0 e^{i\phi} + \mathbf{H}_0^* e^{-i\phi}) \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 e^{2i\phi} + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0^* e^{-2i\phi}) \\ &= \frac{1}{2}\text{Re}\{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 e^{2i\phi}\} \end{aligned}$$

donde  $\phi$  es la fase en (2.2). Del mismo modo que en (1.29), consideraremos sólo el promedio temporal de  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ . Al tomar este promedio, el término con  $e^{2i\phi}$  se anula y el vector de Poynting para una onda cuasi-plana se reduce a:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}\{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*\} \quad (2.15)$$

El hecho de que tomemos el promedio temporal implica que las trayectorias de luz que consideraremos son estacionarias en el tiempo. Por supuesto, a la luz le tomará un cierto tiempo recorrer la trayectoria: es la “forma” de la trayectoria la que no cambia en el tiempo.

Si ahora asumimos que estamos en la aproximación de la óptica geométrica podemos despejar  $\mathbf{H}_0$  del lado izquierdo de (2.9) y reescribir\*\*:

---

\*\*Todos los resultados anteriores son válidos para una función  $\ell(\mathbf{r})$  compleja pero de ahora en adelante asumiremos que  $\ell(\mathbf{r})$  es una función real. Notemos de (2.13) y (1.34) que esto implica que suponemos que el medio es no-absorbente.

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2c\mu_0} \mathbf{E}_0 \times \mu^{-1} (\nabla \ell \times \mathbf{E}_0^*) \quad (2.16)$$

donde, como en (2.7), no escribimos explícitamente que *sólo tomamos la parte real*. En un medio isotrópico,  $\mu$  es un escalar y aplicando el triple producto vectorial tenemos para este caso:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2c\mu_0\mu} (\nabla \ell (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) - \mathbf{E}_0^* (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla \ell)) = \frac{E_0^2}{2c\mu_0\mu} \nabla \ell \quad (2.17)$$

donde hemos usado que  $\mathbf{E}_0 \cdot \nabla \ell = 0$  (ver (2.8)). Este es un primer resultado importante ya que hemos encontrado que *la dirección del vector de Poynting coincide con la dirección de  $\nabla \ell$*  y que, por tanto, el flujo de energía es perpendicular a los frentes de onda (ver Fig. 2.1). Para esto, sin embargo, asumimos que el medio era isotrópico y este resultado no se cumplirá cuando la respuesta del medio dependa de la dirección de los campos.

Ahora usaremos la ecuación eikonal para encontrar una expresión para los rayos de luz. Esto es: encontraremos una ecuación para las líneas de campo del vector de Poynting. Primero recordemos que las líneas de campo son las trayectorias cuya dirección en cada punto está dada por la dirección del campo. Esto significa que los vectores del campo son tangentes a las trayectorias de las líneas en todo punto. Formalizamos esta idea estableciendo la siguiente definición:

*Las líneas de campo asociadas a un campo vectorial son las trayectorias de las curvas<sup>\*\*\*</sup>  $\mathbf{r}(s)$  cuya derivada  $d\mathbf{r}(s)/ds$  coincide en todo punto con el campo vectorial.*

Podemos entender esta definición en analogía a la trayectoria de una partícula. La trayectoria de la partícula establece una curva parametrizada por el tiempo, y la dirección y rapidez en cada punto de la trayectoria están dadas por la velocidad vectorial. Esta velocidad la obtenemos justamente derivando la posición con respecto al parámetro. En esta analogía el campo vectorial establece un campo de velocidades que podemos visualizar, por ejemplo, como

---

<sup>\*\*\*</sup>Para simplificar la notación dejamos indicada la curva como una posición  $\mathbf{r}$  como función de un parámetro  $s$ . Formalmente, una curva es una trayectoria parametrizada por una función  $\gamma(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  donde la posición de un punto sobre la trayectoria está dada por:  $\mathbf{r} = \gamma(s)$ . (ver Apéndice 1)

el flujo de un fluido, y es en este sentido que las líneas de campo representan líneas de flujo.

Ahora simplificaremos nuestro problema notando que, como solamente nos interesa la trayectoria de las líneas de campo del vector de Poynting (nos interesa sólo la dirección y no la “rapidez”), si definimos un campo de vectores unitarios  $\hat{\sigma}$  que coincidan en todo punto con la dirección de  $\langle \mathbf{S} \rangle$ , las líneas de campo de  $\hat{\sigma}$  serán exactamente las mismas que las del campo del flujo de energía  $\langle \mathbf{S} \rangle$ . Aprovechando (2.13) definimos este nuevo campo unitario como:

$$\hat{\sigma} \equiv \frac{\nabla \ell}{n} \quad (2.18)$$

De (2.17) es claro que  $\hat{\sigma}$  coincide en dirección con el vector de Poynting en todo punto del espacio. Por tanto, si aplicamos nuestra definición de líneas de campo al campo dado por  $\hat{\sigma}$ , encontramos que *los rayos de luz serán las trayectorias de las curvas dadas por la ecuación:*

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \hat{\sigma} = \frac{\nabla \ell}{n} \quad (2.19)$$

Esta ecuación define una familia de curvas, y al ser una ecuación de primer grado debemos proporcionar una posición inicial para encontrar una trayectoria en particular. Aquí es muy importante notar que, el hecho de que los vectores  $\hat{\sigma}$  sean unitarios, determina el modo en que están parametrizadas las curvas que hemos definido. En este caso se puede mostrar que el parámetro  $s$  en (2.19) debe cumplir con (ver Apéndice I):

$$s_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} ds \quad (2.20)$$

donde  $s_{12}$  es *la longitud de la trayectoria* entre el punto  $\mathbf{r}_1$  y el punto  $\mathbf{r}_2$ . Usando la analogía de la trayectoria de una partícula,  $s_{12}$  representa simplemente la distancia recorrida ya que, en este caso, el parámetro “recorre” la curva con rapidez unitaria ( $|d\mathbf{r}/ds| = |\sigma| = 1$ ). En esta situación decimos que *la curva está parametrizada por longitud de arco* y el parámetro  $s$  es conocido como la longitud de arco.

Ahora que hemos formalizado la idea de los rayos de luz podemos destilar con más precisión la esencia de la óptica geométrica. Primero, usando (2.19) y el hecho de que  $\hat{\sigma}$  es unitario, obtenemos:

$$1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\nabla\ell}{n} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (2.21)$$

De esta expresión encontramos directamente que, sobre un rayo de luz, la derivada total de  $\ell(\mathbf{r}(s))$  con respecto a la longitud de arco es:

$$\frac{d\ell}{ds} = \nabla\ell \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = n \quad (2.22)$$

Recordando que  $k_0\ell(\mathbf{r})$  es la contribución espacial a la fase total  $\phi(\mathbf{r}, t)$  en (2.2), la ecuación anterior implica que la razón de cambio de la fase total (para un tiempo dado) sobre una trayectoria de luz está dada por:

$$\frac{d\phi}{ds} = k_0 \frac{d\ell}{ds} = k_0 n \quad (2.23)$$

En otras palabras: la evolución de la fase, con respecto a la distancia recorrida (la longitud de arco), está determinada por el índice de refracción. Este resultado es el significado de la ecuación eikonal en el contexto de los rayos de luz. Aprovechando este hecho, y usando (2.22), podemos escribir el cambio de la fase en términos del índice de refracción:

$$\ell_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\ell = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} n ds \quad (2.24)$$

donde  $\ell_{12} = \ell(\mathbf{r}_2) - \ell(\mathbf{r}_1)$ , multiplicada por  $k_0$ , es el cambio que experimenta la fase total ( $\Delta\phi$ ) al recorrer un rayo de luz entre los puntos  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  dentro del medio. La cantidad  $\ell_{12}$  por si misma es conocida como *la longitud de camino óptico* entre los puntos  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  ya que, recordando  $n = c/v$ , podemos reescribirla como:

$$\ell_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} c \frac{ds}{v} = c \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dt = ct_{12} \quad (2.25)$$

donde  $v$  es la velocidad de la luz en el medio, y  $t_{12}$  es el tiempo que le toma a la luz recorrer la trayectoria de  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$  dentro del material. Vemos entonces que  $\ell_{12}$  es proporcional a este tiempo y la constante de proporcionalidad es la velocidad de la luz en el vacío. Con esto podemos interpretar a  $\ell_{12}$  como la distancia que tendría que recorrer la luz en el vacío para tener el mismo cambio de fase que experimenta al atravesar el medio caracterizado por el índice de refracción  $n(\mathbf{r}, \omega)$ , y es esta distancia la que es llamada longitud de

camino óptico. Por lo general<sup>\*\*\*\*</sup> en los materiales la luz va más “lento” que en el vacío ( $n > 1$ ) y por tanto la longitud de camino óptico es generalmente mayor que la longitud de la trayectoria de luz a través del medio material, esto es:  $l_{12} > s_{12}$ .

Por último, directamente de (2.19) y (2.22) podemos obtener una *ecuación para los rayos* únicamente en términos del índice de refracción:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (\nabla \ell) = \nabla \left( \frac{d\ell}{ds} \right) = \nabla n \quad (2.26)$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo grado y por tanto requiere de una posición y una dirección inicial para ser resuelta. En la siguiente sección volveremos a obtener esta ecuación pero a partir de un principio que nos dará nueva intuición física acerca del comportamiento de la luz.

Usemos ahora esta ecuación para resolver el caso más simple: un medio con índice de refracción constante  $n_0$ . En esta situación la ecuación de los rayos se reduce a:

$$n_0 \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \nabla n_0 = 0 \quad (2.27)$$

Como  $n_0 \neq 0$ , es claro que las soluciones deben ser líneas rectas (Fig. 2.2). Este caso es tan común que, para la mayoría de las aplicaciones, es suficiente considerar que los rayos de luz son siempre líneas rectas. Incluso el ojo humano “asume” siempre que la luz viaja en líneas rectas. Hemos encontrado, sin embargo, que este fenómeno no es más que un caso particular de un comportamiento más general.

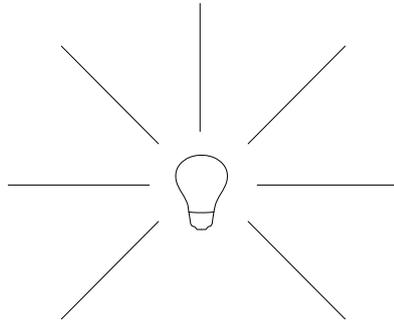
Otro resultado básico que podemos recuperar es la ley de refracción. Para esto pensemos en dos medios con índices de refracción constantes  $n_1$  y  $n_2$ . Por simplicidad supongamos que la frontera entre los dos está dada por una superficie plana. De la definición (2.19) tenemos:

$$\oint n \hat{\sigma} \cdot d\mathbf{r} = \oint \nabla \ell \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2.28)$$

La integral debe anularse porque todo campo definido como un gradiente es irrotacional ( $\nabla \times \nabla \ell = 0$ ). Tomemos ahora esta integral sobre un circuito

---

<sup>\*\*\*\*</sup>Toda nuestra discusión a sido para alguna frecuencia en específico por lo que al hablar de la velocidad de la luz nos referimos a la velocidad de fase. Esta velocidad sí puede rebasar la velocidad de la luz en el vacío ya que, por si misma, una onda monocromática no puede transmitir información.



**Figura 2.2:** La luz viaja en líneas rectas cuando atraviesa un medio con índice de refracción constante (por ejemplo: el aire a temperatura y presión constantes).

compuesto por un rectángulo con dos lados perpendiculares a la superficie y los otros dos paralelos a la superficie. Al evaluar la integral las componentes perpendiculares se cancelan y por tanto, para que toda la integral se anule, las componentes paralelas deben cumplir:  $n_1 \sigma_1^{\parallel} = n_2 \sigma_2^{\parallel}$ . Si  $\theta$  es el ángulo de  $\hat{\sigma}$  con la normal a la superficie (recordando que  $\hat{\sigma}$  está en la dirección de los rayos), este resultado queda reescrito como:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2.29)$$

que no es más que la conocida ley de Snell<sup>\*\*\*\*</sup> por lo que podemos estar seguros que hemos recuperamos la ley correcta. Notemos también que, debido a que podríamos llevar a cero los lados perpendiculares del circuito que hemos usado, la ley se seguirá cumpliendo incluso si los índices de refracción no son constantes, en cuyo caso los valores de  $\theta$  y  $n$  en (2.29) son los correspondientes a la frontera entre los medios.

#### 2.1.4. El Principio de Fermat

Hace casi exactamente 350 años, a mediados del siglo XVII, Pierre de Fermat dedujo las leyes conocidas de la óptica (reflexión y refracción) postulando que eran consecuencia de un único principio:

*La trayectoria seguida por la luz al propagarse de un punto a otro es la que minimiza el tiempo de recorrido.*

---

<sup>\*\*\*\*</sup> Publicada en el año 984 por Ibn Sahl en Bagdad y redescubierta independientemente por Willebrord Snell y René Descartes unos 600 años después

Postulando este mismo principio también es posible deducir los resultados de la sección anterior y en este sentido, el principio de Fermat, representa una alternativa independiente al tratamiento electromagnético de los rayos de luz\*. El principio no sólo nos permitirá volver a encontrar las ecuaciones de los rayos de luz, también nos da nueva intuición acerca de la naturaleza de la luz\*\*: la luz “quiere” minimizar su tiempo de recorrido.

Matemáticamente, *el principio de Fermat es un principio variacional que define a los rayos de luz como las trayectorias donde el tiempo de recorrido es estacionario*; esto significa que, al “variar” un poco la trayectoria, el tiempo de recorrido no cambia a primer orden. Expresado de este modo, el principio de Fermat permite también que los rayos sean trayectorias de tiempo máximo o de punto de inflexión. El problema variacional queda escrito simplemente como:

$$\delta t_{12} = 0 \quad (2.30)$$

donde  $t_{12}$  es el tiempo que le toma a la luz ir del punto  $\mathbf{r}_1$  al punto  $\mathbf{r}_2$ . Por convención y conveniencia, en vez de pedir que el tiempo de recorrido sea estacionario, pediremos que la longitud de camino óptico  $\ell_{12}$  sea estacionaria. Esta cantidad fue definida en la sección anterior pero, para mantener independencia con respecto a los resultados anteriores, en esta sección lo definimos directamente como:  $\ell_{12} = c t_{12}$ . De esta definición es claro que pedir que la longitud de camino óptico sea estacionaria es completamente equivalente a (2.30). El principio queda reescrito entonces como:

$$\delta \ell_{12} = c \delta t_{12} = \delta \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} c dt = \delta \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} n(v dt) = \delta \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} n ds = 0 \quad (2.31)$$

donde hemos usado además que  $n = c/v$ . También hemos escrito la distancia diferencial recorrida como  $ds$  por lo que, si usamos  $s$  como parámetro,

---

\*Notemos, sin embargo, que la visión electromagnética es más fundamental ya que es posible deducir el principio de Fermat a partir de la teoría electromagnética[22] mientras que lo opuesto es imposible.

\*\*Desde el punto de vista ondulatorio, el principio de Fermat puede verse como una consecuencia del principio de Huygens, donde la dirección que minimiza el tiempo es la única donde las ondas interfieren constructivamente. Esto resuelve una aparente violación de la causalidad en el principio de Fermat, ya que parecería que la luz debe saber como moverse *antes* de moverse. En un contexto más fundamental el principio es una consecuencia de los postulados de la Electrodinámica Cuántica[23].

obtendremos curvas parametrizadas por longitud de arco (como en la sección anterior, ver Apéndice I). Usando esta parametrización, *un rayo de luz quedará representado por una curva*:  $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ . Para explicitar esta curva reescribimos la longitud de arco diferencial  $ds$  como:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| ds \quad (2.32)$$

De esta expresión notamos inmediatamente que  $|d\mathbf{r}/ds| = 1$ , este hecho es una consecuencia directa de que la curva  $\mathbf{r}(s)$  está parametrizada por longitud de arco (Apéndice I).

Simplificaremos la notación, siguiendo una convención común, denotando a la derivada con respecto al parámetro  $s$  como:

$$\frac{d}{ds} = \dot{\phantom{x}} \quad (2.33)$$

Usando esta nueva notación y tomando en cuenta el resultado (2.32), la longitud de camino óptico queda escrita como:

$$\ell_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} n ds = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} n |\dot{\mathbf{r}}| ds \quad (2.34)$$

Para distintas trayectorias esta integral tendrá valores distintos, y por tanto  $\ell_{12}$  se puede pensar como una función del argumento de la integral<sup>\*\*\*</sup>. Llamaremos a este argumento  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , y vemos de la expresión anterior que está dado por:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = n(\mathbf{r}) |\dot{\mathbf{r}}| \quad (2.35)$$

Esta identificación nos permitirá escribir el principio de Fermat como un problema típico del cálculo de variaciones:

$$\delta \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) ds = 0 \quad (2.36)$$

con lo que, escrito de este modo, el cálculo de variaciones nos dice que la función  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  que cumple (2.36) debe ser solución de la ecuación de Euler-Lagrange para cada coordenada (ver Apéndice 2):

---

<sup>\*\*\*</sup> Este tipo de funciones, cuyo argumento es otra función, son conocidas como funcionales

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \quad (2.37)$$

Si sustituimos la función (2.35) en estas ecuaciones obtendremos la ecuación que deben cumplir los rayos según el principio de Fermat. Sustituyendo primero en la ecuación para la coordenada  $x$  tenemos:

$$\frac{\partial(n|\dot{\mathbf{r}}|)}{\partial x} = \frac{d}{ds} \frac{\partial(n|\dot{\mathbf{r}}|)}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{ds} \left( n \frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \right) \quad (2.38)$$

donde hemos usando que  $n(\mathbf{r})$  no depende de  $\dot{x}$ . Si ahora tomamos en cuenta que  $|\dot{\mathbf{r}}| = 1$ , la ecuación se simplifica a:

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) \quad (2.39)$$

Para las otras dos coordenadas el cálculo es idéntico por lo que la ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\nabla n = \frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \quad (2.40)$$

que es exactamente la ecuación para los rayos (2.26) que encontramos a partir de la teoría electromagnética. Esto prueba la equivalencia del principio de Fermat ya que, usando sólo este principio y el concepto del índice de refracción, hemos descrito correctamente el comportamiento de los rayos de luz. El principio de Fermat no sólo nos aporta nueva intuición acerca de la naturaleza de la luz, en la siguiente sección nos permitirá desarrollar nuevos conceptos y herramientas para su análisis.

## 2.2. El Hamiltoniano óptico

En mecánica existe un principio análogo al principio de Fermat donde, en vez de rayos de luz, se obtienen las trayectorias de un sistema mecánico (una o varias partículas, por ejemplo). El principio se expresa exactamente en la forma (2.36), con la función  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  dada por la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema ( $L = T - V$ ). En este contexto esta función es conocida como el *Lagrangiano* y la integral correspondiente, en vez de dar la longitud de camino óptico, da una cantidad conocida como la acción.

Este principio mecánico es conocido como el principio de Hamilton en honor a Sir William Rowan Hamilton\*. A partir de esta “mecánica Lagrangiana” es común derivar otra reformulación de la mecánica conocida como mecánica Hamiltoniana. Esta reformulación permite develar la estructura matemática de la mecánica clásica y la muestra en un formalismo similar al de la mecánica cuántica.

En analogía con estas ideas identificaremos a (2.35) como el *Lagrangiano óptico* y lo usaremos en esta sección para desarrollar una *Óptica Hamiltoniana*. El primer paso de este formalismo es definir una nueva función  $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  llamada el Hamiltoniano que, a diferencia del Lagrangiano  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , depende de la posición  $\mathbf{r}$  y una nueva variable  $\mathbf{p}$  que llamaremos momento conjugado o *momento óptico*. Esta nueva variable está definida en términos del Lagrangiano como:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \quad (2.41)$$

Al sustituir nuestro Lagrangiano óptico (2.35) obtenemos:

$$p_x = n \frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \quad p_y = n \frac{\dot{y}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \quad p_z = n \frac{\dot{z}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \quad (2.42)$$

con lo que el momento óptico en nuestro caso está dada por:

$$\mathbf{p} = n \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \quad |\mathbf{p}|^2 = n^2 \quad (2.43)$$

Inmediatamente podemos dar un significado preciso a este momento óptico. Al comparar esta última expresión con (2.19) y (2.13) podemos ver que  $\mathbf{p}$  se corresponde con el gradiente de la función  $\ell(\mathbf{r})$ , la parte espacial de la fase (2.2); esto es:  $\mathbf{p} = \nabla \ell$ . A su vez, mostramos en (2.5), en la Sección 2.1, que esta cantidad está relacionada con el vector de onda local  $\mathbf{k}$ , con lo que tenemos la identidad:

---

\*Originalmente, Hamilton desarrolló su teoría para analizar rayos de luz. En su artículo *Teoría de Sistemas de Rayos*, publicado en 1827, introdujo la idea de la función Hamiltoniana y él mismo expandió esta teoría posteriormente a la mecánica desarrollando el concepto de la acción en *Acerca de métodos generales en dinámica* publicado en 1834.

$$\mathbf{k} = k_0 \mathbf{p} \quad (2.44)$$

A partir del momento conjugado el procedimiento normal es determinar el Hamiltoniano aplicando la transformada de Legendre al Lagrangiano. En nuestro caso, sin embargo, no podemos aplicar “exactamente” esta transformación ya que el Jacobiano del momento conjugado es singular ( $|\partial p_i / \partial x_j| = 0$ ) y por tanto no podemos invertirlo para encontrar  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{p})$  (ver Apéndice 3). Este “tecnicismo” se hace evidente al observar que simplemente no podemos despejar  $\dot{\mathbf{r}}$  en (2.43). Este hecho es una consecuencia de que nuestro Lagrangiano es una función homogénea de primer orden en  $\dot{\mathbf{r}}$ , esto es:  $L(\mathbf{r}, a\dot{\mathbf{r}}) = aL(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , y en estos caso se dice que tenemos un *Lagrangiano degenerado*. A pesar de este problema propondremos el siguiente Hamiltoniano que resultará adecuado para nuestro caso:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(\dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L) \quad (2.45)$$

Notamos que esta transformación sólo difiere de la transformada de Legendre “normal” por un factor de 1/2 (ver Apéndice 3). Al sustituir nuestro Lagrangiano (2.35) y tomando  $|\dot{\mathbf{r}}| = 1$ , encontramos:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{|\mathbf{p}|^2}{n} - n(\mathbf{r}) \right) \quad (2.46)$$

las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} & \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} & \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Si definimos  $\nabla_p = (\partial/\partial p_x, \partial/\partial p_y, \partial/\partial p_z)$  podemos escribir sucintamente estas ecuaciones en coordenadas cartesianas como:  $\dot{\mathbf{r}} = \nabla_p H$ ,  $\dot{\mathbf{p}} = -\nabla H$ , y al sustituir el Hamiltoniano (2.46) tenemos:

$$\dot{\mathbf{r}} = \nabla_p H = \frac{1}{2n} \nabla_p |\mathbf{p}|^2 = \frac{\mathbf{p}}{n} \quad (2.48)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla H = \frac{1}{2} \left( \frac{\nabla n}{n^2} |\mathbf{p}|^2 + \nabla n \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{|\mathbf{p}|^2}{n^2} + 1 \right) \nabla n = \nabla n \quad (2.49)$$

Si despejamos de la primera expresión:  $n\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}$ , y derivamos con respecto al parámetro encontramos:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \dot{\mathbf{p}} = \nabla n \quad (2.50)$$

que es de nuevo la misma ecuación de los rayos que encontramos a partir de las ecuaciones de Maxwell (2.26) y a partir del principio de Fermat (2.40). Esto demuestra además que hemos escogido el Hamiltoniano correcto ya que las ecuaciones de movimiento (2.47) se corresponden exactamente con la ecuación del Euler-Lagrange para nuestro Lagrangiano (2.35).

### 2.2.1. Reparametrización del Hamiltoniano óptico

Hasta ahora hemos asumido que las trayectorias de luz están parametrizadas por longitud de arco; notemos por ejemplo que las ecuaciones para los rayos que hemos obtenido dependen de este hecho. Sin embargo, el modo en el que hemos planteado el problema de los rayos a partir del principio de Fermat es “naturalmente” independiente de la parametrización. De hecho, esta independencia fue la que nos impidió aplicar la transformada de Legendre ya que se tradujo en un Lagrangiano degenerado (ver Apéndice 3). Otra consecuencia afecta directamente al Hamiltoniano; si despejamos de (2.46) la expresión:  $2nH = |\mathbf{p}|^2 - n^2$ , y comparamos con el momento óptico (2.43) nos damos cuenta que:

$$H = 0 \quad (2.51)$$

En esta sección mostraremos que esta independencia de la parametrización nos permitirá simplificar el Hamiltoniano a nuestro gusto. Estas “simplificaciones”, además, las identificaremos como reparametrizaciones de las trayectorias de luz.

Lo primero que debemos hacer es plantear el principio de Fermat para una parametrización arbitraria. En (2.31) el principio está escrito en términos

de la longitud de arco, por lo que reescribiendo esta cantidad en términos de un parámetro arbitrario  $u$  tenemos:

$$ds = du \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right| du \quad (2.52)$$

donde, a diferencia de (2.32), es claro que  $|d\mathbf{r}/du| \neq 1$ . Usando esta parametrización, el principio de Fermat queda reescrito como:

$$\delta \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} n ds = \delta \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} n \left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right| du = 0 \quad (2.53)$$

Éste es, por su puesto, exactamente el mismo principio pero ahora el argumento de la integral, el Lagrangiano, está dado por:

$$L' = n(\mathbf{r}) \left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right| \quad (2.54)$$

A partir de este Lagrangiano encontramos directamente el momento conjugado aplicando la definición (2.43):

$$\mathbf{p} = n \frac{d\mathbf{r}/du}{|d\mathbf{r}/du|} \quad |\mathbf{p}|^2 = n^2 \quad (2.55)$$

De este resultado notamos que el momento óptico es independiente de la parametrización (quizá esto era ya evidente en (2.43)). Este hecho nos permite mantener la interpretación (2.44); esto es: nos asegura que nuestro momento óptico siempre cumple con la ecuación eikonal (2.13). Es notable que el principio de Fermat y el formalismo Hamiltoniano nos permitieran rescatar un hecho que, en principio, está conectado con la naturaleza ondulatoria de la luz. Si ahora aplicamos la definición (2.45) encontramos que el Hamiltoniano en esta caso está dado por:

$$H'(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right| \left( \frac{|\mathbf{p}|^2}{n} - n \right) = \left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right| H \quad (2.56)$$

donde  $H$  es el Hamiltoniano en (2.46). Aquí se hace evidente porqué no pudimos aplicar la transformada de Legendre, no podemos despejar  $|d\mathbf{r}/du|$  sólo en términos de  $\mathbf{p}$ . Como  $u$  representa una parametrización arbitraria el nuevo Hamiltoniano tiene la forma general:

$$H' = \alpha(\mathbf{r})H \quad (2.57)$$

con  $\alpha(\mathbf{r})$  una función arbitraria de la posición. Las ecuaciones de movimiento correspondientes a este Hamiltoniano son (en coordenadas cartesianas):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{du} &= \nabla_p H' = (H\nabla_p \alpha + \alpha\nabla_p H) = \alpha\nabla_p H \\ \frac{d\mathbf{p}}{du} &= -\nabla H' = -(H\nabla\alpha + \alpha\nabla H) = -\alpha\nabla H \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde hemos usado explícitamente que  $H = 0$ . Podemos ver que estas ecuaciones son equivalentes a (2.47) notando que:  $ds = \alpha du$ . Con esto concluimos que, *a partir de cualquier Hamiltoniano de la forma (2.57), obtenemos las mismas trayectorias de luz*. Esta libertad nos permite simplificar el Hamiltoniano según nos convenga. Por ejemplo, tomando  $\alpha(\mathbf{r}) = k_0^2 n(\mathbf{r})$  obtenemos:

$$H' = \frac{1}{2} k_0^2 n \left( \frac{|\mathbf{p}|^2}{n} - n \right) = \frac{1}{2} (k^2 - k_0^2 n^2) \quad (2.59)$$

donde además usamos la interpretación (2.44). Como  $H = 0$  podemos identificar inmediatamente en esta “forma” del Hamiltoniano la relación de dispersión local (o equivalentemente la ecuación eikonal (2.13)). La parametrización que corresponde a este Hamiltoniano está dada por:  $du = ds/\alpha = ds/k_0^2 n$ .

### 2.2.2. El Hamiltoniano en coordenadas cilíndricas

Otra ventaja de los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano es que están “naturalmente” formulados en coordenadas generalizadas. En la sección 6.2 desarrollaremos un ejemplo en coordenadas cilíndricas (aunque en medios anisotrópicos) y, por esta razón, en esta sección destacaremos algunos hechos importantes. Un punto en coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$  está dado en términos de las coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$  como:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad z = z \quad (2.60)$$

Correspondientemente, las coordenadas rectangulares en términos de las coordenadas cilíndricas son:

$$x = \rho \sin \theta \quad y = \rho \cos \theta \quad z = z \quad (2.61)$$

Sustituyendo en el Lagrangiano (2.35), en coordenadas cilíndricas tenemos:

$$L = n|\dot{\mathbf{r}}| = n(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} = n(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} \quad (2.62)$$

Al aplicando la definición (2.41), podemos encontrar las componentes del momento óptico en estas nuevas coordenadas:

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{n\dot{\rho}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{n\rho^2\dot{\theta}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{n\dot{z}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \quad (2.63)$$

Con lo que, de la definición (2.45), el Hamiltoniano en este caso es:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} (p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + p_z^2) - n \right) \quad (2.64)$$

y las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

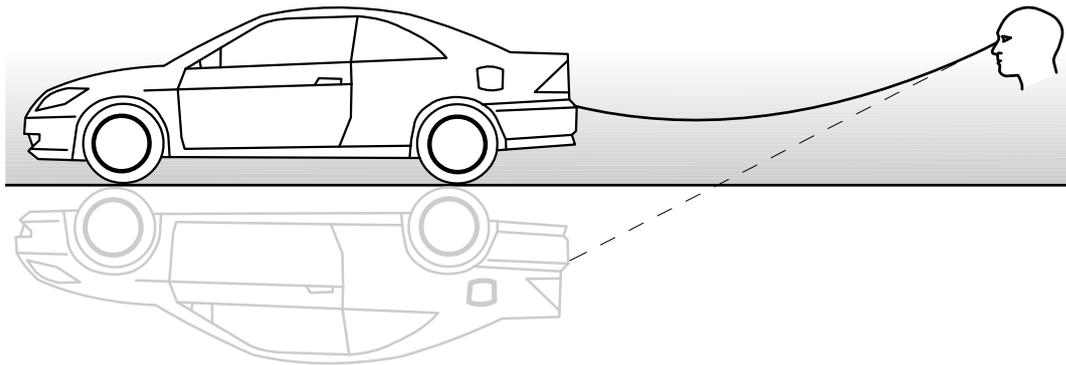
$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\partial H}{\partial p_\rho} & \dot{p}_\rho &= -\frac{\partial H}{\partial \rho} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} & \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} & \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Con esto queremos mostrar que el Hamiltoniano no siempre tiene la forma cartesiana, sino que depende del sistema coordenado que usemos.

### 2.3. Doblando luz: Espejismos

Como mencionamos en la Sección 2.1.3, el ojo humano siempre asume que la luz viaja en línea recta; esto es: el ojo registra la dirección en la que llega un rayo de luz, extrapola de esta dirección una línea recta y asume que el objeto de donde proviene la luz se encuentra en esta dirección (ver Figura 2.3). Sin embargo, como es claro de la ecuación de los rayos (2.26), cuando hay un

gradiente de índice de refracción las trayectorias de luz pueden ser curvas y esto genera efectos ópticos que se desvían de lo esperado por el ojo humano. Uno de los ejemplos más notorios es el espejismo. En un día soleado es común ver aparentes cuerpos de agua y el reflejo de los autos sobre la superficie de las carreteras. Este fenómeno es consecuencia de un gradiente de temperatura en el aire sobre la carretera. La carretera es calentada por el sol y esto ocasiona que el aire cercano a la superficie tenga una temperatura más alta que el aire más lejano. Esto a su vez se traduce en que la densidad del aire es menor cerca de la superficie de la carretera y va aumentando con la altura conforme el aire es más frío. Como el índice de refracción es proporcional a la densidad (podemos pensar intuitivamente que a menor densidad la luz viaja “más fácil”)  $n(\mathbf{r})$  también será menor cerca de la superficie de la carretera y se irá incrementando con la altura.



**Figura 2.3:** Un espejismo en la carretera es causado por un gradiente de temperatura, representado en la imagen como un degradado de tonos grises, que a su vez genera un gradiente de índice de refracción.

Utilizaremos las herramientas que hemos desarrollado en este capítulo para analizar en detalle el fenómeno del espejismo. Lo primero que tenemos que hacer es proponer un modelo en el que establezcamos como está cambiando el índice de refracción. No nos interesa obtener un modelo exacto, sólo queremos recuperar cualitativamente el fenómeno y señalar algunas características esenciales. El caso más simple es pensar que  $n(\mathbf{r})$  sólo dependa de la altura

y que esta dependencia sea lineal:

$$n(y) = \alpha y + n_0 \quad (2.66)$$

En este modelo  $\alpha$  representa la rapidez con la que cambia el índice de refracción por unidad de distancia, y  $n_0$  es el valor mínimo de  $n(y)$  justo en la superficie de la carretera ( $y = 0$ ). El Hamiltoniano del problema lo obtenemos substituyendo esta  $n$  en la ecuación (2.59).

$$H = \frac{1}{2}(k^2 - k_0^2 n^2) = \frac{1}{2}(k^2 - k_0^2(\alpha^2 y^2 + 2\alpha n_0 y + n_0^2))$$

Con lo que las ecuaciones de movimiento son:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial k_x} = k_x \quad \dot{k}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (2.67)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial k_y} = k_y \quad \dot{k}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = k_0^2(\alpha^2 y + \alpha n_0) \quad (2.68)$$

Las curvas están parametrizadas por un parámetro<sup>\*\*</sup>  $\tau$  y por tanto en esta sección:  $\dot{\phantom{x}} = d/d\tau$ . Inmediatamente de la ecuación (2.67) resolvemos para  $x$ :

$$x = k_x \tau + x_m \quad (2.69)$$

donde  $x_m$  es una constante de integración. Si ahora derivamos el lado izquierdo de (2.68) con respecto al parámetro obtenemos:

$$\ddot{y} = \dot{k}_y = k_0^2(\alpha^2 y + \alpha n_0) = k_0^2 \alpha^2 \left(y + \frac{n_0}{\alpha}\right)$$

La solución<sup>\*\*\*</sup> a esta ecuación es (basta substituir para comprobarlo):

$$y(\tau) = A \cosh(k_0 \alpha \tau) - \frac{n_0}{\alpha}$$

Despejando  $\tau$  de (2.69) nos podemos deshacer del parámetro para obtener  $y(x)$ :

---

<sup>\*\*</sup>Para ser precisos:  $d\tau = k_0 du = ds/k_0 n$ , donde  $u$  es la parametrización correspondiente al Hamiltoniano (2.59). Redefinimos el parámetro para reescribir las ecuaciones de movimiento en términos de los componentes del vector de onda.

<sup>\*\*\*</sup>Hemos descartado la solución:  $B \sinh(k_0 \alpha \tau)$ , ya que la derivada de esta función nunca es cero y esperamos que las trayectorias de luz tengan un mínimo.

$$y(x) = A \cosh\left(\frac{k_0}{k_x} \alpha (x - x_m)\right) - \frac{n_0}{\alpha} \quad (2.70)$$

De esta ecuación notamos que la altura mínima ( $y_m = A - n_0/\alpha$ ) se alcanza en  $x = x_m$ , y esto justifica que hayamos elegido este nombre para la constante de integración en (2.69).

Para encontrar trayectorias de luz en particular debemos especificar condiciones iniciales. Establezcamos entonces que el rayo de luz viaja de izquierda a derecha y que pasa en  $x = 0$  a una altura  $y_0$  haciendo un ángulo  $\phi$  por debajo de la horizontal. Estas condiciones se traducen en las ecuaciones como:

$$y(0) = y_0 \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -\tan \phi \quad (2.71)$$

Las condiciones también determinan  $k_x$  a través de la relación de dispersión local ( $k(y) = k_0 n(y)$ ) evaluada en  $y_0$ :

$$k_x = k(y_0) \cos \phi = k_0 n_i \cos \phi \quad (2.72)$$

donde llamamos  $n_i$  al valor del índice de refracción en la altura  $y_0$ , esto es:

$$n_i \equiv n(y_0) = \alpha y_0 + n_0 \quad (2.73)$$

Al sustituir las condiciones (2.71) en la solución general (2.70) encontramos:

$$\cosh\left(-\frac{k_0}{k_x} \alpha x_m\right) = \frac{y_0 + n_0/\alpha}{A} = \frac{n_i}{\alpha A} \quad (2.74)$$

$$\sinh\left(-\frac{k_0}{k_x} \alpha x_m\right) = -\frac{k_x \tan \phi}{k_0 \alpha A} = \frac{n_i \sin \phi}{\alpha A} \quad (2.75)$$

Con lo que aprovechando la identidad:  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ , podemos despejar  $A$ :

$$\left(\frac{n_i}{\alpha A}\right)^2 - \left(\frac{n_i \sin \phi}{\alpha A}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{n_i \cos \phi}{\alpha} \quad (2.76)$$

y con esto encontramos  $x_m$  directamente de (2.74):

$$\begin{aligned}
 x_m &= \frac{k_x}{k_0 \alpha} \operatorname{arccosh} \left( \frac{n_i}{\alpha A} \right) = \frac{n_i \cos \phi}{\alpha} \operatorname{arccosh} \left( \frac{1}{\cos \phi} \right) \\
 &= \frac{n_i \cos \phi}{\alpha} \ln(\sec \phi + \tan \phi)
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

donde hemos usado la identidad:  $\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x^2 + \sqrt{x^2 - 1})$ , e ignoramos el signo del argumento del coseno hiperbólico usando la paridad de esta función. La expresión general para los rayos es entonces:

$$y(x) = \frac{n_i \cos \phi}{\alpha} \cosh \left( \frac{\alpha}{n_i \cos \phi} x - \ln(\sec \phi + \tan \phi) \right) - \frac{n_0}{\alpha} \tag{2.78}$$

Esta expresión es exactamente una curva catenaria y es la misma forma que tiene una cuerda colgando bajo su propio peso. Para analizar este resultado haremos algunas estimaciones basadas en la Figura 2.4. Consideremos que el auto se encuentra a unos  $50m$  del observador y que éste ha tomado la fotografía a una altura de  $1,3m$ , los rayos que generan el espejismo y llegan al observador salen de la defensa trasera del auto a una altura aproximada de  $y_0 = 0,5m$ . Como ya mencionamos, no esperamos obtener resultados cuantitativos precisos ya que el modelo que hemos propuesto es muy simple y las estimaciones no son exactas.

Tomando en cuenta los datos que hemos estimado, en la Figura 2.5 graficamos cuatro rayos sometidos a cuatro valores distintos de  $\alpha$ . En el sentido de las manecillas del reloj, cada valor de  $\alpha$  es progresivamente 10 veces más chico. Los cuatro rayos salen de  $y_0$  con un ángulo de  $0,5^\circ$  por debajo de la horizontal. Vemos de la gráfica que, para que el rayo llegue al observador a una altura aproximada de  $1,3m$ , el valor de  $\alpha$  debe ser cercano a  $10^{-3}/m$ . La tendencia también es clara: si quisiéramos que el rayo alcanzara esta misma altura en una distancia mayor, el gradiente tendría que ser menor. Esto quiere decir que, para que el rayo de luz “cuelgue” una distancia considerable, el cambio por unidad de distancia debe ser mucho más chico que la propia unidad de distancia. En un caso real el gradiente promedio es todavía más chico que en nuestro modelo, esto lo estimamos en base a que el cambio en el índice de refracción entre  $0^\circ\text{C}$  y  $40^\circ\text{C}$  es:  $\Delta n \approx 3 \times 10^{-5}$ .

En la Figura 2.6 graficamos cuatro rayos que salen con distintos ángulos para un valor fijo de  $\alpha$ . En el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo de salida es progresivamente el doble del anterior. Inmediatamente podemos



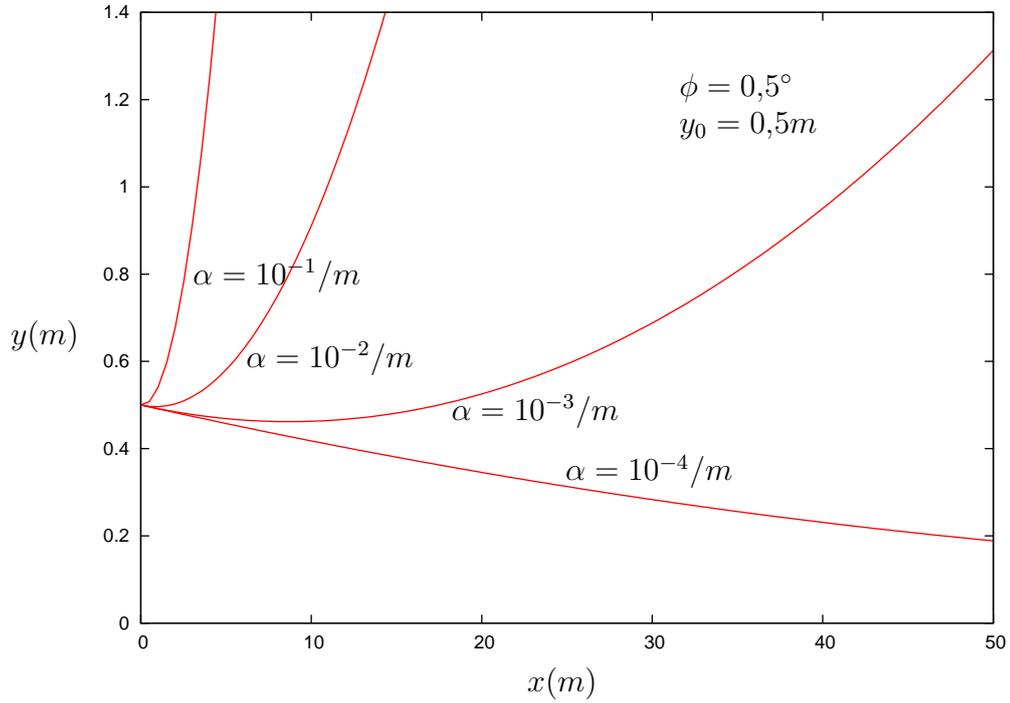
**Figura 2.4:** Espejismo en la carretera.

observar que, diferencias relativamente pequeñas en los ángulos, generan trayectorias considerablemente distintas. Esto significa que las condiciones para que observemos un espejismo son relativamente justas y cualquier cambio en éstas puede ocasionar que se desvanezca el espejismo (o que cambie de posición aparente). Otro aspecto que se hace evidente en la gráfica es que, a partir de un cierto ángulo crítico, los rayos se estrellan con el piso; esto limita el rango de ángulos que pueden generar el espejismo ya que los rayos “estrellados” reflejarán el piso. Podemos encontrar fácilmente este ángulo crítico despejando de la fórmula (2.78) cuando  $y(x_m) = 0$ :

$$\phi = \arccos\left(\frac{n_0}{n_i}\right) = \arccos\left(\frac{n_0}{\alpha y_0 + n_0}\right) \quad (2.79)$$

Los ángulos de salida que pueden generar un espejismo deben ser menores a este ángulo. En nuestro caso este ángulo crítico es:  $\phi = 1,81^\circ$ .

En la Figura 2.7 graficamos tres rayos que salen con el mismo ángulo pero a tres alturas distintas, una es  $y_0 = 0,5m$ , como en las gráficas anteriores, y las otras dos están dadas por  $y'_0 = y_0 \pm 10cm$ . En la gráfica es evidente que los rayos son muy similares. Para analizar este hecho consideremos un cambio en la altura inicial de la forma:  $y'_0 = y_0 \pm \epsilon$ . El índice en esta nueva altura es:  $n'_i = n_i \pm \alpha\epsilon$ . Si los rayos salen con el mismo ángulo, de la ecuación



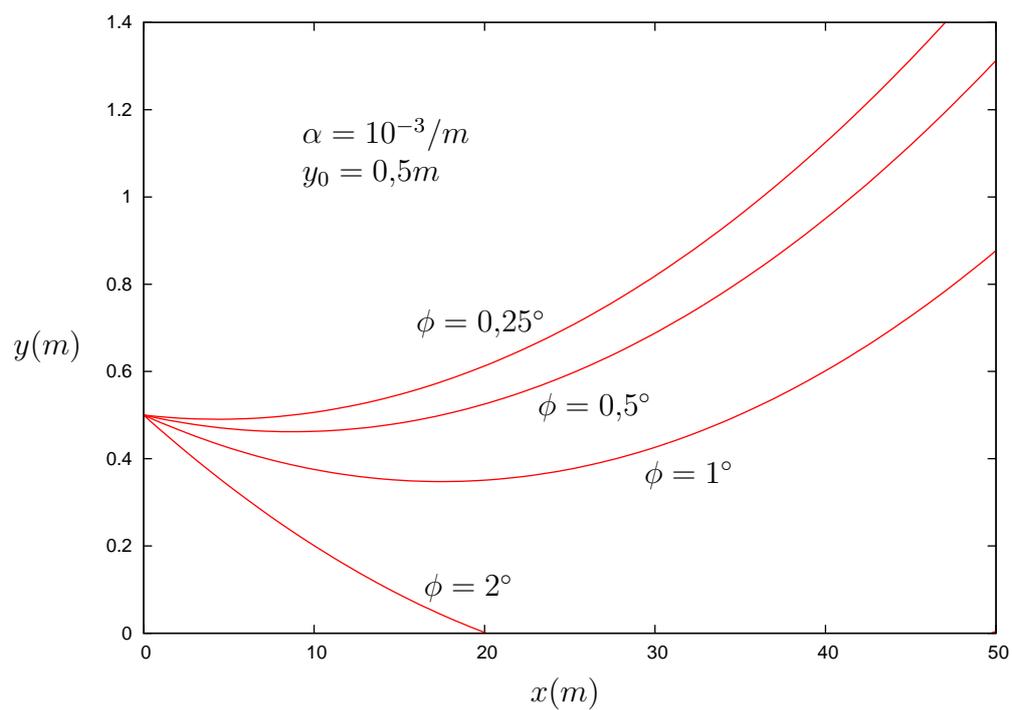
**Figura 2.5:** Rayos de luz para distintos valores de  $\alpha$ .

(2.77), encontramos que la nueva distancia donde se alcanza el mínimo es:

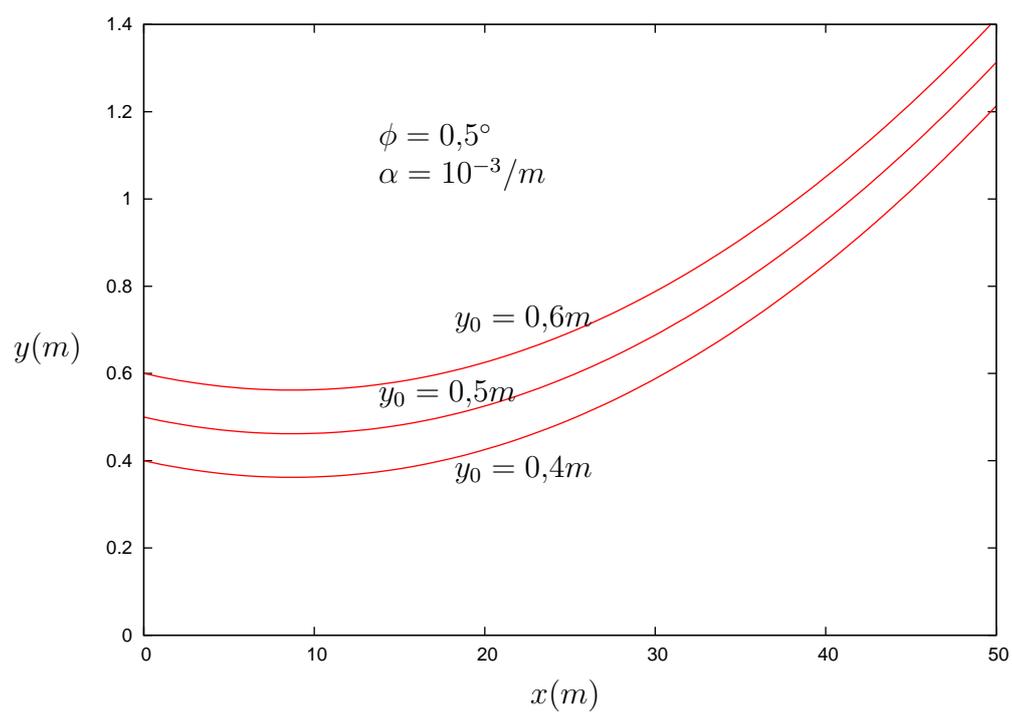
$$x'_m = \frac{n'_i}{n_i} x_m = \left(1 \pm \frac{\alpha \epsilon}{n_i}\right) x_m \quad (2.80)$$

de donde es evidente que si  $\alpha$  es muy chica, como es nuestro caso, y  $\epsilon$  no es muy grande, el mínimo se alcanza prácticamente a la misma distancia. De igual modo podemos encontrar que la otra constante también cumple:  $A' = (1 \pm \alpha \epsilon / n_i) A$ , con lo que concluimos que, para alturas cercanas, los rayos que salen con el mismo ángulo son prácticamente paralelos.

En este ejemplo nos hemos concentrado en el reflejo de los autos, pero cualquier rayo que cumpla con las condiciones generará un espejismo independientemente de donde provenga. Si el rayo proviene de una montaña lejana el observador verá el reflejo de la montaña en el piso, y si el rayo viene del cielo en el horizonte, el reflejo del cielo aparecerá en el suelo. Justamente este último caso es el origen de los aparentes cuerpos de agua sobre el asfalto.



**Figura 2.6:** Rayos de luz para distintos valores de  $\phi$ .



**Figura 2.7:** Rayos de luz para distintos valores de  $y_0$ .

# Capítulo 3

## Medios anisotrópicos

Como mencionamos en la Sección 1.2, la polarización y magnetización se deben a que, cuando un medio material está expuesto a campos externos, las cargas dentro del medio se redistribuyen de tal modo que pueden describirse como densidades de dipolos eléctricos y magnéticos. Los dipolos, como es su naturaleza, querrán alinearse con los campos externos, pero en algunos materiales la propia estructura del medio impide este alineamiento, e impone la dirección en la que se orientan los dipolos. La orientación que establece la estructura del medio depende, a su vez, de la dirección de los campos externos. En general, estos materiales son conocidos como *medios anisotrópicos*, y el fenómeno está comúnmente asociado a estructuras cristalinas; incluso, en algunos contextos, su estudio es conocido simplemente como óptica de cristales.

Al observar las ecuaciones (1.21) podemos darnos cuenta que, si las susceptibilidades  $\chi_e$  y  $\chi_m$  son funciones escalares, la polarización está necesariamente en dirección del campo eléctrico y la magnetización, en dirección del campo magnético. Esto significa que dos susceptibilidades escalares no pueden dar cuenta de los fenómenos anisotrópicos. Si, en principio, la respuesta del medio puede estar en cualquier dirección, cada componente de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$  debe depender de las tres componentes del campo eléctrico y magnético respectivamente; esto lo podemos escribir como:

$$P_i(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij}^e E_j(\mathbf{r}, \omega) \quad M_i(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{j=1}^3 \chi_{ij}^m B_j(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.1)$$

Al tener tres susceptibilidades por componente, tenemos nueve funciones asociadas a la respuesta eléctrica  $\mathbf{P}$  y nueve asociadas a la respuesta magnética  $\mathbf{M}$ . Para un medio anisotrópico necesitamos entonces dieciocho susceptibilidades, en vez de las dos que necesitábamos para un medio isotrópico (cuando la respuesta siempre es en dirección de los campos). Estas funciones forman las componentes de dos tensores de segundo rango:  $\bar{\bar{\chi}}_e(\mathbf{r}, \omega)$  y  $\bar{\bar{\chi}}_m(\mathbf{r}, \omega)$  que identificamos como los tensores de susceptibilidad eléctrica y magnética. Usando estos tensores podemos escribir la respuesta anisotrópica (3.1) como:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \bar{\bar{\chi}}_e \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\mu_0} \bar{\bar{\chi}}_m \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.2)$$

Esta expresión es un caso particular de la expresión general (1.21), por lo que podemos rescatar muchos de los resultados que obtuvimos en las secciones anteriores, donde no hayamos supuesto explícitamente que las susceptibilidades hayan sido cantidades escalares o tensoriales. Por ejemplo, podemos notar de la Sección 1.2.2 que, al definir la polarización y la magnetización como un producto en el espacio de frecuencias, los campos correspondientes como función del tiempo (que se obtienen aplicando la transformada inversa de Fourier) provienen de un modelo impulso-respuesta donde los campos externos son el impulso y la respuesta resultante es la polarización  $\mathbf{P}$  y la magnetización  $\mathbf{M}$ . Recordemos también que esto implicó que las susceptibilidades son, en general, cantidades complejas; este hecho se cumple ahora para cada componente de los tensores  $\bar{\bar{\chi}}_e(\mathbf{r}, \omega)$  y  $\bar{\bar{\chi}}_m(\mathbf{r}, \omega)$ .

De nuevo, como en la Sección 1.2.2, podemos definir las propiedades del medio como:

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = (\mathbf{I} + \bar{\bar{\chi}}_e) \quad \bar{\bar{\mu}} = (\mathbf{I} - \bar{\bar{\chi}}_m)^{-1} \quad (3.3)$$

donde ahora  $\mathbf{I}$  representa el tensor identidad de segundo rango. Con estas propiedades tensoriales podemos encontrar directamente los campos auxiliares en medios anisotrópicos:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \bar{\bar{\varepsilon}} \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \bar{\bar{\mu}} \mathbf{H} \quad (3.4)$$

Notemos de estas expresiones que, debido a que tenemos propiedades tensoriales, en general,  $\mathbf{D}$  no es paralelo a  $\mathbf{E}$ , ni  $\mathbf{B}$  es paralelo a  $\mathbf{H}$ . Como

consecuencia de esto, a diferencia del caso isotrópico, la dirección del vector de onda (que describe los frentes de onda) no coincide, en general, con la dirección del vector de Poynting (que describe el transporte de energía), esto es:

$$\mathbf{k} \nparallel \mathbf{S} \quad (3.5)$$

De la propia definición del vector de Poynting ( $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ) vemos que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son paralelos al plano definido por  $\mathbf{S}$ ; por otro lado, de las ecuaciones de Maxwell (3.11), vemos que  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  deben ser paralelos al plano definido por  $\mathbf{k}$ . Pero, como vimos en (3.4), la dirección de  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  no coincide con la de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ ; esto es: en general no son coplanares, y, por tanto,  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{S}$  no pueden describir el mismo plano. Esto es simplemente otro modo de decir (3.5). Debido a que los rayos de luz están definidos como las líneas de flujo de energía, coinciden con la dirección del vector de Poynting y, en el caso anisotrópico, no pueden ser pensados como perpendiculares a los frentes de onda. *Esto invalida la ecuación para los rayos* (2.40) ya que ésta implica que los rayos coinciden con la dirección del vector de onda (el resultado surgió de (2.17)). En esta tesis no nos ocuparemos de describir los rayos de luz para medios anisotrópicos generales, desarrollaremos el tema únicamente para el caso particular de la siguiente sección.

### 3.1. Propiedades materiales tensoriales

Cualquier tensor de segundo rango puede ser representado como una matriz de  $3 \times 3$ . Con esto podemos escribir todas las componentes de las propiedades materiales definidas en (3.3) como:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \bar{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Como mencionamos en la sección anterior, las entradas de estas matrices son, en general, complejas. En la Sección 1.2.3, encontramos que el promedio temporal de la ecuación (1.30) representa la absorción de energía eléctrica dentro del medio material. Este resultado sigue siendo válido para el caso anisotrópico, por lo que recuperamos la expresión:

$$\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rangle = \frac{i\omega\epsilon_0}{4} (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^*) \cdot \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* \quad (3.7)$$

donde, en este caso, \* denota el transpuesto conjugado. Como vimos en la propia Sección 1.2.3, el caso magnético es idéntico, y, por tanto, podemos concluir que no habrá absorción de energía en el medio si se cumple la condición:

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^* \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}^* \quad (3.8)$$

esto es, si las propiedades materiales se pueden expresar como matrices Hermitianas (en términos de los índices:  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^*$ ). Como toda matriz se puede separar en una parte Hermitiana y una anti-Hermitiana, en este caso, a diferencia de (1.34), es la parte anti-Hermitiana la que está ligada a la absorción de energía, ya que ésta debe anularse para que podamos asegurar que el medio es no-absorbente.

Si no tenemos un campo magnético externo, esto es, distinto del campo magnético asociado a la onda electromagnética (lo que excluye la actividad óptica natural, por ejemplo) las propiedades del medio son, en general, tensores simétricos:

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^T \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}^T \quad (3.9)$$

donde el superíndice T indica la matriz transpuesta. Este hecho se cumple para entradas complejas o reales (en ausencia de campo magnético externo). No demostraremos este resultado, pero vale la pena mencionar que es una consecuencia\* del balance de energía (1.12). Notemos que esto implica que, en este caso, un medio no-absorbedor (que cumple, además, con (3.8)) tiene solamente entradas reales ( $\epsilon_{ij}^* = \epsilon_{ji} = \epsilon_{ij}$ ). En este caso\*\*, por tanto, podemos asegurar que siempre se puede encontrar un sistema coordinado (el que forman los eigenvectores de las matrices (3.6)) en el que las matrices (3.6) son diagonales\*\*\*:

---

\*El resultado se sigue de las llamadas relaciones de Onsager, que son relevantes en la termodinámica fuera de equilibrio [20].

\*\*Suponiendo la ausencia de un campo magnético adicional, pero sin suponer necesariamente que el medio es no-absorbedor (Hermitiano).

\*\*\*Este resultado depende fuertemente de que tengamos matrices reales, las matrices con entradas complejas no son, en general, diagonalizables [24].

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad \bar{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Esto reduce drásticamente las funciones que necesitábamos, de dieciocho a sólo seis, tres para la respuesta eléctrica y tres para la respuesta magnética. Los ejes del sistema coordenado donde las matrices son diagonales son conocidos como los *ejes principales*, y asumiremos siempre que estamos en estos ejes. Cuando tenemos anisotropía eléctrica y magnética, en general, no podemos asegurar que  $\bar{\bar{\epsilon}}$  y  $\bar{\bar{\mu}}$  sean simultáneamente diagonalizables, esto es porque, potencialmente, las matrices en (3.6) no tienen los mismos eigenvectores. En esta tesis nos interesa en particular el caso  $\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\mu}}$ , donde es evidente que podemos diagonalizar simultáneamente. En la Sección 3.3 desarrollaremos este caso en detalle.

## 3.2. La relación de dispersión anisotrópica

Una vez que hemos establecido como describiremos los medios anisotrópicos, para analizar el comportamiento de los campos en este tipo de medios, debemos recurrir a las leyes fundamentales del electromagnetismo, esto es: a las ecuaciones de Maxwell. Del mismo modo que en el Capítulo 2, asumiremos que los campos externos son ondas monocromáticas cuasi-planas de la forma (2.4) con una fase dada por:  $\phi = \ell(\mathbf{r}) - \omega t$ . Aplicando la aproximación de la óptica geométrica ( $\lambda_0 \rightarrow 0$ ) encontramos que, en este caso, las ecuaciones de Maxwell están dadas por (2.8) y (2.9). De nuevo, al analizar el modo en el que obtuvimos estas ecuaciones, podemos notar que nunca supusimos explícitamente que las propiedades materiales fueran cantidades escalares o tensoriales, lo que quiere decir que las ecuaciones siguen siendo válidas en el caso anisotrópico. En esta sección aprovechamos la interpretación del vector de onda local:  $\nabla\ell(\mathbf{r}) = k_0\mathbf{k}$ , para simplificar notación. Tomando esto en cuenta, reescribimos las ecuaciones de Maxwell (2.8) y (2.9) como:

$$\mathbf{k} \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \mathbf{E}_0 = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \bar{\bar{\mu}} \mathbf{H}_0 = 0 \quad (3.11)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 - \omega\mu_0\bar{\bar{\mu}} \mathbf{H}_0 = 0 \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 + \omega\epsilon_0\bar{\bar{\epsilon}} \mathbf{E}_0 = 0 \quad (3.12)$$

Al despejar  $\mathbf{H}_0$  del lado izquierdo de (3.12):

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\omega\bar{\mu}_0} \bar{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \quad (3.13)$$

y sustituir en el lado derecho, obtenemos:

$$\mathbf{k} \times \bar{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{E}_0 = 0 \quad (3.14)$$

Podemos escribir esta ecuación en términos de un solo operador, que actúe sobre  $\mathbf{E}_0$ , como:  $\hat{K}\mathbf{E}_0 = 0$ . Para esto definimos primero un operador que funciona como  $\mathbf{k} \times$ :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

con lo que (3.14) queda reescrito como:

$$\hat{K}\mathbf{E}_0 = (M\bar{\boldsymbol{\mu}}^{-1}M + k_0^2\bar{\boldsymbol{\epsilon}}) \mathbf{E}_0 = 0 \quad (3.16)$$

Esta ecuación significa que el operador  $\hat{K}$  debe ser singular (para  $\mathbf{E}_0 \neq 0$ ) y por tanto debe tener determinante cero:

$$\det(\hat{K}) = \det(M\bar{\boldsymbol{\mu}}^{-1}M + k_0^2\bar{\boldsymbol{\epsilon}}) = 0 \quad (3.17)$$

Esta es la ecuación que hemos encontrado a partir de las ecuaciones de Maxwell. Para determinar (3.17) supondremos que  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  y  $\bar{\boldsymbol{\mu}}$  tienen los mismos eigenvectores y usaremos estos vectores como sistema de coordenadas (ejes principales). Como vimos en la sección anterior esto implica que tenemos dos matrices diagonales:

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Usando estas matrices y el operador  $M$  podemos escribir explícitamente las componentes del operador  $\hat{K}$ :

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} k_0^2 \varepsilon_x - \frac{\mu_y k_y^2 + \mu_z k_z^2}{\mu_y \mu_z} & \frac{k_x k_y}{\mu_z} & \frac{k_x k_z}{\mu_y} \\ \frac{k_x k_y}{\mu_z} & k_0^2 \varepsilon_y - \frac{\mu_x k_x^2 + \mu_z k_z^2}{\mu_x \mu_z} & \frac{k_y k_z}{\mu_x} \\ \frac{k_x k_z}{\mu_y} & \frac{k_y k_z}{\mu_x} & k_0^2 \varepsilon_z - \frac{\mu_x k_x^2 + \mu_y k_y^2}{\mu_x \mu_y} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Para encontrar el determinante de este operador notemos que está representado por una matriz simétrica, y para cualquier matriz simétrica A, si denotamos las entradas como  $a_{ij}$ , el determinante puede escribirse como:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - (a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{31}^2 + a_{33}a_{12}^2) \quad (3.20)$$

Aplicando directamente esta fórmula encontramos que en nuestro caso:

$$\begin{aligned} \det(\hat{K}) &= (k_0^2 \varepsilon_x - \mu_x \Delta_x |\mu|^{-1}) (k_0^2 \varepsilon_y - \mu_y \Delta_y |\mu|^{-1}) (k_0^2 \varepsilon_z - \mu_z \Delta_z |\mu|^{-1}) + 2k_x^2 k_y^2 k_z^2 |\mu|^{-1} \\ &- \left[ (k_0^2 \varepsilon_x - \mu_x \Delta_x |\mu|^{-1}) \frac{k_y^2 k_z^2}{\mu_x^2} + (k_0^2 \varepsilon_y - \mu_y \Delta_y |\mu|^{-1}) \frac{k_x^2 k_y^2}{\mu_y^2} (k_0^2 \varepsilon_z - \mu_z \Delta_z |\mu|^{-1}) \frac{k_x^2 k_y^2}{\mu_z^2} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde  $|\mu| = \det(\mu) = \mu_x \mu_y \mu_z$ . También, para simplificar el desarrollo, definimos las cantidades:

$$\Delta_x = \mu_y k_y^2 + \mu_z k_z^2 \quad \Delta_y = \mu_x k_x^2 + \mu_z k_z^2 \quad \Delta_z = \mu_x k_x^2 + \mu_y k_y^2 \quad (3.22)$$

así mismo denotaremos:  $|\varepsilon| = \det(\varepsilon) = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$ . Desarrollamos el determinante que hemos obtenido, multiplicando por  $|\mu|$  y acomodando términos según la potencia de  $k_0$  que los multiplique:

$$\begin{aligned}
|\mu| \det(\hat{\mathbf{K}}) &= k_0^6 |\varepsilon| |\mu| - k_0^4 |\varepsilon| \left( \frac{\mu_x}{\varepsilon_x} \Delta_x + \frac{\mu_y}{\varepsilon_y} \Delta_y + \frac{\mu_z}{\varepsilon_z} \Delta_z \right) \\
+ k_0^2 &\left( \frac{\varepsilon_x}{\mu_x} (\Delta_y \Delta_z - \frac{|\mu|}{\mu_x} k_y^2 k_z^2) + \frac{\varepsilon_y}{\mu_y} (\Delta_x \Delta_z - \frac{|\mu|}{\mu_y} k_x^2 k_z^2) + \frac{\varepsilon_z}{\mu_z} (\Delta_x \Delta_y - \frac{|\mu|}{\mu_z} k_x^2 k_y^2) \right) \\
&+ \left[ \frac{k_y^2 k_z^2}{\mu_x} \Delta_x + \frac{k_x^2 k_z^2}{\mu_y} \Delta_y + \frac{k_x^2 k_y^2}{\mu_z} \Delta_z + 2k_x^2 k_y^2 k_z^2 - \frac{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}{|\mu|} \right]
\end{aligned}$$

Si se desarrollan los términos dentro del paréntesis cuadrado, se puede verificar que estos se anulan. Estos términos eran los únicos donde había potencias de sexto grado, por lo que la expresión que hemos obtenido se reduce a una ecuación de cuarto grado. Esto tiene consecuencias físicas ya que, dada una dirección de propagación, esperamos a lo más dos soluciones para  $|\mathbf{k}|^2$  en vez de las tres que una ecuación de sexto grado permitiría. Por último, para escribir el determinante de un modo conciso, definimos las cantidades:

$$\eta_x = \varepsilon_y \mu_z + \varepsilon_z \mu_y \quad \eta_y = \varepsilon_x \mu_z + \varepsilon_z \mu_x \quad \eta_z = \varepsilon_x \mu_y + \varepsilon_y \mu_x \quad (3.23)$$

con lo que la ecuación (3.17) se reduce a:

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon_x \mu_x k_x^4 + \varepsilon_y \mu_y k_y^4 + \varepsilon_z \mu_z k_z^4) - k_0^2 (\eta_x \varepsilon_x \mu_x k_x^2 + \eta_y \varepsilon_y \mu_y k_y^2 + \eta_z \varepsilon_z \mu_z k_z^2) + \\
&(\eta_x k_y^2 k_z^2 + \eta_y k_x^2 k_z^2 + \eta_z k_x^2 k_y^2) + k_0^4 |\varepsilon| |\mu| = 0
\end{aligned} \quad (3.24)$$

si definimos la matriz:  $\eta = \text{diag}(\eta_x, \eta_y, \eta_z)$ , la expresión se puede escribir en notación matricial como:

$$(\mathbf{k} \cdot \bar{\varepsilon} \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \bar{\mu} \mathbf{k}) - k_0^2 (\bar{\varepsilon} \mathbf{k} \cdot \eta \bar{\mu} \mathbf{k}) + k_0^4 |\varepsilon| |\mu| = 0 \quad (3.25)$$

Esta es la *relación de dispersión anisotrópica* y, al ser un polinomio de cuarto grado, representa, en general, una superficie de cuarto grado en el espacio  $(k_x, k_y, k_z)$ . En algunos casos este tipo superficies se pueden factorizar como dos superficies cuadráticas. Los puntos sobre la superficie se corresponden con los valores posibles para el vector de onda local  $\mathbf{k}$ , notemos que la superficie misma está determinada por las propiedades del medio y la frecuencia. Usualmente, en las referencias estándares (por ejemplo: [20][22]) se aborda el problema de los medios anisotrópicos suponiendo que los medios son no magnéticos ( $\mu = 1$ ), por lo que, la expresión que hemos obtenido, es más

general que la que se encuentra en estas referencias. Sin embargo, es importante notar que hemos supuesto que  $\bar{\epsilon}$  y  $\bar{\mu}$  son simultáneamente diagonales, por lo que (3.25) no es la expresión más general para el caso anisotrópico.

### 3.3. El caso no-magnético ( $\mu = 1$ )

A partir de la relación de dispersión que hemos obtenido, podemos obtener algunas propiedades esenciales de los medios anisotrópicos. Primero analicemos brevemente uno de los casos más estudiados, el llamado *medio uniaxial*<sup>\*\*\*\*</sup>. Este tipo de medios son no-magnéticos ( $\bar{\mu} = \mathbf{I}$ ) y están caracterizados por un tensor dieléctrico de la forma  $\bar{\epsilon} = \text{diag}(\epsilon_x, \epsilon_x, \epsilon_z)$ ; esto es: sólo con dos componentes independientes. En este caso:  $\eta_x = \eta_y = \epsilon_x + \epsilon_z$ ,  $\eta_z = 2\epsilon_x$ ; con lo que, al sustituir en (3.25), tenemos:

$$(\mathbf{k} \cdot \bar{\epsilon} \mathbf{k})|\mathbf{k}|^2 - k_0^2 ((\epsilon_x^2 + \epsilon_x \epsilon_z)k_x^2 + (\epsilon_x^2 + \epsilon_x \epsilon_z)k_y^2 + 2\epsilon_x \epsilon_z k_z^2) + k_0^4 |\epsilon| = 0 \quad (3.26)$$

y dividiendo por  $|\epsilon| = \epsilon_x^2 \epsilon_z$  se obtiene:

$$\left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{\epsilon_z} + \frac{k_z^2}{\epsilon_x} \right) \frac{|\mathbf{k}|^2}{\epsilon_x} - k_0^2 \left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{\epsilon_z} + \frac{k_z^2}{\epsilon_x} + \frac{|\mathbf{k}|^2}{\epsilon_x} \right) + k_0^4 = 0 \quad (3.27)$$

que podemos factorizar como:

$$\left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{\epsilon_z} + \frac{k_z^2}{\epsilon_x} - k_0^2 \right) \left( \frac{|\mathbf{k}|^2}{\epsilon_x} - k_0^2 \right) = 0 \quad (3.28)$$

En esta expresión vemos claramente que, dada una dirección de propagación, tenemos dos soluciones posibles para  $|\mathbf{k}|^2$ , y por tanto tendremos dos posibles\* velocidades de fase ( $v = \omega/|\mathbf{k}|$ ). Como consecuencia, cuando un rayo llega al medio desde el vacío, las dos velocidades de fase se traducen en dos direcciones de propagación distintas, y el rayo se “parte en dos” al propagarse dentro del medio. Este fenómeno es conocido como *birrefringencia* o refracción doble, y es una de las propiedades más importantes de los medios anisotrópicos. En

\*\*\*\* Son medios uniaxiales, por ejemplo, los cristales con estructura hexagonal o tetragonal.

\* Consideramos solamente las soluciones positivas. Las otras dos soluciones con  $-|\mathbf{k}|$  describen ondas que viajan en la dirección opuesta.

el caso uniaxial podemos reconocer los dos tipos de superficies cuadráticas que están representados\*\* en (3.28): un elipsoide en el paréntesis izquierdo y una esfera en el derecho. En el caso de la esfera,  $|\mathbf{k}|$  no depende de la dirección de propagación (es simplemente el radio de la esfera) y, por tanto, se puede escribir como en el caso isotrópico:  $|\mathbf{k}| = k_0 n_o$ , donde es común definir:  $n_o^2 = \varepsilon_x$ . Por esta razón se dice que la esfera describe *rayos ordinarios*. Por el contrario, en el caso del elipsoide, la magnitud de  $\mathbf{k}$  depende de su dirección y, a modo de contraste, se dice que describe *rayos extraordinarios*. Bajo este esquema se dice que un rayo que incide sobre un medio uniaxial se divide en un rayo ordinario y uno extraordinario. Para otro tipo de medios anisotrópicos, sin embargo, los dos rayos resultan “extraordinarios”, esto es: dependen de la dirección del vector de onda.

### 3.4. El caso $\bar{\varepsilon} = \bar{\mu}$

El objetivo principal de esta tesis es describir los medios materiales que se obtienen a partir de la Óptica de Transformación (Capítulo 5). Estos materiales son, en general, anisotrópicos, y, además, deben cumplir con tener permitividad eléctrica y permeabilidad magnética idénticas, esto es:  $\bar{\varepsilon} = \bar{\mu}$ . Debemos remarcar de antemano que, además del vacío, ningún material en la naturaleza presenta esta característica. Incluso veremos en el Capítulo 5 que, un medio con esta propiedad es, de algún modo, análogo al vacío. A pesar de esto, nuevos desarrollos en la ciencia de materiales, especialmente los relacionados con los llamados metamateriales (Capítulo 7), prometen fabricar medios materiales cuyas propiedades efectivas pueden cumplir con estos requerimientos.

En esta sección nos ocuparemos principalmente de encontrar las características esenciales de estos materiales a partir de la relación de dispersión anisotrópica (3.25). Si tenemos  $\bar{\varepsilon} = \bar{\mu}$  entonces las constantes  $\eta$  de la sección anterior están dadas por:  $\eta_x = 2\varepsilon_y\varepsilon_z$ ,  $\eta_y = 2\varepsilon_x\varepsilon_z$ ,  $\eta_z = 2\varepsilon_x\varepsilon_y$ , con lo que (3.25) se reduce a:

$$(\mathbf{k} \cdot \bar{\varepsilon} \mathbf{k})^2 - 2|\varepsilon|k_0^2(\varepsilon_x k_x^2 + \varepsilon_y k_y^2 + \varepsilon_z k_z^2) + |\varepsilon|^2 k_0^4 = 0 \quad (3.29)$$

que, al ser un binomio cuadrado perfecto, se puede escribir como:

---

\*\*Suponemos para esto que:  $\varepsilon_x, \varepsilon_z > 0$ , y además que son cantidades reales. Otros casos resultan en distintas superficies cuadráticas.

$$(\mathbf{k} \cdot \bar{\epsilon} \mathbf{k} - |\epsilon| k_0^2)^2 = 0 \quad (3.30)$$

Encontramos entonces que, en este caso, tenemos una solución doble y, por tanto, la ecuación general de cuarto grado se reduce a una de segundo grado. Esto significa que este tipo de medios *no presentan birrefringencia* y, dada una dirección de propagación, tienen una única velocidad de fase (una única solución para  $|\mathbf{k}|^2$ ). Explicitando los términos vemos que, en este caso, la relación de dispersión representa una única superficie cuadrática dada por:

$$\epsilon_x k_x^2 + \epsilon_y k_y^2 + \epsilon_z k_z^2 - |\epsilon| k_0^2 = 0 \quad (3.31)$$

Si las entradas de  $\bar{\epsilon}$  son positivas la superficie representa un elipsoide, cuya ecuación es:

$$\frac{k_x^2}{\alpha_x^2} + \frac{k_y^2}{\alpha_y^2} + \frac{k_z^2}{\alpha_z^2} = 1 \quad (3.32)$$

donde los ejes del elipsoide están dados por:

$$\alpha_x^2 = k_0^2 \frac{|\epsilon|}{\epsilon_x} \quad \alpha_y^2 = k_0^2 \frac{|\epsilon|}{\epsilon_y} \quad \alpha_z^2 = k_0^2 \frac{|\epsilon|}{\epsilon_z} \quad (3.33)$$

Con este elipsoide podemos encontrar la solución para  $|\mathbf{k}|$ , dada una dirección de propagación, simplemente encontrando la intersección de esta dirección con el elipsoide. Si las entradas de  $\bar{\epsilon}$  son negativas o complejas, tendremos en general, otro tipo de superficie cuadrática. A partir del elipsoide podemos hacer una observación que nos servirá como preámbulo a los capítulos siguientes. Si re-escalamos los ejes del espacio  $(k_x, k_y, k_z)$  usando los ejes del elipsoide, esto es, si establecemos una transformación de coordenadas dada por:

$$k'_x = \frac{k_0 k_x}{\alpha_x} \quad k'_y = \frac{k_0 k_y}{\alpha_y} \quad k'_z = \frac{k_0 k_z}{\alpha_z} \quad (3.34)$$

entonces, en las nuevas coordenadas  $(k'_x, k'_y, k'_z)$ , la ecuación (3.32) se reduce a una esfera y (3.31) representa una onda propagándose en el vacío ( $|\mathbf{k}'| = k_0$ ). Esto es una consecuencia directa de la condición  $\bar{\epsilon} = \bar{\mu}$ , y será una de las ideas esenciales que desarrollaremos con más generalidad en el Capítulo 5.

Tal y como concluimos en la sección anterior, en el caso anisotrópico, no podemos dar uso de la ecuación para los rayos (2.40). El principio de Fermat, sin embargo, sigue siendo válido y recordemos que fue a partir de este principio que desarrollamos la óptica Hamiltoniana. Aunque las ecuaciones que obtuvimos en las Sección 2.2 también se limitan al caso isotrópico, tomaremos a modo de “inspiración” el resultado (2.59) donde fue posible escribir el Hamiltoniano como la relación de dispersión. A partir de esta idea y (3.31) proponemos para este caso:

$$H(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\varepsilon_x k_x^2 + \varepsilon_y k_y^2 + \varepsilon_z k_z^2 - |\varepsilon| k_0^2) \quad (3.35)$$

Recordemos de la Sección 2.2 que el Hamiltoniano tiene asociadas dos ecuaciones de movimiento, una describe las trayectorias de los rayos y la otra el cambio del momento óptico sobre estas trayectorias. La ecuación que describe a los rayos se corresponde con el gradiente con respecto al vector de onda de la función  $H(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ . Para el Hamiltoniano que hemos propuesto, podemos calcular directamente que este gradiente es:

$$\nabla_k H = \bar{\varepsilon} \mathbf{k} \quad (3.36)$$

donde  $\nabla_k = (\partial/\partial k_x, \partial/\partial k_y, \partial/\partial k_z)$ . A partir de las ecuaciones de Maxwell (3.11) encontramos que este vector cumple con:

$$\nabla_k H \cdot \mathbf{E} = \bar{\varepsilon} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \bar{\varepsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.37)$$

$$\nabla_k H \cdot \mathbf{H} = \bar{\mu} \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{k} \cdot \bar{\mu} \mathbf{H} = 0$$

donde usamos explícitamente que  $\bar{\varepsilon} = \bar{\mu}$  están representados por una matriz diagonal (el resultado sería válido, en general, para propiedades Hermitianas). Esto significa que (3.36) es perpendicular tanto a  $\mathbf{E}$  como a  $\mathbf{H}$ ; con lo que, recordando la definición del vector de Poynting ( $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ), podemos concluir que:

$$\nabla_k H \parallel \mathbf{S} \quad (3.38)$$

Debido a que los rayos están en dirección del vector Poynting, éste es un primer indicio de que hemos definido un Hamiltoniano adecuado, ya que implica que podemos usar  $\nabla_k H$  para describir las trayectorias de luz, estableciendo la ecuación:

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \beta \nabla_k H \quad (3.39)$$

donde  $\beta(\mathbf{r})$  es una razón de proporcionalidad, por lo que, en principio,  $u$  puede ser cualquier parámetro.

Como la longitud de arco es el parámetro de referencia más importante (ver Apéndice 1), determinaremos el valor de  $\beta$  para este caso. Denotando:  $\dot{\mathbf{r}} = d/ds$ , tenemos:

$$\dot{\mathbf{r}} = \beta \nabla_k H = \beta \bar{\varepsilon} \mathbf{k} \quad |\dot{\mathbf{r}}| = \beta |\bar{\varepsilon} \mathbf{k}| = 1 \quad (3.40)$$

En este caso,  $\dot{\mathbf{r}}$  es un vector unitario en dirección del vector de Poynting, por lo que, de (3.31), la proyección de  $\mathbf{k}$  sobre  $\mathbf{S}$  resulta ser:

$$k_S = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{S}|} = \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \beta \mathbf{k} \cdot \bar{\varepsilon} \mathbf{k} = \beta k_0^2 |\varepsilon| \quad (3.41)$$

con lo que, en términos de esta proyección, encontramos:

$$\beta = \frac{k_S}{k_0^2 |\varepsilon|} \quad (3.42)$$

Este es el valor que debe tener  $\beta$  en (3.39) para que la curva esté parametrizada por longitud de arco ( $u = s$ ).

La proyección  $k_S$  no puede depender del parámetro de la curva, y por tanto debe poder expresarse sin hacer referencia a  $\beta$ . Para esto, primero invertimos (3.40):

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\beta} \bar{\varepsilon}^{-1} \dot{\mathbf{r}} \quad (3.43)$$

con lo que la proyección  $k_S$  se puede expresar también como:

$$k_S = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{\beta} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \bar{\varepsilon}^{-1} \dot{\mathbf{r}}) = \frac{k_0^2 |\varepsilon|}{k_S} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \bar{\varepsilon}^{-1} \dot{\mathbf{r}}) \quad (3.44)$$

que implica:

$$k_S^2 = k_0^2 (|\varepsilon| \dot{\mathbf{r}} \cdot \bar{\varepsilon}^{-1} \dot{\mathbf{r}}) \quad (3.45)$$

En la Sección 5.3 mostraremos que la proyección  $k_S$  representa el cambio de la fase sobre los rayos de luz.

Hasta ahora no hemos demostrado todavía que (3.35) sea efectivamente el Hamiltoniano correcto para nuestro caso. En principio, sólo hemos establecido una de las dos ecuaciones de movimiento, y, dar sentido a ambas ecuaciones (falta:  $d\mathbf{k}/du = \beta\nabla H$ ), es crucial ya que están acopladas. Para esto, sin embargo, nos esperaremos hasta el Capítulo 5 donde daremos una nueva interpretación al tensor  $\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\mu}}$ , que nos permitirá dar un nuevo sentido al significado de los rayos de luz.

# Capítulo 4

## Coordenadas y Transformaciones

La teoría de la Óptica de Transformación surge de una reinterpretación de las ecuaciones de Maxwell en coordenadas generalizadas, y, por esta razón, para entender en detalle los resultados de esta teoría, en este capítulo desarrollaremos las ideas básicas detrás de las coordenadas generalizadas y las transformaciones de coordenadas. Estos temas son objetos de estudio de la Geometría Diferencial [25][26][27], y, en física, están comúnmente asociados con la teoría de la Relatividad General [28].

A partir de este capítulo usaremos la *convención de suma de Einstein*. Esta convención dice que, si un mismo índice aparece dos veces en una expresión, una vez arriba (como superíndice) y otra abajo (como subíndice), entonces hay una suma implícita sobre el índice. Para ejemplificar esta convención pensemos en la expansión de un vector arbitrario  $\mathbf{a}$ . Dados 3 vectores linealmente independientes  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  podemos expresar  $\mathbf{a}$  como:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i = a^i \mathbf{e}_i \quad (4.1)$$

donde decimos que los vectores  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  forman una base y los números  $\{a^1, a^2, a^3\}$  son los componentes del vector  $\mathbf{a}$  relativos a dicha base. Notemos que hemos puesto el índice arriba a las componentes del vector y el índice abajo a los vectores en la base. En principio, esta distinción nos permite hacer la suma, ya que la definimos para índices repetidos sólo si uno aparece arriba y el otro abajo. Sin embargo, en las siguientes secciones veremos que,

debido a que las componentes de vectores y los vectores de la base son objetos fundamentalmente distintos, es importante distinguir entre ellos. Además, la posición de los índices nos permitirá escribir de un modo conveniente las reglas para los cambios de coordenadas.

## 4.1. Coordenadas Generalizadas

La posición de un punto en el espacio está caracterizada por 3 números: las coordenadas del punto. Estos números dependen del sistema de coordenadas que usemos: cartesianas, cilíndricas, esféricas, etc. Intuitivamente podemos pensar que un sistema de coordenadas  $\{x^1, x^2, x^3\}$  es un modo de etiquetar a cada punto del espacio. Para que el sistema coordenado tenga sentido, todos los puntos deben tener una etiqueta y ésta debe ser única.

Distintos sistemas coordenados asignarán distintas etiquetas a un mismo punto, lo que hace evidente que el punto mismo es independiente de la etiqueta que lo identifica. Esta independencia es especialmente importante cuando trabajamos con campos vectoriales, ya que éstos asignan un vector a cada punto del espacio, sin importar el modo en el estén etiquetados los puntos. A pesar de esto, las componentes de los vectores y la base en la que es conveniente representarlos dependen de la estructura del sistema coordenado, y es justo esta dependencia la que nos interesa desarrollar en general.

### 4.1.1. La base

Un modo de pensar al eje- $x$ , en un sistema cartesiano, es como la línea perpendicular al plano  $yz$ , que surge de dejar correr continuamente  $x$  manteniendo  $y, z = 0$ . Con esto en mente, llamemos a todas las líneas perpendiculares al plano  $yz$  las *líneas coordenadas* de  $x$ . Análogamente, llamemos a las líneas perpendiculares al plano  $xz$  las líneas coordenadas de  $y$ , y a las líneas perpendiculares al plano  $xy$ , las líneas coordenadas de  $z$ . Considerando estas líneas, si no nos fijamos en las etiquetas (coordenadas) de los puntos, no podríamos distinguir que punto es el origen, ya que por cualquier punto pasa una única línea coordenada de  $x$ , una de  $y$  y una de  $z$ , que forman un sistema de 3 ejes perpendiculares.

Estas ideas se pueden generalizar para un sistema de coordenadas arbitrario  $\{x^1, x^2, x^3\}$ . Si dejamos correr continuamente  $x^1$ , dejando  $x^2, x^3$  constantes, obtendremos alguna trayectoria en el espacio que llamaremos una *tra-*

vectorial coordinada de  $x^1$ . Por ejemplo, en coordenadas cilíndricas  $\{r, \theta, z\}$ , si dejamos  $r, z$  constantes y consideramos  $\theta$  continua, obtenemos un círculo de radio  $r$  a una altura  $z$  (ver Fig. 4.1a). Para caracterizar una trayectoria, en el caso general, tomemos un punto arbitrario  $O$  en el espacio, y con él construyamos un vector  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ , donde  $P = (x^1, x^2, x^3)$  es algún punto sobre una trayectoria de  $x^1$ . Si dejamos que  $x^1$  sea un parámetro continuo, manteniendo  $x^2, x^3$  constantes, tenemos que  $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$  es una curva que representa la trayectoria coordinada de  $x^1$  que pasa por  $P$ . Dos valores del parámetro:  $x^1, x^1 + \Delta x^1$  se corresponden entonces con dos puntos sobre la curva, y con ellos podemos construir un vector independiente de  $O$  como:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1 + \Delta x^1, x^2, x^3) - \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$$

Mientras más chica sea la cantidad  $\Delta x^1$ , más parecido será  $\Delta \mathbf{r}$  al vector tangente a la trayectoria de  $x^1$  en  $P$ ; y en el límite  $\Delta x^1 \rightarrow 0$ , la razón  $\Delta \mathbf{r}/\Delta x^1$  es exactamente:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1} \quad (4.2)$$

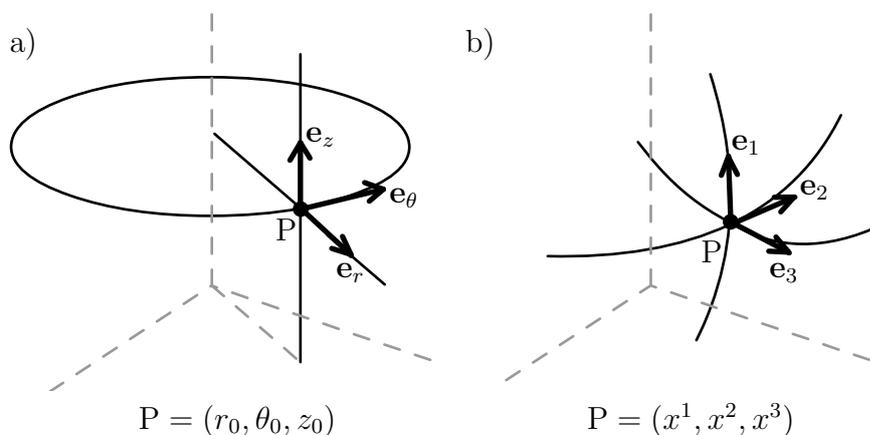
Esto define un vector tangente a la trayectoria coordinada de  $x^1$  en el punto  $P$ . Análogamente, para las otras dos coordenadas, podemos construir:

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^2} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^3}$$

Con lo que hemos encontrado una triada de vectores tangentes a las trayectorias coordinadas en el punto  $P$ . Con estos vectores podemos expandir cualquier vector  $\mathbf{a}$  como en (4.1) y establecer una base en cada punto del espacio, que surge “naturalmente” de la estructura del sistema coordinado.

Como construimos la base en el punto  $P$ , en general, *la base puede ser distinta para cada punto*, y, en principio, nada impide que los vectores  $\mathbf{e}_i$  puedan no ser unitarios ni ortogonales entre sí ( $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \neq \delta_{ij}$ ). Por esto, para que los vectores formen realmente una base necesitamos comprobar que sean independientes. Podemos encontrar una condición suficiente para esto, recordando que el volumen del paralelepípedo sustentado por 3 vectores está dado por:

$$V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \quad (4.3)$$



**Figura 4.1:** (a) Coordenadas cilíndricas: Si consideramos  $\theta$  continua con  $r = r_0, z = z_0$  obtenemos un círculo; con  $r$  continua y  $\theta = \theta_0, z = z_0$  una línea recta; y con  $z$  continua y  $r = r_0, \theta = \theta_0$  una recta perpendicular a la anterior. En este caso los vectores tangentes forman una base ortogonal. (b) Curvas coordenadas por un punto P en coordenadas generalizadas y los vectores tangentes correspondientes.

Si  $V \neq 0$  los vectores no son coplanares y podremos asegurar que establecen una base en cada punto. El factor  $V$  definido en (4.3) representa además un volumen natural inducido por la base\* y lo podemos pensar como una escala natural asociada a las coordenadas. Este volumen también puede ser expresado como el determinante de una matriz  $B$  cuyas filas son los vectores de la base:

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \det(B) \quad (4.4)$$

Este modo de escribir  $V$  nos será de utilidad más adelante. En términos de  $B$  la condición para que los vectores  $\mathbf{e}_i$  formen una base es:  $\det(B) \neq 0$ .

La definición (4.3) también nos permitirá establecer un *símbolo de permutación asociado a las coordenadas*. Recordemos que el triple producto vectorial es invariante ante una permutación par de los índices, esto es:

\*En principio  $V$  podría ser negativo, en cuyo caso se dice que la base es *izquierda*.

$$\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \quad (4.5)$$

Por otro lado, de las propiedades básicas del producto cruz<sup>\*\*</sup>, podemos notar que, bajo una permutación impar de los índices, obtendríamos  $-V$ , y si se repite algún índice tendríamos 0. Esta información puede ser condensada en la siguiente expresión:

$$\epsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \quad (4.6)$$

donde definimos  $\epsilon_{ijk}$  como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} V & (i, j, k) \text{ permutación par de } (1, 2, 3) \\ -V & (i, j, k) \text{ permutación impar de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{se repite algún índice} \end{cases} \quad (4.7)$$

Para explicitar que este símbolo está asociado a un sistema de coordenadas en particular, definimos  $\hat{\epsilon}_{ijk}$  como el caso  $V = 1$  en (4.7) (que es la definición del llamado tensor de Levi-Civita), y escribimos el símbolo de permutación asociado al sistema general  $\mathbf{e}_i$  en términos de este caso como:

$$\epsilon_{ijk} = V \hat{\epsilon}_{ijk} \quad (4.8)$$

El símbolo  $\hat{\epsilon}_{ijk}$  es independiente de las coordenadas y podemos pensarlo como el símbolo de permutación unitario. En particular coincide con ser el símbolo de permutación en coordenadas cartesianas.

### 4.1.2. La base dual

En un sistema coordenado generalizado, a diferencia de un sistema cartesiano, las componentes  $a^i$  en (4.1) no representan la proyección del vector  $\mathbf{a}$  en los vectores de la base. Esto es debido a que la base puede ser no-ortogonal ( $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \neq \delta_{ij}$ ). Este problema motiva a que definamos unos *nuevos vectores*  $\mathbf{e}^i$  con los que podamos obtener las componentes como un simple producto punto:

$$a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i = (a^j \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}^i \quad (4.9)$$

---

<sup>\*\*</sup>  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ , y anticonmutatividad:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

de esta definición\* es claro que los vectores  $\mathbf{e}^i$  deben cumplir:

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (4.10)$$

A partir de esta condición podemos encontrar una expresión para los nuevos vectores  $\mathbf{e}^i$  en términos de la base original:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{1}{V}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \quad \mathbf{e}^2 = \frac{1}{V}(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \quad \mathbf{e}^3 = \frac{1}{V}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \quad (4.11)$$

Basta sustituir en (4.10) para comprobar que estos vectores cumplen con nuestra definición, y que, dada una base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , el conjunto  $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$  es único. Además, usando una identidad vectorial conocida\*\* y la definición (4.3) podemos calcular:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3) &= \frac{1}{V^3}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot [(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)] \\ &= \frac{1}{V^3}[\mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)][\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)] = \frac{1}{V} \end{aligned} \quad (4.12)$$

como  $V \neq 0$ , los tres vectores son independientes, y, por tanto, cualquier vector puede ser expresado como una combinación lineal de ellos:

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^i \quad (4.13)$$

Esto quiere decir que hemos establecido una *nueva base* a partir de la base que obtuvimos “naturalmente” a partir de las coordenadas. Además, usando la propiedad (4.10), las nuevas componentes  $a_i$  se pueden obtener como una proyección del vector  $\mathbf{a}$  en la base original, esto es:

$$a_i = \delta_i^j a_j = (a_j \mathbf{e}^j) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i \quad (4.14)$$

Esta expresión es análoga a (4.9) y, en este sentido, ambas bases se complementan. Debido a esto, la base  $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$  es conocida como la *base dual* o *recíproca* de la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ .

---

\*Otro modo de motivar esta definición es encontrar una base para las funciones lineales  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $X$  es el espacio de los vectores. En este contexto las funciones  $f^i(\mathbf{a}) = a^i$  son conocidas como *uno-formas*, ya que tienen sólo un argumento. Esta definición es más general, ya que, a diferencia de (4.9) no supone que tengamos un producto escalar definido.

\*\* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

El modo en el que una bases y su dual son complementarias no es una simple curiosidad; ambas bases son necesarias para poder expresar relaciones en términos de componentes, sin escribir explícitamente los vectores de la base. Por ejemplo, pensemos en el producto punto de dos vectores dados  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ; expresado solamente en términos de las componentes de la base o la base dual, tenemos:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j) \qquad (4.15)$$

De estas expresiones es claro que, para una base no-ortogonal, a diferencia de un sistema cartesiano, no podemos escribir el producto punto como la simple suma de estas componentes; esto es: no podemos escribirlo ignorando los vectores de la base. Esta limitación puede ser superada, aprovechando (4.10), al considerar una combinación de componentes de la base y la base dual correspondiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a^i \mathbf{e}_i) \cdot (b_j \mathbf{e}^j) = a^i b_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j) = \delta_i^j a^i b_j = a^i b_i \qquad (4.16) \\ &= (a_i \mathbf{e}^i) \cdot (b^j \mathbf{e}_j) = a_i b^j (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j) = \delta_j^i a_i b^j = a_i b^i \end{aligned}$$

En la sección 4.2.3 mostraremos que la forma de esta expresión es invariante ante cambios de coordenadas, esto nos permitirá expresar en términos de componentes el hecho de que el valor de  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  debe ser independiente de las coordenadas. En este contexto llamaremos *componentes contravariantes* a las componentes de la base y *componentes covariantes* a las componentes de la base dual.

También, en analogía con (4.7), podemos construir un símbolo de permutación asociado a la base dual:

$$\epsilon^{ijk} = \mathbf{e}^i \cdot (\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k) \qquad (4.17)$$

Notemos de (4.12) que en este caso el símbolo unitario está dado por:

$$\epsilon^{ijk} = \frac{1}{V} \hat{\epsilon}^{ijk} \qquad (4.18)$$

Por último notemos que, de la expresión (4.11), en un sistema ortogonal, los vectores en la base y en la base dual están en la misma dirección, y, a lo más, pueden diferir en magnitud. En un sistema cartesiano, la base y la base dual son idénticas y por eso, en este caso, no hay necesidad de diferenciarlas.

### 4.1.3. La métrica

Tenemos entonces dos bases complementarias y, con esto, dos conjuntos de componentes: las componentes contravariantes, asociadas a la base, y las componentes covariantes, asociadas a la base dual. Como obtuvimos la base  $\{\mathbf{e}^i\}$  a partir de la base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , usando estos vectores, debemos de poder establecer un mapeo entre componentes covariantes y contravariantes. Directamente de (4.9) podemos ver que las componentes están relacionadas como:

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = (a^j \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i = g_{ij} a^j \quad (4.19)$$

donde hemos definido:

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \quad G = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

El mapeo está dado entonces por un tensor de segundo rango, que podemos representar como una matriz de  $3 \times 3$ . Este tensor es conocido como *la métrica del sistema coordinado* y, además de mapear entre distintos tipos de componentes, encontraremos que contiene información suficiente para caracterizar por completo al sistema coordinado.

Análogamente, si definimos el tensor:  $g^{ij} = (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j)$  encontramos el mapeo inverso:

$$a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i = (a_j \mathbf{e}^j) \cdot \mathbf{e}^i = g^{ij} a_j \quad (4.21)$$

Para mostrar que efectivamente son mapeos inversos, basta combinar las expresiones (4.19) y (4.21):

$$a_i = g_{ij} a^j = g_{ij} (g^{jk} a_k) \quad \Rightarrow \quad g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (4.22)$$

por lo que el tensor  $g^{ij}$  se corresponde con la matriz  $G^{-1}$ . También, de la definición (4.20), como el producto punto es simétrico, la métrica debe estar dada por un tensor simétrico:  $g_{ij} = g_{ji}$  ( $G = G^T$  en términos matriciales).

La métrica además se puede pensar como una función que permite encontrar el producto punto de dos vectores usando únicamente componentes covariantes o contravariantes:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a^i b^j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = g_{ij} a^i b^j \\ &= a_i b_j (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j) = g^{ij} a_i b_j\end{aligned}\quad (4.23)$$

Los vectores en la base y en la base dual están asimismo relacionados por la métrica. Combinando las expresiones (4.19) y (4.21) encontramos la expresión:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = a_i = g_{ij} a^j = g_{ij} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^j) = \mathbf{a} \cdot (g_{ij} \mathbf{e}^j)$$

por lo que podemos concluir que:

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j \quad \mathbf{e}^i = \delta_k^i \mathbf{e}^k = g^{ij} (g_{jk} \mathbf{e}^k) = g^{ij} \mathbf{e}_j \quad (4.24)$$

donde obtuvimos la expresión de la derecha aprovechando (4.22).

La razón por la que el tensor  $g_{ij}$  es conocido como la métrica es porque puede ser pensado como la función que mide distancias en el sistema coordenado. Dada una curva  $\mathbf{r}(u) = (x^1(u), x^2(u), x^3(u))$ , donde  $u$  es un parámetro arbitrario, la distancia entre dos puntos sobre la curva es:  $s_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} ds$ , donde  $ds$  es la distancia infinitesimal recorrida por la curva, y está dada por (ver (2.52), Apéndice 1):

$$ds = \left( \frac{d\mathbf{r}}{du} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} \right)^{1/2} du = \left( g_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du} \right)^{1/2} du \quad (4.25)$$

También el volumen que definimos en (4.3) puede escribirse en términos de la métrica. De la definición (4.20) vemos que podemos escribir  $G$  usando la matriz  $B$  definida en (4.4) como:

$$BB^T = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = G$$

De esta expresión es claro que:  $\det(B^T B) = \det G$ , y, por otro lado, de la ecuación (4.4) tenemos:  $\det(B^T B) = (\det B)^2 = V^2$ , por lo que:

$$V = \sqrt{\det(G)} = \sqrt{g} \quad (4.26)$$

donde hemos definido  $g \equiv \det(G)$ .

## 4.2. Transformación de Coordenadas

Hasta ahora hemos desarrollado la estructura que surge a partir de un sistema coordenado  $\{x^1, x^2, x^3\}$  en particular. En esta sección nos interesa ver como se modifica esta estructura cuando cambiamos de coordenadas. Un cambio de coordenadas es simplemente un re-etiquetamiento de los puntos del espacio. Como los sistemas coordenados etiquetan a todos los puntos de un modo único, debe existir una función  $F$  que, dado un punto, tome la etiqueta en el sistema  $\{x^1, x^2, x^3\}$  y le asigne la etiqueta correspondiente en el nuevo sistema  $\{x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}\}$ :

$$(x^1, x^2, x^3) \xrightarrow{F} (x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \quad (4.27)$$

Esto lo podemos lograr haciendo que cada nueva coordenada sea una función de las coordenadas anteriores:

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^{1'}(x^1, x^2, x^3) \\ x^{2'} &= x^{2'}(x^1, x^2, x^3) \\ x^{3'} &= x^{3'}(x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Si  $\{x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}\}$  representa un verdadero sistema de coordenadas, debe ser posible establecer el re-etiquetamiento inverso, esto es, debe existir una función  $F^{-1}$  tal que:

$$(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \xrightarrow{F^{-1}} (x^1, x^2, x^3) \quad (4.29)$$

Además de esta última exigencia, la función  $F$  es arbitraria, por lo que nos será conveniente analizar el cambio de coordenadas localmente. En este caso, usando las derivadas parciales de (4.28) (y las de las correspondientes funciones inversas), podemos establecer una relación lineal entre un desplazamiento infinitesimal en coordenadas  $\{x^{i'}\}$  y uno en las coordenadas  $\{x^i\}$ :

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} \quad (4.30)$$

Al escribir las derivadas parciales como:

$$\Lambda_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \quad \Lambda_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \quad (4.31)$$

podemos verlas como las entradas de dos transformaciones lineales dadas por las matrices:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{pmatrix} \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

La matriz  $\Lambda$  es conocida como *el Jacobiano de la transformación* y es análoga a la derivada en el sentido de que representa la transformación lineal más parecida a la transformación general en un punto (el término lineal en un desarrollo de Taylor). Siguiendo una convención [6][10], hemos llamado  $\Lambda$  al Jacobiano de la transformación  $F^{-1}$  en (4.29), y  $\Lambda^{-1}$  al Jacobiano de la transformación  $F$  en (4.27). En términos de estas matrices la condición de invertibilidad es:

$$\det(\Lambda) \neq 0 \quad (4.33)$$

En este caso la condición está dada localmente. Usando las entradas de las matrices podemos comprobar inmediatamente que, si las derivadas en (4.31) existen y son distintas de cero, la condición de invertibilidad local se cumple:

$$\Lambda_{i'}^i \Lambda_j^{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i \quad (4.34)$$

### 4.2.1. Transformando la base

En la Sección 4.1.1 establecimos una base en cada punto usando derivadas parciales. Las parciales en el nuevo sistema coordenado están dadas por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Lambda_{i'}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

A partir de esta identidad podemos ver directamente de (4.2) que, en términos de la base original, la nueva base está dada por:

$$\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{i'}} = \Lambda_{i'}^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \Lambda_{i'}^i \mathbf{e}_i \quad (4.35)$$

Aprovechando (4.34) encontramos que la transformación inversa correspondiente es:

$$\mathbf{e}_i = \delta_i^j \mathbf{e}_j = \Lambda_i^{i'} (\Lambda_{i'}^j \mathbf{e}_j) = \Lambda_i^{i'} \mathbf{e}_{i'} \quad (4.36)$$

### 4.2.2. Transformando componentes de vectores

Los vectores son independientes de las coordenadas, son las componentes y la base las que dependen de un sistema coordenado en particular. Para un vector dado, por tanto, la representación en distintos sistemas debe ser equivalente:  $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a^{i'} \mathbf{e}_{i'}$ . A partir de esta igualdad y usando la regla de transformación (4.35) podemos encontrar que:

$$a^{i'} \mathbf{e}_{i'} = a^i \mathbf{e}_i = a^i \Lambda_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}$$

Con lo que la regla de transformación para las componentes de vectores debe ser:

$$a^{i'} = \Lambda_i^{i'} a^i \quad a^i = \delta_j^i a^j = \Lambda_{i'}^i (\Lambda_{i'}^j a^j) = \Lambda_{i'}^i a^{i'} \quad (4.37)$$

Notemos que, para encontrar las nuevas componentes  $a^{i'}$ , hemos usado la inversa de la transformación que usamos para encontrar los nuevos vectores en la base  $\mathbf{e}_{i'}$  en (4.35). Esta es la razón por la que estas componentes se llaman componentes contravariantes, porque se transforman de forma contraria a la base.

### 4.2.3. Transformando la métrica

La regla de transformación para la métrica se obtiene directamente de la definición (4.20) y el resultado (4.35):

$$g_{i'j'} = (\mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}_{j'}) = \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^j g_{ij} \quad (4.38)$$

En términos matriciales esta expresión se debe escribir como:

$$G' = \Lambda^T G \Lambda \quad (4.39)$$

esto surge de que  $\Lambda_{i'}^i g_{ij}$  es una combinación de las filas de las matrices y la multiplicación matricial está dada por una combinación de filas y columnas. De la expresión anterior encontramos directamente que el determinante de la nueva métrica es:

$$g' = (\det(\Lambda))^2 g \quad (4.40)$$

Y de (4.26) concluimos que el volumen asociado a la base se modifica como\*:

$$V' = \det(\Lambda)V \quad (4.41)$$

Con la métrica podemos encontrar las reglas de transformación que nos faltan. Del resultado (4.37) vemos que las nuevas componentes asociadas a la base dual están dadas por:

$$\begin{aligned} a_{i'} &= g_{i'j'} a^{j'} = \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^j g_{ij} \Lambda_k^{j'} a^k = \Lambda_{i'}^i g_{ij} (\Lambda_{j'}^j \Lambda_k^{j'} a^k) \\ &= \Lambda_{i'}^i g_{ij} (\delta_k^j a^k) = \Lambda_{i'}^i g_{ij} a^j = \Lambda_{i'}^i a_i \end{aligned} \quad (4.42)$$

Aplicando la inversa, como en los casos anteriores, tenemos:  $a_i = \Lambda_i^{i'} a_{i'}$ . Las reglas de transformación para este tipo de componentes es la misma que para los vectores en la base (4.35), y por eso son conocidos como componentes covariantes, porque cambian con la base.

Para transformar los vectores en la base dual, aprovecharemos de nuevo que un vector  $\mathbf{a}$  debe tener representaciones equivalentes en las distintas bases:

---

\*Si  $\det(\Lambda)$  es negativo entonces:  $V' = -|\det(\Lambda)|V$ , y la nueva base es izquierda (ver Sección 4.1.1).

$$a_{i'} \mathbf{e}^{i'} = a_i \mathbf{e}^i = \Lambda_i^{i'} a_{i'} \mathbf{e}^i$$

con lo que la regla de transformación debe ser:

$$\mathbf{e}^{i'} = \Lambda_i^{i'} \mathbf{e}^i \quad \mathbf{e}^i = \Lambda_i^{i'} \mathbf{e}^{i'} \quad (4.43)$$

De este resultado, el tensor métrico inverso en el nuevo sistema es:

$$g^{i'j'} = (\mathbf{e}^{i'} \cdot \mathbf{e}^{j'}) = \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j) = \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} g^{ij} \quad (4.44)$$

Los símbolos de permutación (4.7) y (4.17) están dados por los vectores de las respectivas bases. Usando las reglas de transformación para estos vectores, la regla de transformación, por ejemplo, para el símbolo asociado a la base dual es:

$$\epsilon^{i'j'k'} = \mathbf{e}^{i'} \cdot (\mathbf{e}^{j'} \times \mathbf{e}^{k'}) = \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} \Lambda_k^{k'} \mathbf{e}^i \cdot (\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k) = \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} \Lambda_k^{k'} \epsilon^{ijk} \quad (4.45)$$

Por último, comprobaremos que la forma del producto de componentes covariantes y contravariantes es invariante ante cambios de coordenadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a^i b_i = \Lambda_i^{i'} \Lambda_i^{k'} a^{i'} b_{k'} = \delta_{i'}^{k'} a^{i'} b_{k'} = a^{i'} b_{i'} \\ &= a_i b^i = \Lambda_i^{i'} \Lambda_{k'}^i a_{i'} b^{k'} = \delta_{k'}^i a_{i'} b^{k'} = a_{i'} b^{i'} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Con lo que, en cualquier sistema coordenado, podemos calcular el producto punto como un producto de componentes sin necesidad de usar la métrica o los vectores de la base. Es claro que este resultado en consecuencia de que las reglas de transformación de componentes covariantes y contravariantes son inversas entre si. En general, de este resultado podemos concluir que *un producto entre componentes covariantes y contravariantes será una expresión válida en cualquier sistema coordenado.*

### 4.3. Operadores Diferenciales en Coordenadas Generalizadas

Para caracterizar el comportamiento de los campos vectoriales en el espacio, debemos de poder calcular las derivadas del campo con respecto a las

coordenadas y los operadores diferenciales en términos de estas derivadas. En particular nos interesará calcular los operadores diferenciales que aparecen en las ecuaciones de Maxwell (1.1): la divergencia y el rotacional.

### 4.3.1. La derivada covariante

En la Sección 1.1 mostramos que, en general, los vectores en la base pueden ser distintos para distintos puntos del espacio. Esto tiene como consecuencia que, cuando calculamos la derivada parcial de un campo vectorial  $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$ , debemos tomar en cuenta el modo en el cambia la base, esto es: las derivadas de la base. Esto se hace evidente tomando directamente la derivada:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} (A^k \mathbf{e}_k) = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} \mathbf{e}_k + A^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i} \quad (4.47)$$

Como las derivadas de los vectores  $\mathbf{e}_i$  son, a su vez, vectores, debemos poder expresarlos en términos de la base misma; esto es:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i} = \Gamma_{ki}^j \mathbf{e}_j \quad (4.48)$$

donde los 27 coeficientes  $\Gamma_{ki}^j$  se conocen como los *símbolos de Christoffel*<sup>\*\*</sup>, y vemos que no son más que las componentes de las derivadas de la base. La derivada parcial (4.47) es también un vector, y aprovechando los símbolos de Christoffel podemos escribirla como:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^i} = \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \mathbf{e}_j + A^k \Gamma_{ki}^j \mathbf{e}_j = (\nabla_i A^j) \mathbf{e}_j \quad (4.49)$$

donde renombramos índices mudos en el primer sumando y definimos:

$$\nabla_i A^j = \frac{\partial A^j}{\partial x^i} + A^k \Gamma_{ki}^j \quad (4.50)$$

Esta cantidad es conocida como la *derivada covariante* y representa las componentes de la derivada de  $\mathbf{A}$  con respecto a  $x^i$ . Si las derivadas de la base se anulan, (4.50) se reduce a la parcial de las componentes del campo.

Notemos que, debido a que expandimos  $\mathbf{A}$  usando la base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , la derivada (4.50) involucra las componentes contravariantes del campo. Para obtener la

---

<sup>\*\*</sup> En general, los coeficientes  $\Gamma_{ki}^j$  no representan las entradas de un tensor [6].

derivada de las componentes covariantes, debemos de expandir las derivadas de la base dual  $\{\mathbf{e}^j\}$  como en (4.48). Aprovechando que la base y la base dual están relacionadas, podremos hacer esta expansión usando exactamente los mismos símbolos de Christoffel. Para probar esto, veamos que de (4.10) tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \delta_k^j}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_k) = \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^i} \cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^i} \cdot \mathbf{e}_k + \Gamma_{ki}^l (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_l) \\ &= \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^i} \cdot \mathbf{e}_k + \Gamma_{ki}^l \delta_l^j = \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^i} \cdot \mathbf{e}_k + \Gamma_{ki}^j \end{aligned}$$

con lo que, recordando  $a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$ , las derivadas de la base dual en términos de la propia base dual están dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^i} = -\Gamma_{ki}^j \mathbf{e}^k \quad (4.51)$$

Encontramos entonces que las componentes de las derivadas de la base y la base dual difieren en signo. Con este resultando, al tomar directamente la derivada tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i}(A_j \mathbf{e}^j) = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \mathbf{e}^j + A_j \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^i} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \mathbf{e}^j - A_j \Gamma_{ki}^j \mathbf{e}^k \\ &= \left( \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - A_k \Gamma_{ji}^k \right) \mathbf{e}^j = (\nabla_i A_j) \mathbf{e}^j \end{aligned}$$

con lo que la derivada de las componentes covariantes es:

$$\nabla_i A_j = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - A_k \Gamma_{ji}^k \quad (4.52)$$

### 4.3.2. La divergencia

La divergencia es una medida local del flujo del campo vectorial, y en coordenadas cartesianas se calcula como la suma de las parciales. En coordenadas generalizadas, como debemos tomar en cuenta el modo en el que cambia la base, debemos usar la derivada covariante (4.50):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla_i A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ki}^k A^i \quad (4.53)$$

En general, el símbolo de Christoffel se puede expresar en términos de las parciales del tensor métrico (Apéndice 4). En particular, para el caso de la expresión anterior, se puede mostrar que esta relación se reduce a:

$$\Gamma_{ki}^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} \quad (4.54)$$

Probaremos este resultado en detalle en el Apéndice 4. Al sustituir en (4.53) obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \nabla_i A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ki}^k A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} A^i \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \sqrt{g} \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} A^i \right) \end{aligned}$$

que podemos escribir como una sola suma de derivadas:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^i) \quad (4.55)$$

Recordando de (4.26) que  $\sqrt{g}$  representa una escala natural asociado al sistema coordenado, el resultado es exactamente como en el caso cartesiano, una suma de parciales, donde simplemente hemos tomado un re-escalamiento de coordenadas.

### 4.3.3. El rotacional

El rotacional es una medida de la tendencia local del campo a rotar con respecto a un punto. En coordenadas cartesianas se calcula como el producto cruz entre las parciales y las componentes del campo. Igual que con la divergencia, en coordenadas generalizadas, no podemos considerar sólo las parciales sino que debemos usar la derivada covariante:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \epsilon^{ijk} \nabla_i A_j \mathbf{e}_k = \epsilon^{ijk} \left( \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - A_l \Gamma_{ji}^l \right) \mathbf{e}_k \quad (4.56)$$

Notemos que, en este caso, hemos usado la derivada (4.52). Para simplificar esta expresión, primero debemos notar de (4.2) que los índices de las derivadas de la base son intercambiables; esto es:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^i} \quad (4.57)$$

Con lo que, de la definición de los símbolos de Christoffel (4.48), tenemos:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (4.58)$$

y esta propiedad implica a su vez:

$$\epsilon^{ijk} \Gamma_{ji}^l = \epsilon^{jik} \Gamma_{ij}^l = \epsilon^{jik} \Gamma_{ji}^l = -\epsilon^{ijk} \Gamma_{ji}^l \quad \Rightarrow \quad \epsilon^{ijk} \Gamma_{ji}^l = 0 \quad (4.59)$$

En la primera igualdad en la izquierda, sólo renombramos índices mudos, en la segunda usamos la propiedad (4.58), y en la última usamos el hecho de que, bajo un cambio impar de índices, el símbolo de permutación cambia de signo. Con este resultado, las componentes del rotacional son:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})^k &= \epsilon^{ijk} \nabla_i A_j = \epsilon^{ijk} \left( \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - A_l \Gamma_{ji}^l \right) = \epsilon^{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \tilde{\epsilon}^{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (4.60)$$

donde hemos usado el símbolo de permutación unitario (4.18), para hacer explícito el sistema coordenado.

#### 4.3.4. Transformando Operadores Diferenciales

La divergencia y el rotacional, al ser propiedades del campo vectorial en si, son independientes del modo en el que estén etiquetados los puntos. Sin embargo, de las secciones anteriores es claro que, en la práctica, estas cantidades se calculan en términos de las componentes del campo, y éstas sí dependen del sistema coordenado. A pesar de esto, las expresiones para estos operadores mantienen la misma forma ante cambios de coordenadas en un modo análogo a (4.46). Formalmente, esta invariancia se sigue de que hemos podido expresar estos operadores sin hacer referencia a los símbolos de Christoffel (que, en general, no se transforman como tensores) y de que el Jacobiano de la transformación no depende de las nuevas coordenadas:

$$\frac{\partial \Lambda_i^{i'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \left( \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial \delta_{k'}^{i'}}{\partial x^i} = 0 \quad (4.61)$$

Con lo que podemos mostrar directamente la invariancia de la divergencia ante transformaciones:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^i) = \frac{|\det \Lambda|}{\sqrt{g'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \left( \frac{\sqrt{g'}}{|\det \Lambda|} \Lambda_i^{i'} A^{i'} \right) \\ &= \frac{|\det \Lambda|}{\sqrt{g'}} \frac{1}{|\det \Lambda|} \Lambda_i^{i'} \Lambda_i^i \frac{\partial}{\partial x^{i'}} (\sqrt{g'} A^{i'}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} (\sqrt{g'} A^{i'}) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Del mismo modo, la expresión para el rotacional mantiene la misma forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{\epsilon}^{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \mathbf{e}_k = \epsilon^{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \mathbf{e}_k = \epsilon^{ijk} \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} \Lambda_k^{k'} \frac{\partial A_{j'}}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}_{k'} \\ &= \epsilon^{i'j'k'} \frac{\partial A_{j'}}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}_{k'} = \frac{1}{\sqrt{g'}} \hat{\epsilon}^{i'j'k'} \frac{\partial A_{j'}}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}_{k'} \end{aligned} \quad (4.63)$$

## 4.4. Geodésicas

Dados dos puntos en el espacio, una geodésica es la trayectoria de mínima distancia que los conecta. Esto es: el modo más eficiente de ir de un punto a otro en términos de distancia recorrida. Del mismo modo que el principio de Fermat (Sección 2.1.4), dada una métrica, encontrar las trayectorias geodésicas correspondientes se puede plantear como un problema variacional donde debemos encontrar las trayectorias cuya distancia de recorrido no cambie a primer orden (distancia de recorrido estacionaria). Matemáticamente escribimos esto como (Apéndice 2):

$$\delta s_{12} = \delta \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} ds = 0 \quad (4.64)$$

Como vimos en la Sección 4.1.3, el desplazamiento infinitesimal  $ds$  está determinado por la métrica. Para una curva arbitraria  $\mathbf{r}(s) = (x^1(s), x^2(s), x^3(s))$ , la distancia recorrida queda escrita como:

$$s_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} |\dot{\mathbf{r}}| ds = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j)^{1/2} ds \quad (4.65)$$

donde hemos supuesto que la curva está parametrizada por longitud de arco (en esta sección:  $\cdot = d/ds$ ). Con esto, para el problema variacional (4.64), identificamos el Lagrangiano del problema como:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = |\dot{\mathbf{r}}| = (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j)^{1/2} \quad (4.66)$$

El hecho de que hayamos impuesto una parametrización por longitud de arco impone una condición sobre este Lagrangiano (Apéndice 1):

$$|\dot{\mathbf{r}}| = (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j)^{1/2} = 1 \quad (4.67)$$

Las curvas geodésica serán entonces las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange (Apéndice 2):

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0 \quad (4.68)$$

En vez de sustituir directamente el Lagrangiano (4.66) en esta ecuación, definimos el momento de la curva  $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}^i$ , como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{2g_{ij} \dot{x}^j}{2L} = g_{ij} \dot{x}^j \quad (4.69)$$

donde hemos usado explícitamente la condición (4.67). Este momento, por su puesto, no tiene ningún significado físico. Matemáticamente podemos darnos cuenta que las componentes  $p_i$  resultan ser las componentes covariantes de  $|\dot{\mathbf{r}}|$ . En términos del momento de la curva, la ecuación de Euler-Lagrange para el Lagrangiano (4.66) se puede escribir como:

$$\dot{p}_i = \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k \quad (4.70)$$

Usando la identidad (ver Apéndice 4):

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = -g_{lj} g_{mk} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} \quad (4.71)$$

la ecuación de las geodésicas se puede escribir sin hacer referencia a las componentes  $\dot{x}^i$ :

$$\dot{p}_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} g_{lj} g_{mk} \dot{x}^j \dot{x}^k = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} p_l p_m \quad (4.72)$$

A partir del momento de la curva que hemos definido, podemos hacer un planteamiento Hamiltoniano del problema de las geodésicas. El Hamiltoniano del problema es:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} (p_i \dot{x}^i - L) \quad (4.73)$$

Notemos que, del mismo modo que en la Sección 2.2, este Hamiltoniano no es exactamente la transformada de Legendre de (4.66), debido a que este Lagrangiano es degenerado (ver Apéndice 3). Tomando la condición (4.67) y sustituyendo de (4.69):  $\dot{x}^i = g^{ij} p_j$ , el Hamiltoniano queda escrito como:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} (g^{ij} p_i p_j - 1) \quad (4.74)$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas a este Hamiltoniano son:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = g^{ij} p_j \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} p_l p_m \quad (4.75)$$

Que son exactamente las ecuaciones: (4.69), (4.72). Esto quiere decir que efectivamente podemos obtener las geodésicas a partir del Hamiltoniano (4.74).

Por lo general, el problema de las geodésicas no se plantea usando un Hamiltoniano sino que, a partir de Euler-Lagrange, se llega directamente a una ecuación de segundo grado para las curvas de mínima distancia. Esta ecuación se puede obtener de nuestras ecuaciones de movimiento. Tomando la derivada del lado izquierdo de (4.75) se obtiene:

$$\ddot{x}^i = \frac{d}{ds} (g^{ij} p_j) = g^{il} \dot{p}_l + \frac{\partial g^{in}}{\partial x^k} \dot{x}^k p_n \quad (4.76)$$

donde hemos renombrado índices mudos en ambos sumandos. Tomando  $\dot{p}_i$  de (4.70) y usando la identidad (A.41) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}^i &= \frac{1}{2}g^{il} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \dot{x}^j \dot{x}^k \right) - g^{il} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} g^{nj} p_n \dot{x}^k \\
&= \frac{1}{2}g^{il} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \dot{x}^j \dot{x}^k \right) - g^{il} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k \\
&= \frac{1}{2}g^{il} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \dot{x}^j \dot{x}^k \right) - \frac{1}{2}g^{il} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k \\
&= \frac{1}{2}g^{il} \left[ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} - \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} \right) \right] \dot{x}^j \dot{x}^k
\end{aligned}$$

Como mencionamos en la Sección 4.3.2, los símbolos de Christoffel (4.48) se pueden escribir en términos de las derivadas de la métrica. La relación general entre estas cantidades es (ver Apéndice 4):

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il} \left[ \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right] \quad (4.77)$$

con lo que la ecuación de segundo grado para las geodésicas se puede escribir como:

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (4.78)$$

Que es la ecuación que se encuentra comúnmente en las referencias [28][25][26]. Como toda ecuación de segundo grado se puede escribir como dos ecuaciones de primer grado, las ecuaciones de movimiento del Hamiltoniano (4.74) se corresponden con un desacoplamiento de esta ecuación.

# Capítulo 5

## Óptica de transformación

Como vimos en el Capítulo 3, en general, las propiedades electromagnéticas de un medio material están descritas por los tensores de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética:  $\varepsilon_{ij}$  y  $\mu_{ij}$ . Por otro lado, del Capítulo 4, sabemos que la estructura de los sistemas coordenados está determinada por el tensor métrico  $g_{ij}$ . Esto es: la métrica determina la geometría del espacio. La idea fundamental de la óptica de transformación es que, en el caso  $\varepsilon_{ij} = \mu_{ij}$ , las ecuaciones de Maxwell no distinguen entre estas propiedades tensoriales y la métrica  $g_{ij}$ . *Esto tiene como consecuencia que, para los campos electromagnéticos, una geometría es como un medio material y, a su vez, un medio material es como una geometría.* En este capítulo desarrollaremos este hecho en detalle y mostraremos como, a partir de esta idea, usando transformaciones de coordenadas, es posible diseñar medios materiales que, en teoría, controlen la luz en casi cualquier modo que pueda ser imaginado.

### 5.1. Ecuaciones de Maxwell en coordenadas generalizadas

Los campos vectoriales con los que describimos los campos electromagnéticos son, por supuesto, independientes del sistema coordenado que usemos; estos sistemas son solamente el modo en el que etiquetamos los puntos del espacio. Las ecuaciones de Maxwell son relaciones que cumplen los campos mismos, y podemos ver de (1.1) que involucran directamente a los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ . En la práctica, sin embargo, debemos poder expresar estas relaciones en términos de los componentes de los campos, y, como vimos en el capítulo

anterior, estas cantidades sí dependen del sistema coordenado que usemos. A pesar de esto, encontramos en la Sección 4.3 que podemos expresar la divergencia y el rotacional, usando las componentes de los campos, de un modo invariante; esto es, manteniendo la misma “forma” sin importar el sistema coordenado. En la Sección 4.3.4 comprobamos explícitamente que esta forma es invariante ante transformaciones de coordenadas. Estos operadores diferenciales son los únicos que aparecen en las ecuaciones de Maxwell, por lo que estas ecuaciones heredan esta invariancia. Con esto, usando (4.55) y (4.60) podemos escribir (1.1) en términos de componentes para cualquier sistema coordenado como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} E^i) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} B^i) &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{\epsilon}^{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x^j} + \frac{\partial B^i}{\partial t} &= 0 & \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{\epsilon}^{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial x^j} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E^i}{\partial t} &= \mu_0 J^i \end{aligned} \quad (5.1)$$

En estas ecuaciones hemos elegido usar el símbolo de permutación unitario (4.18). También, notemos que las ecuaciones involucran tanto componentes covariantes como contravariantes.

## 5.2. Interpretación material de la métrica

Mostraremos ahora que hay dos modos indistinguibles de interpretar las ecuaciones (5.1). En principio, hemos escrito estas ecuaciones como las ecuaciones que deben cumplir los campos electromagnéticos *en el vacío*. Los campos están dados en términos de sus componentes contravariantes en cada punto como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E^i \mathbf{e}_i \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = H^i \mathbf{e}_i \quad (5.2)$$

donde  $\{\mathbf{e}_i\}$  es una base arbitraria. Al estar en el vacío, el campo- $\mathbf{H}$  es simplemente:  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ . Para hacer explícito el sistema coordenado que estemos usando, usaremos la métrica para reescribir las ecuaciones (5.1) únicamente en términos de componentes covariantes\*:

---

\*Recordemos que las componentes covariantes están conectadas con la proyección del vector en la base ( $E_i = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_i$ ).

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\varepsilon_0 \sqrt{g} g^{ij} E_j) = \bar{\rho} \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu_0 \sqrt{g} g^{ij} H_j) = 0 \quad (5.3)$$

$$\hat{\varepsilon}^{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \sqrt{g} g^{ij} H_j) = 0 \qquad \hat{\varepsilon}^{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \sqrt{g} g^{ij} E_j) = \bar{J}^i$$

donde también hemos redefinido las fuentes como:  $\bar{\rho} = \sqrt{g} \rho$ ,  $\bar{J}^i = \sqrt{g} J^i$ . Este re-escalamiento es como si consideráramos fuentes en un sistema cartesiano (el elemento de volumen es:  $dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3$ ). También hemos sustituido al campo magnético por el campo-H en el vacío.

Cambiamos radicalmente de tema por un momento. Recordemos las ecuaciones de Maxwell en medios materiales (1.10). En términos de componentes, los campos auxiliares (3.4) se pueden escribir como:

$$D^i = \varepsilon_0 \varepsilon^{ij} E_j \qquad B^i = \mu_0 \mu^{ij} H_j \quad (5.4)$$

donde  $\varepsilon^{ij}$ ,  $\mu^{ij}$  representan los tensores de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética. Si las componentes son cartesianas, las ecuaciones en medios materiales (1.10) se escriben como:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\varepsilon_0 \varepsilon^{ij} E_j) = \rho \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu_0 \mu^{ij} H_j) = 0 \quad (5.5)$$

$$\hat{\varepsilon}^{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \mu^{ij} H_j) = 0 \qquad \hat{\varepsilon}^{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \varepsilon^{ij} E_j) = J^i$$

Al comparar estas ecuaciones con las ecuaciones en el vacío (5.3), nos podemos dar cuenta que si se cumple la identidad:

$$\varepsilon^{ij} = \mu^{ij} = \sqrt{g} g^{ij} \quad (5.6)$$

no tenemos modo de distinguir si (5.3) representa las ecuaciones para un medio material en coordenadas cartesianas (5.5), o las ecuaciones en el vacío en coordenadas arbitrarias (5.1). Esto implica que ambas interpretaciones son válidas, por lo que, siempre que se cumpla (5.6), *podemos interpretar una métrica como las propiedades materiales de un medio*. En las siguientes secciones explotaremos esta interpretación material de la métrica como estrategia para *diseñar* propiedades materiales a partir de transformaciones.

Las ecuaciones que hemos considerado en esta sección son para las componentes de los campos. Al tomar la interpretación material, sin embargo, hemos cambiado de sistema coordenado manteniendo las mismas componentes, lo que se traduce en que hemos transformado implícitamente a los campos. Esto es:  $E_i$  era una componente covariante del campo en el sistema arbitrario caracterizado por  $g_{ij}$ , pero ahora estamos interpretando que es una componente del campo dentro de un medio en un sistema cartesiano. Esto implica que, bajo la interpretación material, los campos ya no están dados por (5.2) sino que tenemos nuevos campos dados como:

$$\tilde{\mathbf{E}} = E_1 \mathbf{e}_x + E_2 \mathbf{e}_y + E_3 \mathbf{e}_z \quad \tilde{\mathbf{H}} = H_1 \mathbf{e}_x + H_2 \mathbf{e}_y + H_3 \mathbf{e}_z \quad (5.7)$$

Esto es, las entradas cartesianas del vector  $\tilde{\mathbf{E}}$  están dadas por:  $\tilde{E}_x = E_1$ ,  $\tilde{E}_y = E_2$ , etc. Este nuevo campo (dentro del medio) puede escribirse en términos del campo original (en el vacío). Para esto consideremos un sistema cartesiano en el vacío que denotaremos como:  $(x', y', z') = (x^1, x^2, x^3)$ . Los campos en el vacío (5.2) los podemos representar tanto en el sistema arbitrario como en este sistema cartesiano primado:  $\mathbf{E} = E_i \mathbf{e}^i = E_{i'} \mathbf{e}^{i'}$ , donde las componentes están relacionadas como:  $E_i = \Lambda_i^{i'} E_{i'}$ . Con esto, (5.7) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} = & (\Lambda_1^{x'} E_{x'} + \Lambda_1^{y'} E_{y'} + \Lambda_1^{z'} E_{z'}) \mathbf{e}_x + (\Lambda_2^{x'} E_{x'} + \Lambda_2^{y'} E_{y'} + \Lambda_2^{z'} E_{z'}) \mathbf{e}_y \\ & + (\Lambda_3^{x'} E_{x'} + \Lambda_3^{y'} E_{y'} + \Lambda_3^{z'} E_{z'}) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

en notación matricial esto es:

$$[\tilde{\mathbf{E}}]_c = \Lambda^{-T} [\mathbf{E}]_c \quad [\tilde{\mathbf{H}}]_c = \Lambda^{-T} [\mathbf{H}]_c \quad (5.8)$$

donde  $[\tilde{\mathbf{E}}]_c = (\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z)^T$ , es el arreglo columna de las entradas del vector  $\tilde{\mathbf{E}}$  en coordenadas cartesianas. Es importante hacer esta distinción porque esta fórmula sólo es válida cuando las entradas son cartesianas. También hemos denotado la transpuesta de la matriz inversa como:  $-T$ . Vemos entonces que *el campo dentro del medio se puede ver como una transformación del campo original en el vacío*, y la transformación está dada por el Jacobiano del cambio de coordenadas, del sistema arbitrario en (5.2) a un sistema cartesiano. Notemos que realmente no hicimos explícitamente ninguna transformación de

coordenadas, sino que, *la interpretación material de la métrica implicó una transformación de los campos.*

En (5.6) usamos las componentes contravariantes de la métrica, y sabemos de (4.21) que la matriz correspondiente es  $G^{-1}$ . Por tanto, en notación matricial, (5.6) se escribe como:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\mu} = \sqrt{g} G^{-1}. \quad (5.9)$$

De donde podemos encontrar directamente\*\* el determinante  $\det(\bar{\varepsilon}) = |\varepsilon|$ , en términos del determinante de la métrica:

$$|\varepsilon| = \frac{g^{3/2}}{g} = \sqrt{g} \quad (5.10)$$

Usando este resultado podemos escribir (5.6) como:

$$g^{ij} = \frac{1}{|\varepsilon|} \varepsilon^{ij} \quad (5.11)$$

Con lo que también podemos interpretar las ecuaciones materiales (5.5) como las ecuaciones de Maxwell en el vacío, escritas en un sistema arbitrario caracterizado por una métrica que cumple con (5.11). En este sentido, *un medio material es equivalente a un sistema coordinado arbitrario en el vacío.* Tomando en cuenta los resultados de la Sección 4.1.3, es claro que, en términos de componentes covariantes, (5.6) es simplemente:  $\varepsilon_{ij} = \sqrt{g} g_{ij}$ . Con esto podemos encontrar la inversa del tensor de permitividad eléctrica como:

$$\varepsilon^{ij} \varepsilon_{jk} = g g^{ij} g_{ik} = |\varepsilon|^2 \delta_k^i \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij}^{-1} = \frac{\varepsilon_{ij}}{|\varepsilon|^2} = \frac{g_{ij}}{|\varepsilon|} \quad (5.12)$$

o en notación matricial:  $\bar{\varepsilon}^{-1} = \bar{\mu}^{-1} = G/|\varepsilon|$ . Por último, notemos que la distinción entre componentes covariantes y contravariantes sólo es válida en el sistema arbitrario en el vacío, bajo la interpretación material, debido a que estamos en un sistema cartesiano, no existe tal distinción.

---

\*\*Usando la multilinealidad del determinante:  $\det(aA) = a^3 \det(A)$ , donde  $A$  es una matriz de  $3 \times 3$ . También usamos:  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .

### 5.3. Medios y Transformaciones

Hemos visto que las ecuaciones de Maxwell en el vacío, escritas en coordenadas arbitrarias, se pueden interpretar como las ecuaciones cartesianas en un medio material. Las propiedades materiales correspondientes están dadas por (5.6). Vimos también que esta reinterpretación implicó una transformación de los campos. Mostraremos ahora que también es posible identificar las propiedades del medio con esta transformación.

#### 5.3.1. Transformación desde espacio electromagnético Cartesiano

Empecemos, como en la sección anterior, con un *espacio vacío*. Diremos que éste es el *espacio electromagnético* y lo pensaremos en principio como un espacio virtual de referencia. Consideraremos primero que los puntos en este espacio están etiquetados con coordenadas cartesianas, y denotaremos estas coordenadas como un sistema primado:  $(x', y', z') = (x^1, x^2, x^3)$ . La métrica en este caso es:

$$g^{i'j'} = \delta^{i'j'} \quad \sqrt{g'} = 1 \quad (5.13)$$

donde  $g'$  es el determinante de la métrica. En presencia de campos electromagnéticos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , las ecuaciones para las componentes en este sistema cartesiano primado se escriben como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} (\varepsilon_0 \delta^{i'j'} E_{j'}) &= \rho & \frac{\partial}{\partial x^{i'}} (\mu_0 \delta^{i'j'} H_{j'}) &= 0 \\ \hat{\varepsilon}^{i'j'k'} \frac{\partial E_{k'}}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \delta^{i'j'} H_{j'}) &= 0 & \hat{\varepsilon}^{i'j'k'} \frac{\partial H_{k'}}{\partial x^{j'}} - \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \delta^{i'j'} E_{j'}) &= J^{i'} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Si consideramos estos mismos campos representados en algún otro sistema coordenado arbitrario  $(x^1, x^2, x^3)$ , las ecuaciones para las componentes toman la forma general:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\varepsilon_0 \sqrt{g} g^{ij} E_j) = \sqrt{g} \rho \quad \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu_0 \sqrt{g} g^{ij} H_j) = 0 \quad (5.15)$$

$$\hat{\varepsilon}^{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \sqrt{g} g^{ij} H_j) = 0 \quad \hat{\varepsilon}^{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \sqrt{g} g^{ij} E_j) = \sqrt{g} J^i$$

donde  $g^{ij}$  es la métrica que caracteriza al nuevo sistema arbitrario. En la Sección 4.3 vimos como deben transformarse, tanto la métrica como las componentes, de modo que efectivamente las ecuaciones (5.14) y (5.15) representen los mismos campos. En particular, la métrica en este nuevo sistema debe estar conectada con la métrica cartesiana por el Jacobiano de la transformación entre ambos sistemas coordenados como:

$$g^{ij} = \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^j \delta^{i'j'} \quad \sqrt{g} = \frac{\sqrt{g'}}{\det \Lambda} = \frac{1}{\det \Lambda} \quad (5.16)$$

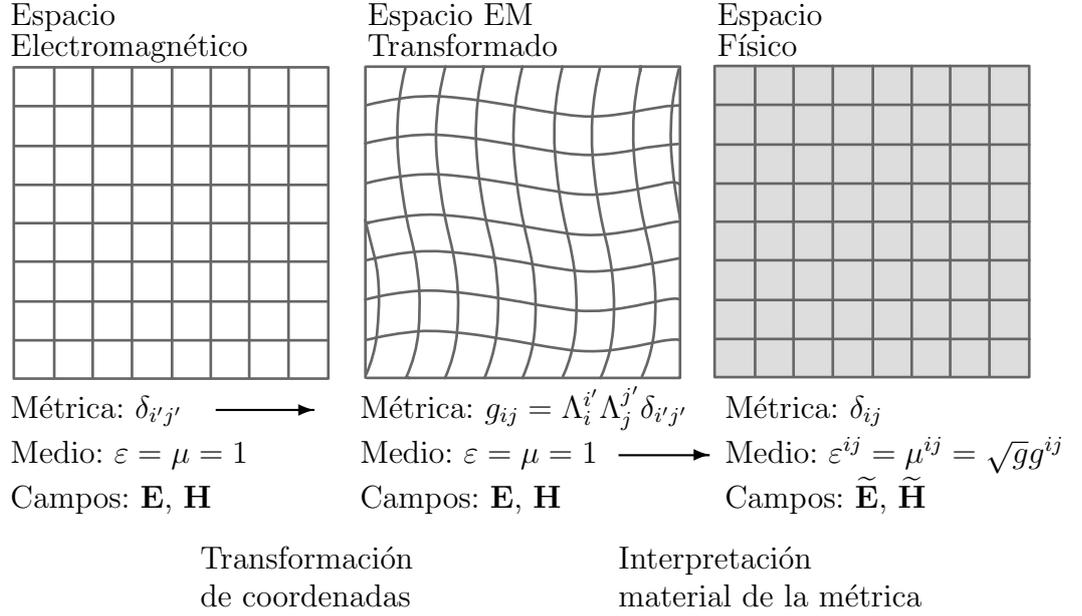
Como discutimos en la Sección 4.2, podemos interpretar el cambio de coordenadas como un re-etiquetamiento de los puntos en el espacio electromagnético, o como una transformación del espacio. Para destacar este hecho, diremos que esta métrica caracteriza un *espacio electromagnético transformado*. Si ahora tomamos la interpretación material de la métrica en las ecuaciones (5.15), tenemos de (5.6) que, en este caso, las propiedades del medio están dadas como:

$$\varepsilon^{ij} = \mu^{ij} = \sqrt{g} g^{ij} = \frac{1}{\det \Lambda} \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^j \delta^{i'j'} \quad (5.17)$$

Con lo que hemos escrito estas propiedades únicamente en términos del Jacobiano de la transformación de coordenadas. En notación matricial estas cantidades quedan escritas como (ver Sección 4.2.3):

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\mu} = \sqrt{g} \mathbf{G}^{-1} = \frac{1}{\det \Lambda} \Lambda \Lambda^T \quad (5.18)$$

El medio material que hemos obtenido se encuentra inmerso en el *espacio físico*. Este espacio y el espacio electromagnético no están conectados por una transformación, sino por la interpretación material de la métrica, por lo que los consideraremos como espacios distintos. Notemos de la Sección 5.2 que *las propiedades que hemos obtenido asumen que los campos están expresados en*



**Figura 5.1:** Para obtener un medio material a partir de una transformación distinguimos dos pasos. En el primero realizamos una transformación de coordenadas desde un sistema cartesiano a un sistema arbitrario. Al aplicar la interpretación material a este sistema arbitrario, obtendremos un medio material que podemos asociar con la transformación.

*coordenadas cartesianas.* Como en la sección anterior, los campos en el espacio físico se pueden obtener a partir de los campos en el espacio electromagnético:

$$[\tilde{\mathbf{E}}]_c = \Lambda^{-T}[\mathbf{E}]_c \qquad [\tilde{\mathbf{H}}]_c = \Lambda^{-T}[\mathbf{H}]_c \qquad (5.19)$$

Como los campos dentro del medio se obtienen como una transformación de los campos en el vacío, podemos pensar que el medio material efectúa activamente una transformación sobre los campos. Diremos que este tipo de medios son *medios transformadores*. La transformación sobre los campos es  $\Lambda^{-1}$ , que es localmente como la transformación de coordenadas (Sección 4.2). Con esto, la estrategia de diseño consiste en que, podemos obtener un medio que modifique a los campos del modo que queramos, sólo necesitamos plantear la transformación correspondiente.

Por último, notemos que, como la interpretación material se toma en todo el espacio, si pensamos en campos que inciden en el medio desde el vacío, debemos considerar una frontera para nuestro medio transformador. Esto lo podemos conseguir delimitando esta frontera en el espacio electromagnético y sólo considerar un cambio de coordenadas no-trivial dentro de esta frontera. Al tomar la interpretación material, *obtendremos un medio material delimitado por la frontera*, fuera de la cual, tendremos espacio físico vacío (ver Fig. 5.2).

### 5.3.2. Transformación desde espacio electromagnético general

Para obtener las propiedades materiales de los medios transformadores hemos considerado dos espacios y tres métricas (ver Fig. 5.1). En la sección anterior usamos coordenadas cartesianas tanto en el espacio electromagnético como en el espacio físico. En parte, esto fue consecuencia del modo en el que planteamos la interpretación material en la Sección 5.2. En esta sección, mostraremos como generalizar esta interpretación para otros sistema coordenados (comúnmente coordenadas cilíndricas, esféricas, etc).

Asignemos ahora al espacio electromagnético vacío un sistema coordenado no-cartesiano  $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ . Las ecuaciones para las componentes en este sistema primado quedan escritas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}(\varepsilon_0 \sqrt{g'} g^{i'j'} E_{j'}) &= \sqrt{g'} \rho & \frac{\partial}{\partial x^{i'}}(\mu_0 \sqrt{g'} g^{i'j'} H_{j'}) &= 0 \\ \tilde{\epsilon}^{i'j'k'} \frac{\partial E_{k'}}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \sqrt{g'} g^{i'j'} H_{j'}) &= 0 & \tilde{\epsilon}^{i'j'k'} \frac{\partial H_{k'}}{\partial x^{j'}} - \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \sqrt{g'} g^{i'j'} E_{j'}) &= \sqrt{g'} J^{i'} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Del mismo modo que en la sección anterior cambiaremos de coordenadas a algún sistema arbitrario caracterizado por una métrica  $g^{ij}$ . Las ecuaciones de las componentes en el nuevo sistema toman la misma forma general (5.15), pero, en este caso, la nueva métrica está dada en términos de la métrica primada como:

$$g^{ij} = \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^j g^{i'j'} \quad \sqrt{g} = \frac{\sqrt{g'}}{\det \Lambda} \quad (5.21)$$

También queremos que, en el espacio físico, las ecuaciones de las componentes estén expresadas en algún sistema coordenado caracterizado por una métrica no-cartesiana  $\gamma^{ij}$ . En este sistema coordenado las ecuaciones no tienen la forma (5.5), sino que se escriben como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{\gamma} D^i}{\partial x^i} &= \sqrt{\gamma} \rho & \frac{\partial \sqrt{\gamma} B^i}{\partial x^i} &= 0 \\ \epsilon^{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x^j} + \frac{\partial \sqrt{\gamma} B^i}{\partial t} &= 0 & \epsilon^{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \sqrt{\gamma} D^i}{\partial t} &= \sqrt{\gamma} J^i \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde  $\gamma$  es el determinante de  $\gamma^{ij}$ . Los campos auxiliares mantienen la forma:

$$D^i = \epsilon_0 \epsilon^{ij} E_j \quad B^i = \mu_0 \mu^{ij} H_j \quad (5.23)$$

con la diferencia de que están expresados en el sistema coordenado caracterizado por  $\gamma_{ij}$ . Al comparar (5.22) con (5.15) vemos que, en este caso, la interpretación material nos lleva a la identidad:

$$\epsilon^{ij} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}} g^{ij} = \frac{\sqrt{g'}}{\sqrt{\gamma}} \frac{g^{i'j'} \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^j}{\det \Lambda} \quad (5.24)$$

Esto es: si se cumple esta expresión, podemos interpretar las ecuaciones (5.15) para el espacio vacío en un sistema arbitrario, como las ecuaciones (5.22) en un medio material en el sistema coordenado caracterizado por  $\gamma_{ij}$ . En notación matricial (5.24) queda escrita como:

$$\bar{\epsilon} = \bar{\mu} = \frac{\sqrt{g'}}{\sqrt{\gamma}} \frac{\Lambda G'^{-1} \Lambda^T}{\det \Lambda} \quad (5.25)$$

donde  $G'$  es la matriz con componentes  $g_{i'j'}$ . Notemos que estas propiedades asumen que los campos están dados en el sistema coordenado caracterizado por  $\gamma_{ij}$ .

A diferencia del caso cartesiano, ahora tenemos una estructura geométrica no-trivial en el espacio físico. En este caso, debemos tener cuidado en expresar los campos en sus componentes contravariantes (las componentes vectoriales, ver Sección 4.1.2). Tomando esto en cuenta, escribimos la expresión (5.23) como:

$$D^i = \varepsilon^{ij} \tilde{E}_j = \varepsilon^{ij} \gamma_{jk} \tilde{E}^k \quad [\mathbf{D}]_\gamma = \bar{\varepsilon} \Gamma [\tilde{\mathbf{E}}]_\gamma \quad (5.26)$$

donde  $[\mathbf{D}]_\gamma = (D^1, D^2, D^3)^T$  es el arreglo columna de las componentes contravariantes de  $\mathbf{D}$  en las coordenadas caracterizadas por la métrica  $\gamma_{ij}$ . Del mismo modo que en la Sección 5.2, denotamos al campo dentro del medio como  $\tilde{\mathbf{E}}$ , para distinguirlo del campo en el espacio electromagnético.

Como en el caso cartesiano, la interpretación material implica una transformación de los campos. De nuevo, la transformación de los campos está dada por el Jacobiano de la transformación de coordenadas:

$$\tilde{E}^i = \gamma^{ij} E_j = \gamma^{ij} \Lambda_j^{j'} E_{j'} = \gamma^{ij} \Lambda_j^{j'} g_{j'k'} E^{k'} \quad (5.27)$$

Para expresar esta relación en términos de componentes contravariantes, también hemos usado la métrica del espacio físico y la métrica original en el espacio electromagnético. En notación matricial:

$$[\tilde{\mathbf{E}}]_\gamma = \Gamma^{-1} \Lambda^{-T} G' [\mathbf{E}]_{g'} \quad [\tilde{\mathbf{H}}]_\gamma = \Gamma^{-1} \Lambda^{-T} G' [\mathbf{H}]_{g'} \quad (5.28)$$

donde  $[\tilde{\mathbf{E}}]_\gamma$ ,  $[\mathbf{E}]_{g'}$  representan las componentes contravariantes de los campos en los respectivos sistemas coordenados.

Recordemos que los sistemas coordenados que hemos considerado no son necesariamente ortogonales ni unitarios. Esto fue porque obtuvimos la base directamente del sistema coordenado. En muchos contextos, sin embargo, es común expresar los campos en una base normalizada\*. Para encontrar las componentes en estos sistemas normalizados, consideremos las siguientes dos matrices de normalización:

$$N_\gamma = \text{diag}(|\mathbf{e}_1|, |\mathbf{e}_2|, |\mathbf{e}_3|) \quad N_{g'} = \text{diag}(|\mathbf{e}_{1'}|, |\mathbf{e}_{2'}|, |\mathbf{e}_{3'}|) \quad (5.29)$$

Si representamos los vectores en la base coordenada como una matriz  $B$ , del mismo modo que en (4.4), podemos relacionar estos vectores con los de la base normalizada como:  $B_g = N_g \bar{B}$ , donde  $\bar{B}$  es la matriz con los vectores en la base normalizados. Esto resulta en que podemos relacionar las componentes

---

\*Como este tipo de bases no se obtienen directamente del sistema coordenado, se conocen como bases no-coordenadas.

como:  $[\tilde{\mathbf{E}}]_g = N_g^{-1}[\tilde{\mathbf{E}}]_{\bar{g}}$ , donde  $[\tilde{\mathbf{E}}]_{\bar{g}}$  es el arreglo columna con componentes en la base normalizada. Con esto, la relación matricial queda escrita como:

$$[\tilde{\mathbf{E}}]_{\bar{\gamma}} = N_{\gamma}\Gamma^{-1}\Lambda^{-T}G'N_{g'}^{-1}[\mathbf{E}]_{\bar{g}'} \quad (5.30)$$

Muchos de los sistemas coordenados más comunes en física (coordenadas cilíndricas, esféricas, por ejemplo) tienen una base ortogonal. Para estos sistemas, la métrica es diagonal, y esto nos permitirá simplificar la ecuación anterior. Al recordar la definición de la métrica ( $\gamma_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ ), podemos ver que en este caso:  $N_{\gamma}\Gamma^{-1} = N_{\gamma}^{-1}$ , y análogamente:  $N_{g'}^{-1}G' = N_{g'}$ . Con lo que (5.30) se reduce a:

$$[\tilde{\mathbf{E}}]_{\bar{\gamma}} = N_{\gamma}^{-1}\Lambda^{-T}N_{g'}[\mathbf{E}]_{\bar{g}'} \quad (5.31)$$

Aquí debemos notar que, aunque ambas métricas tengan la misma “forma” (ambas sistemas cilíndricos, por ejemplo), debemos considerarlas como métricas distintas ya que pertenecen a espacios distintos.

Por último, notemos que, para una base ortogonal normalizada, la expresión (5.26) de los campos auxiliares es:

$$[\mathbf{D}]_{\bar{\gamma}} = N_{\gamma}\bar{\epsilon}\Gamma N_{\gamma}^{-1}[\tilde{\mathbf{E}}]_{\bar{\gamma}} = \bar{\epsilon}\Gamma[\tilde{\mathbf{E}}]_{\bar{\gamma}} \quad (5.32)$$

por lo que, en ambos casos, las propiedades materiales quedan descritas por la matriz:  $\bar{\epsilon}\Gamma$ .

## 5.4. Rayos como geodésicas

En esta sección, mostraremos como calcular las trayectorias de luz asociadas a un medio transformador, y desarrollaremos una nueva estrategia de diseño de materiales a partir de esta relación.

### 5.4.1. El Hamiltoniano óptico anisotrópico

La óptica Hamiltoniana es el modo más directo para el análisis de los rayos de luz (ver Sección 2.3). En la Sección 3.3 propusimos un Hamiltoniano basado en la relación de dispersión y demostramos que describe correctamente una de las ecuaciones de movimiento. En esta sección, terminaremos

la demostración encontrando este Hamiltoniano directamente del principio de Fermat.

Primero notemos que, para el caso anisotrópico, no tenemos ningún concepto de índice de refracción, por lo que no podemos expresar el camino óptico como en la Sección 2.1.4. Sin embargo, recordemos de (2.24) que el sentido original del camino óptico fue como la integral definida de la contribución espacial a la fase, con la fase dada como:

$$\phi = k_0 \ell(\mathbf{r}) - \omega t \qquad k_0 \nabla \ell = \mathbf{k} \qquad (5.33)$$

donde  $\mathbf{k}$  es el vector de onda local en cada punto. Esta fase es la que llamamos fase de onda cuasi-plana en el Capítulo 2. Tomando en cuenta que, para un tiempo dado, el cambio infinitesimal de esta fase está dada por:  $d\phi = k_0 dl$ , podemos escribir el principio de Fermat como:

$$\delta \ell_{12} = \delta \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dl = \delta \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{d\phi}{k_0} = 0 \qquad (5.34)$$

Sobre una trayectoria de luz, el cambio de la fase por unidad de distancia (longitud de arco) está dado por:

$$\frac{d\phi}{ds} = k_0 \frac{dl}{ds} = k_0 \nabla \ell \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{r}} = k_S \qquad (5.35)$$

donde, como en la Sección 3.3,  $k_S$  es la proyección del vector de onda en la dirección de los rayos. Hasta ahora no hemos supuesto nada acerca del medio, por lo que, en general, el camino óptico entre dos puntos se puede escribir como:

$$\ell_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{k_S}{k_0} ds \qquad (5.36)$$

Para el caso isotrópico, esta ecuación es exactamente (2.23). En este contexto,  $k_S/k_0$  es la generalización del índice de refracción. En particular, para un medio con  $\bar{\varepsilon} = \bar{\mu}$ , encontramos en (3.45):

$$k_S = k_0 (|\varepsilon \dot{\mathbf{r}} \cdot \bar{\varepsilon}^{-1} \dot{\mathbf{r}}|)^{1/2} = k_0 (|\varepsilon \varepsilon_{ij}^{-1} \dot{x}^j \dot{x}^i|)^{1/2} \qquad (5.37)$$

Si recordamos que la interpretación material de la métrica implicó:  $|\varepsilon \varepsilon_{ij}^{-1} = g_{ij}$  (ver 5.12), encontramos que la longitud de arco esta relacionada con la geodésica transformada como:

$$\ell_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (|\varepsilon| \varepsilon_{ij}^{-1} \dot{x}^j \dot{x}^i)^{1/2} ds = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j)^{1/2} ds = \tilde{s}_{12} \quad (5.38)$$

donde  $\tilde{s}_{12}$  es la longitud de la trayectoria geodésica transformada. Esto significa que las distancias en el espacio transformado se corresponden con las distancias ópticas en el espacio físico. Este resultado es el sentido de la óptica de transformación en la óptica geométrica. Esto también implica que el principio de Fermat se reduce al problema de las geodésicas en el espacio transformado:

$$\delta \ell_{12} = \delta \tilde{s}_{12} = 0 \quad (5.39)$$

El Lagrangiano óptico se puede escribir entonces en términos de las propiedades materiales o de la métrica del espacio transformado:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = (|\varepsilon| \varepsilon_{ij}^{-1} \dot{x}^i \dot{x}^j)^{1/2} = (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j)^{1/2} \quad (5.40)$$

Notemos que, como  $\dot{x}^i$  representa las coordenadas en el espacio físico,  $L = k_S \neq 1$ . En la siguiente sección discutiremos en detalle como interpretar este resultado. Directamente del Lagrangiano calculamos el momento óptico:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{g_{ij} \dot{x}^j}{(g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j)^{1/2}} = \frac{k_0}{k_S} |\varepsilon| \varepsilon_{ij}^{-1} \dot{x}^j = \frac{k_i}{k_0} \quad (5.41)$$

donde, en la última igualdad, usamos el resultado (3.43). Con esto vemos que, como en el caso isotrópico (Sección 2.2), podemos identificar el momento óptico con el vector de onda local como:

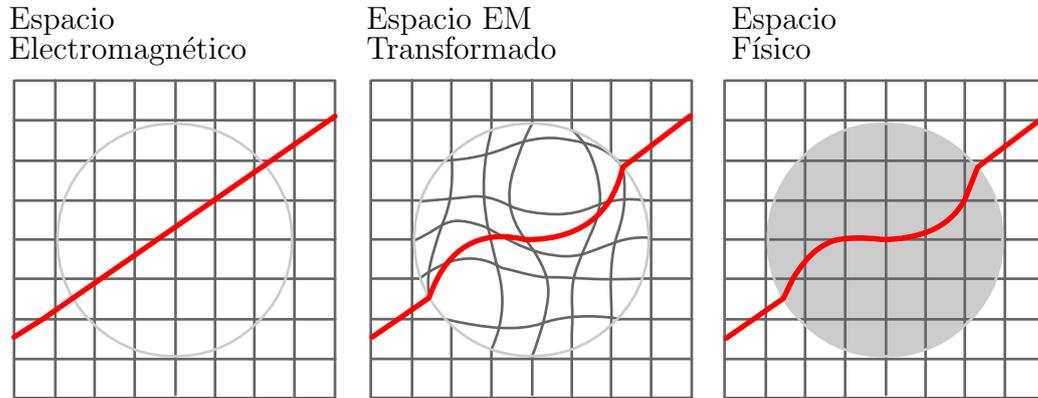
$$\mathbf{k} = k_0 \mathbf{p} \quad (5.42)$$

El Hamiltoniano de los rayos de luz es entonces exactamente el Hamiltoniano de las geodésicas (4.74). En términos de las propiedades materiales podemos escribirlo como:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} (g^{ij} p_i p_j - 1) = \frac{1}{2k_0^2} \left( \frac{\varepsilon^{ij}}{|\varepsilon|} k_i k_j - k_0^2 \right) \quad (5.43)$$

Si multiplicamos este Hamiltoniano por  $\alpha = k_0^2 |\varepsilon|$  obtenemos:

$$H'(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij} k_i k_j - |\varepsilon| k_0^2) \quad (5.44)$$



**Figura 5.2:** Esquema para el diseño de medios transformadores a partir de transformación de rayos de luz. En esta ilustración, tanto el espacio físico como el espacio electromagnético son cartesianos.

que es el Hamiltoniano que propusimos en (3.35). Con esto demostramos que las ecuaciones de movimiento para este Hamiltoniano describen correctamente las trayectorias de luz dentro del medio transformador:

$$\frac{dx^i}{du} = \frac{\partial H'}{\partial k_i} \quad \frac{dk_i}{du} = -\frac{\partial H'}{\partial x^i} \quad (5.45)$$

Como en (4.75), parametrizamos las ecuaciones de movimiento por longitud de arco. El parámetro para las ecuaciones que acabamos de establecer es:  $du = ds/\alpha = ds/(k_0^2|\varepsilon|)$ .

### 5.4.2. Transformando rayos de luz

Hemos encontrado entonces que la ecuación para los rayos de luz en un medio transformador (con propiedades (5.6)) es idéntica a la ecuación para las geodésicas de la métrica  $g_{ij}$ . Como en el caso de los campos, podemos interpretar que el medio material transforma los rayos desde un espacio electromagnético virtual, donde la transformación está dada por un cambio de coordenadas.

A partir del Hamiltoniano podemos analizar directamente el modo en el que interpretamos la transformación de los rayos. Primero analizaremos

el caso donde el espacio físico y el espacio electromagnético están descritos por una métrica cartesiana. De (5.41) encontramos que las componentes del vector de onda en el espacio físico y en el espacio electromagnético vacío están relacionadas como:

$$k_i = k_0 g_{ij} \dot{x}^i = k_0 \Lambda_i^{i'} g_{i'j'} \dot{x}^{i'} = k_0 \Lambda_i^{i'} p_{i'} = \Lambda_i^{i'} k_{i'} \quad (5.46)$$

Con esto, podemos escribir el Hamiltoniano de cuatro modos distintos:

$$2H = \delta^{i'j'} k_{i'} k_{j'} - k_0^2 \quad (5.47)$$

$$= \delta^{i'j'} \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^j k_i k_j - k_0^2 \quad (5.48)$$

$$= g^{ij} k_i k_j - k_0^2 \quad (5.49)$$

$$= \frac{\varepsilon^{ij}}{|\varepsilon|} k_i k_j - k_0^2 \quad (5.50)$$

Cada una de estas “formas” del Hamiltoniano tiene una interpretación en particular. La primera representa rayos de luz en el espacio electromagnético vacío en coordenadas cartesianas. Como estos son rayos en un espacio vacío, las trayectorias son necesariamente líneas rectas. La segunda y la tercera representan los rayos en el espacio transformado. Estos se pueden interpretar como una trayectoria transformada en el mismo sistema cartesiano, o como la misma trayectoria recta en un nuevo sistema coordenado caracterizado por  $g_{ij}$ . La cuarta expresión representa los rayos a través del medio transformador en el espacio físico. Como en este espacio también tenemos componentes cartesianas, la trayectoria debe coincidir con la trayectoria transformada. Notemos que la transformación entre (5.47) y (5.50) es exactamente la que propusimos en (3.34).

Si el espacio físico y/o el espacio electromagnético no están descritos por una métrica cartesiana, debemos considerar la estructura geométrica en cada espacio. Para discutir este caso, denotaremos al vector de onda dentro del medio como  $\tilde{\mathbf{k}}$ . En la expresión (5.46) no supusimos explícitamente ningún sistema coordenado, pero ésta es una expresión sólo para componentes covariantes. Esto es, si  $k_i$  representa las componentes del vector de onda en el espacio EM transformado, tenemos:  $\tilde{k}_i = k_i$ . Las componentes contravariantes, sin embargo, están relacionadas como:

$$\tilde{k}^i = \gamma^{ij} k_j = \gamma^{ij} g_{jl} k^l \quad (5.51)$$

Con lo que el Hamiltoniano en términos de componentes contravariantes queda escrito como:

$$\begin{aligned}
2H &= g_{i'j'} k^{i'} k^{j'} - k_0^2 = g_{i'j'} \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} k^i k^j - k_0^2 \\
&= g_{ij} k^i k^j - k_0^2 = g^{ij} \gamma_{il} \gamma_{jm} \tilde{k}^l \tilde{k}^m - k_0^2 \\
&= \frac{\varepsilon^{ij} \gamma_{jm}}{|\varepsilon|} \gamma_{il} \tilde{k}^l \tilde{k}^m - k_0^2
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Notemos que  $\varepsilon^{il} \gamma_{lj}$  son las componentes  $ij$  de la matriz la matriz  $\bar{\varepsilon} \Gamma$ . Las formas de este Hamiltoniano se pueden interpretar como en el caso anterior. La primera igualdad representa las mismas trayectorias rectas de luz en el vacío, pero ahora en las coordenadas caracterizadas por la métrica  $g_{i'j'}$ . En este caso, para que las trayectorias transformadas coincidan con las trayectorias de luz en el espacio físico, la métrica en este espacio y en el espacio EM vacío deben tener la misma forma (ambas coordenadas cilíndricas, por ejemplo).

Esto también sugiere otro modo de diseñar medios transformadores. Si definimos primero las trayectorias que queremos que sigan los rayos de luz dentro del medio, al establecer una transformación que lleve líneas rectas a estas trayectorias, las propiedades del medio estarán dadas, en términos de esta transformación, por (5.24). Como en la Sección 5.3.1, si limitamos la transformación en una región del espacio electromagnético, obtendremos un medio inmerso en el vacío en el espacio físico (ver Fig. 5.2).

Algunas de las generalizaciones que vale la pena mencionar —pero que no discutiremos en la tesis— son la posibilidad de usar transformaciones más complicadas (entre espacios no-euclidianos) y la expansión de los resultados al espacio-tiempo (ver [8][9]).



# Capítulo 6

## Medios transformadores

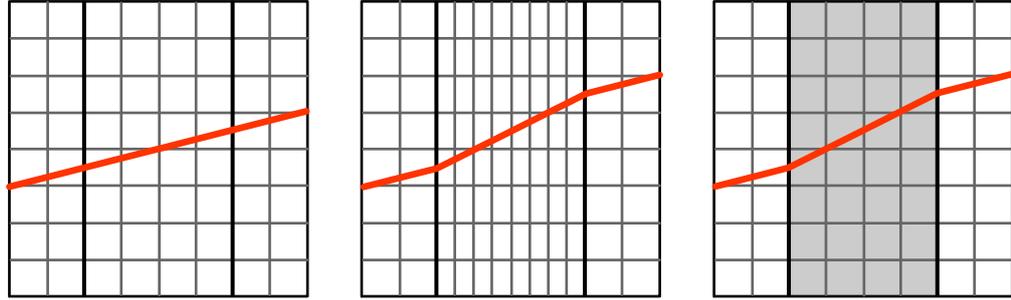
Aplicaremos los resultados de la sección anterior para diseñar tres medios materiales de transformación. Las transformaciones serán una compresión/dilatación, un dobléz (que se corresponderá con un medio con índice negativo) y un “hueco” en el espacio (que se corresponderá con una capa de invisibilidad). Mostraremos y discutiremos las principales características físicas de cada medio.

### 6.1. Compresión/Dilatación del eje óptico

El ejemplo más simple de la óptica de transformación es un medio que comprima o dilate el espacio en una dirección dada. Analizar este caso nos permitirá confirmar los resultados de la sección anterior, y nos servirá para entender ejemplos más complicados. Como vimos en la sección anterior, para diseñar un elemento óptico, debemos confinar la transformación a la región donde queremos que se encuentre el medio transformador. El medio que definiremos será una tablilla de longitud  $L$  que se corresponderá con la transformación:

$$x = x' \quad y = y' \quad z = \begin{cases} z' & z' < 0 \\ \alpha z' & 0 < z' < L \\ z' - L(1 - \alpha) & z' > L \end{cases} \quad (6.1)$$

Donde  $\alpha$  es el *factor de compresión/dilatación*, y puede ser cualquier número



**Figura 6.1:** Diseño de un medio que comprime el espacio en una dirección usando óptica de transformación. La transformación correspondiente es (6.1). En esta ilustración:  $\alpha = 1/2$ .

real positivo<sup>\*</sup>. La transformación divide el espacio en 3 regiones. En la región  $z < 0$ , tenemos una transformación *trivial* ( $x^i = x^{i'}$ ); en la región  $0 < z < L$ , el espacio es *comprimido/dilatado* por el factor  $\alpha$  en dirección  $z$ ; y en  $z > L$ , el espacio es *trasladado* una distancia  $L(1 - \alpha)$ . El espacio se contrae o se extiende bajo las condiciones:

- Compresión :  $0 < \alpha \leq 1$
- Dilatación :  $1 \leq \alpha$

Las propiedades materiales que se corresponden con (6.1) están dadas en términos del Jacobiano de la transformación (ver (5.6)). En las regiones  $z < 0$ ,  $z > L$ , el Jacobiano es simplemente la matriz identidad (ver (4.31)), por lo que, en ambas regiones, el medio resultante es el vacío ( $\varepsilon = \mu = 1$ ). En la región  $0 < z < L$ , por otro lado, el Jacobiano y las propiedades resultantes son:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\mu} = \frac{\Lambda \Lambda^T}{\det \Lambda} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Notemos que el medio que hemos definido se expande infinitamente en los ejes  $x$  y  $y$ . Como, además, las fronteras son dos planos perpendiculares al eje

<sup>\*</sup>En la siguiente sección analizaremos brevemente el caso negativo

$z$ , tenemos simetría rotacional con respecto a este eje; y, por tanto, el eje  $z$  se corresponde con el eje óptico.

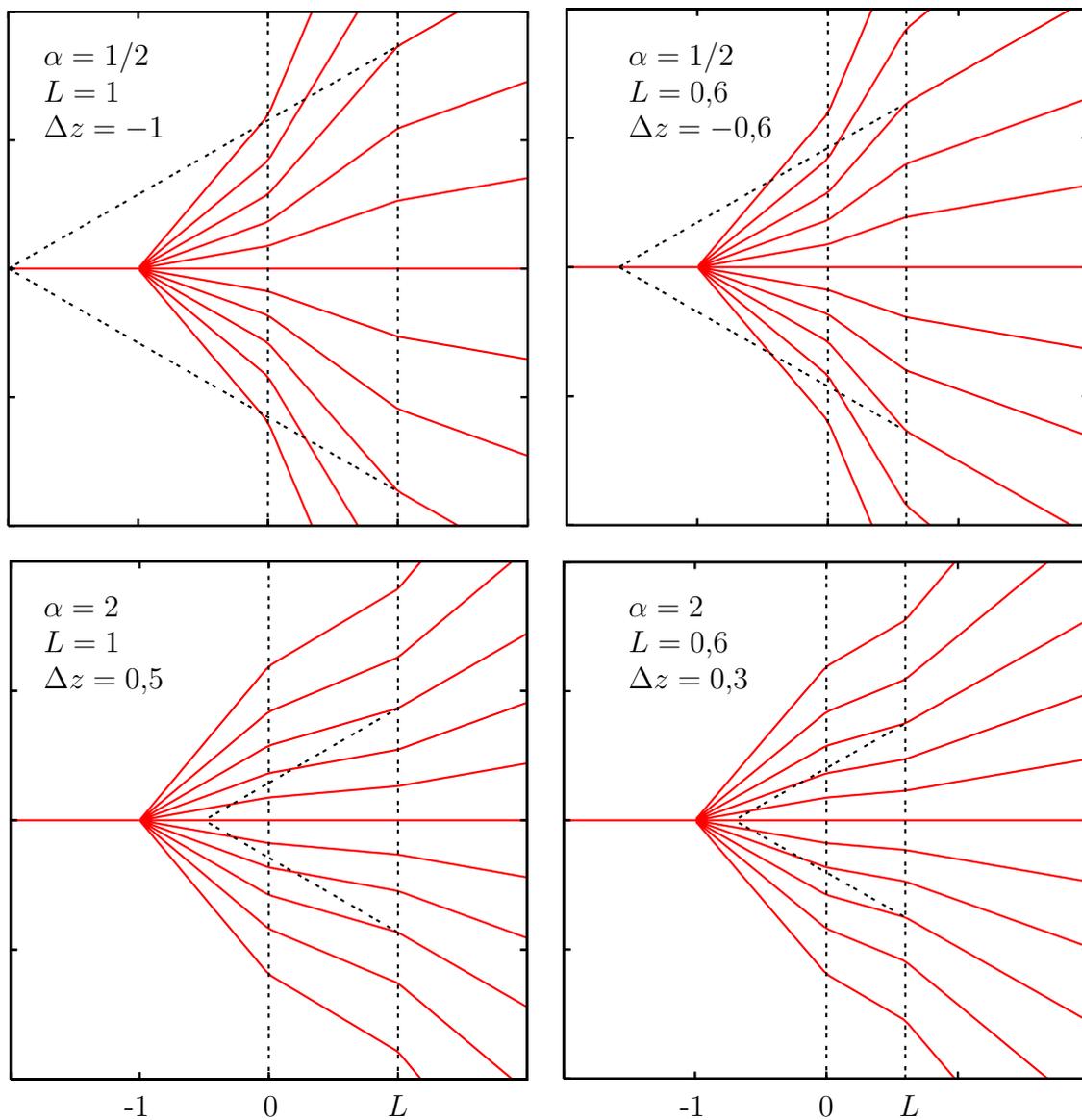
Como vimos en la sección anterior, podemos calcular muchas cantidades relevantes directamente de la transformación. Por ejemplo, si pensamos que un rayo incide en el medio en el punto  $x, z = 0$  con un ángulo  $\theta_i$  (con respecto al eje  $z$ ), entonces podemos encontrar el ángulo dentro del medio notando que, en el vacío, la recta tendría una altura  $\tan \theta_i$  en  $z = 1$ , mientras que la recta transformada debe alcanzar esta misma altura en  $z = \alpha$ , por lo que la pendiente del rayo en el medio transformador es:

$$\tan \theta = \frac{1}{\alpha} \tan \theta_i \quad (6.3)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que hace el rayo con la normal dentro del medio. También, de la transformación (6.1) se puede encontrar que los rayos salen del medio como si hubieran tenido un cambio de foco en dirección  $z$  dada por:

$$\Delta z = L\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \quad (6.4)$$

El valor de este cambio de foco es exactamente la traslación de la transformación inversa (donde:  $z' = z/\alpha$ ) en la región  $z > L$ . Esto lo podemos interpretar como que, para la luz, el salir del medio es equivalente a una dilatación/compresión dada por  $1/\alpha$  (ver Fig.6.1). Notemos que las traslaciones no se traducen en ninguna propiedad material; esto es: en la región  $z > L$ , el medio continua siendo el vacío. En nuestro caso, sin embargo, la traslación es necesaria para que la transformación sea continua en todo el espacio. Esta continuidad es deseable por dos razones: Por un lado permite que la frontera que definamos en el espacio EM sea exactamente la misma que la que contiene al medio en el espacio físico (sin la continuidad, la frontera sería distinta en el espacio EM transformado y, por tanto, en el espacio físico). Segundo, notemos que sólo si la transformación es continua podemos interpretar el efecto que tiene el medio sobre la luz exactamente como la transformación. Es decir, sin la traslación en la región  $z > L$  *habríamos obtenido el mismo medio material*, pero no tendríamos una correspondencia exacta con la transformación.



**Figura 6.2:** Rayos através de uma tablilla transformadora de anchura  $L$ . La transformación es una compresión/dilatación en dirección  $z$ . Los rayos salen de la tablilla con un aparente cambio de posición en dirección  $z$ . Tanto  $L$  como  $\Delta z$  están dados en unidades arbitrarias de distancia.

### 6.1.1. Condiciones de frontera

Como vimos en el capítulo anterior, también los campos se pueden obtener a partir de la transformación. En esta sección, sin embargo, los obtendremos directamente a partir de la relación de dispersión y las condiciones en la frontera, comprobando que coinciden con los resultados de la óptica de transformación. Llamaremos región 1 a la región que contiene al vacío ( $z < 0$ ), y región 2 a la que contiene al medio de transformación ( $0 < z < L$ ). Las propiedades materiales de cada región serán entonces:

$$\varepsilon_1 = \mu_1 = 1 \quad \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\mu}_2 = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Con esto, en la región 1, la relación de dispersión es simplemente:

$$k_{1x}^2 + k_{1y}^2 + k_{1z}^2 = k_0^2 \quad (6.6)$$

donde  $k_0 = \omega/c$ . En la región 2, dentro del medio, la relación de dispersión está dada por (ver (3.31)):

$$\varepsilon_{2x}k_{2x}^2 + \varepsilon_{2y}k_{2y}^2 + \varepsilon_{2z}k_{2z}^2 = |\varepsilon_2|k_0^2 \quad (6.7)$$

donde  $|\varepsilon_2| = \det(\varepsilon_2)$ . Como la proyección de  $\mathbf{k}$  en la frontera debe conservarse, tenemos:  $k_{2x} = k_{1x}$ ,  $k_{2y} = k_{1y}$ . Usando este hecho, podemos encontrar una relación entre las componentes normales despejando de (6.7):

$$k_{2z}^2 = \frac{1}{\varepsilon_{2z}} (|\varepsilon_2|k_0^2 - \varepsilon_{2x}k_{2x}^2 - \varepsilon_{2y}k_{2y}^2) = \frac{1}{\alpha^2} (k_0^2 - k_{1x}^2 - k_{1y}^2) = \frac{1}{\alpha^2} k_{1z}^2 \quad (6.8)$$

Como la proyección en  $z$  del vector de onda incidente y transmitido es positiva, podemos escribir:

$$k_{2z} = \frac{1}{\alpha} k_{1z} \quad (6.9)$$

Que es exactamente el resultado que predice la óptica de transformación en (5.46). También, la componente normal del campo  $\mathbf{D}$  debe conservarse, esto es:  $D_{1z} = D_{2z}$ , lo que implica:

$$\varepsilon_{1z}E_{1z} = \varepsilon_{2z}E_{2z} \quad \Rightarrow \quad E_{2z} = \frac{1}{\alpha}E_{1z} \quad (6.10)$$

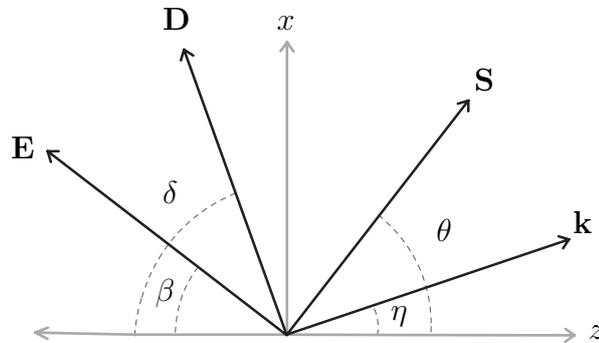
Análogamente, debido a la conservación de la componente normal del campo  $\mathbf{B}$  tenemos:

$$H_{2z} = \frac{1}{\alpha}H_{1z} \quad (6.11)$$

Notemos que, de nuevo, estos resultados coinciden con las relaciones (5.19), que obtuvimos a partir de la óptica de transformación.

### 6.1.2. Dirección de campos y rayos

Como el medio de transformación que hemos obtenido es anisotrópico, la dirección de propagación de los rayos y la dirección de propagación de los frentes de onda no coinciden. Tampoco coinciden en dirección los campos electromagnéticos con sus respectivos campos auxiliares. En esta sección encontraremos el ángulo entre estos campos en función del factor de compresión/dilatación  $\alpha$ . Con esto, también comprobaremos que la dirección de los rayos que encontramos en (6.3) se puede obtener directamente a partir de las propiedades materiales.



**Figura 6.3:** Dirección de los campos en un punto dentro del medio transformador para polarización-p.

Por simplicidad, pensemos que el plano de incidencia es el plano  $xz$  y que el campo eléctrico no tiene proyección en el eje  $y$  (polarización-p). Como el tensor  $\bar{\varepsilon}$  es diagonal, de la relación constitutiva  $\mathbf{D} = \varepsilon_0\bar{\varepsilon}\mathbf{E}$  obtenemos:

$$\frac{D_x}{D_z} = \frac{\varepsilon_x E_x}{\varepsilon_z E_z} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{E_x}{E_z} \quad (6.12)$$

Siguiendo la Figura 6.3, donde  $\beta$  es el ángulo que hace el campo eléctrico con la dirección normal (la dirección  $z$ ) y  $\delta$  el ángulo que hace el campo de desplazamiento, la relación anterior implica:

$$\tan \delta = \frac{1}{\alpha^2} \tan \beta \quad (6.13)$$

Además, sabemos de las ecuaciones de Maxwell que:  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$ , que en nuestro caso se puede reescribir como:

$$\frac{k_x}{k_z} = -\frac{D_z}{D_x} \quad (6.14)$$

Si  $\eta$  es el ángulo que hace el vector de onda  $\mathbf{k}$  con la dirección normal, la ecuación anterior implica:

$$\tan \eta = \frac{-1}{\tan \delta} = \frac{-\alpha^2}{\tan \beta} \quad (6.15)$$

Como el campo eléctrico y el vector de Poynting son ortogonales ( $\mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = 0$ ), del mismo modo en que se obtuvo la ecuación (6.15), encontramos (ver Fig. 6.3):

$$\tan \theta = \frac{-1}{\tan \beta} \quad (6.16)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que hace el vector de Poynting con la normal, esto es: la dirección de los rayos. Juntando los resultados (6.15) y (6.16) obtenemos:

$$\tan \theta = \frac{1}{\alpha^2} \tan \eta \quad (6.17)$$

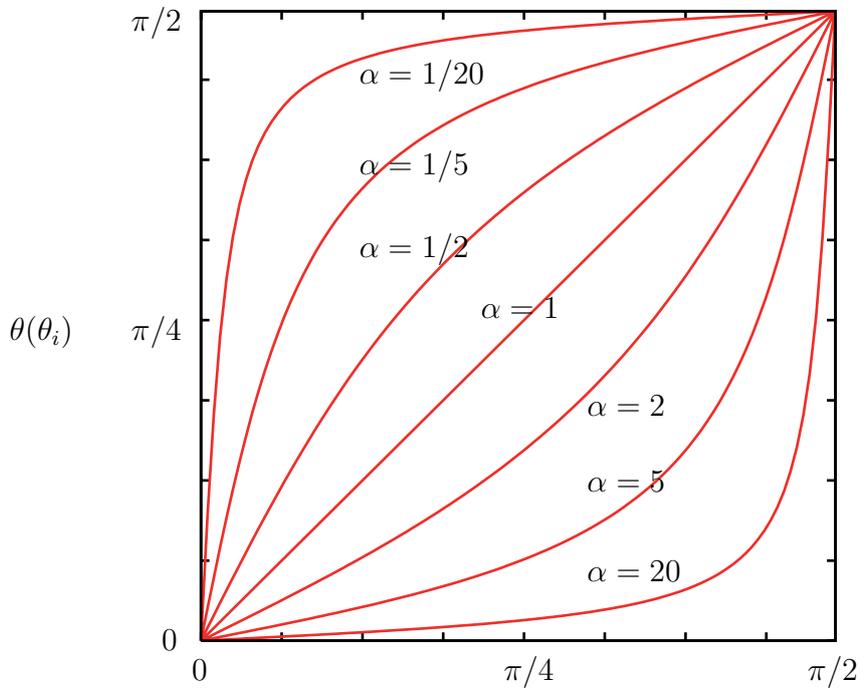
Ahora, pensemos en un rayo que incide en el medio desde el vacío con un ángulo  $\theta_i$ . Antes de incidir, el vector de onda y el vector de Poynting están en la misma dirección. En (6.9), mostramos como cambia la componente normal del vector de onda, y, como la componente paralela se conserva, el ángulo de  $\mathbf{k}$  dentro del medio está relacionado con el ángulo de incidencia como:

$$\tan \eta = \frac{k_{2x}}{k_{2z}} = \frac{\alpha k_{1x}}{k_{1z}} = \alpha \tan \theta_i \quad (6.18)$$

Sustituyendo (6.18) en (6.17) recuperamos la “ley de refracción” que obtuvimos en (6.3) para nuestro medio transformador:

$$\tan \theta = \frac{1}{\alpha} \tan \theta_i \quad (6.19)$$

En la Figura 6.4 graficamos el ángulo de los rayos dentro del medio como función del ángulo de incidencia para distintos valores de  $\alpha$ . Al comparar (6.19) con (6.18) nos podemos dar cuenta de que las líneas de campo del vector de onda se transforman de modo inverso a los rayos. Esto es: si  $\alpha$  es una compresión, las líneas de  $\mathbf{k}$  cambian de dirección del mismo modo que lo harían los rayos en una dilatación dada por  $1/\alpha$ . Con esto, si cambiamos  $\alpha$  por  $1/\alpha$ , la Figura 6.4 se corresponde con la gráfica de la función  $\eta(\theta_i)$ .

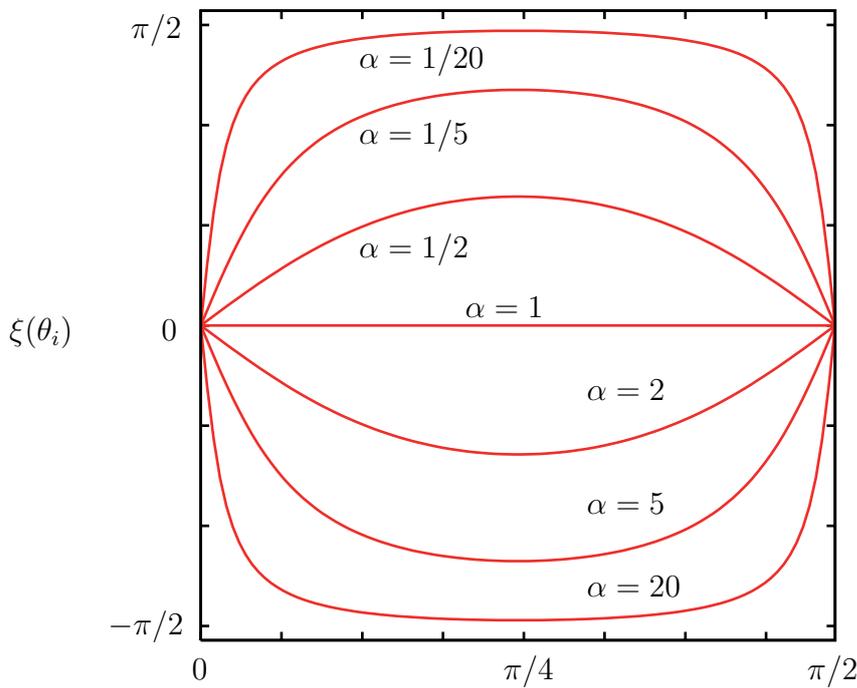


**Figura 6.4:** La dirección de los rayos dentro del medio dependen del ángulo de incidencia y del factor de compresión/dilatación  $\alpha$ .

El ángulo entre el vector de Poynting y el vector de onda depende tanto del ángulo de incidencia como del factor  $\alpha$ . De (6.19) y (6.18), este ángulo está dado como:

$$\xi = \theta - \eta = \arctan\left(\frac{1}{\alpha} \tan \theta_i\right) - \arctan(\alpha \tan \theta_i) \quad (6.20)$$

Como  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{S}$  son perpendiculares a  $\mathbf{D}$  y a  $\mathbf{E}$  respectivamente, el ángulo entre estos vectores también es  $\xi$ . Este ángulo, entonces, nos da información sobre que tan anisotrópico es el medio. En la Figura 6.5 podemos ver que, mientras más extremo sea el valor de  $\alpha$ , no sólo se llegan a valores más pronunciados de  $\xi$ , sino que se alcanzan cada vez más rápido. También, en la Figura 6.5 podemos ver que la separación máxima se alcanza en  $\theta_i = \pi/4$  para cualquier valor de  $\alpha$ .

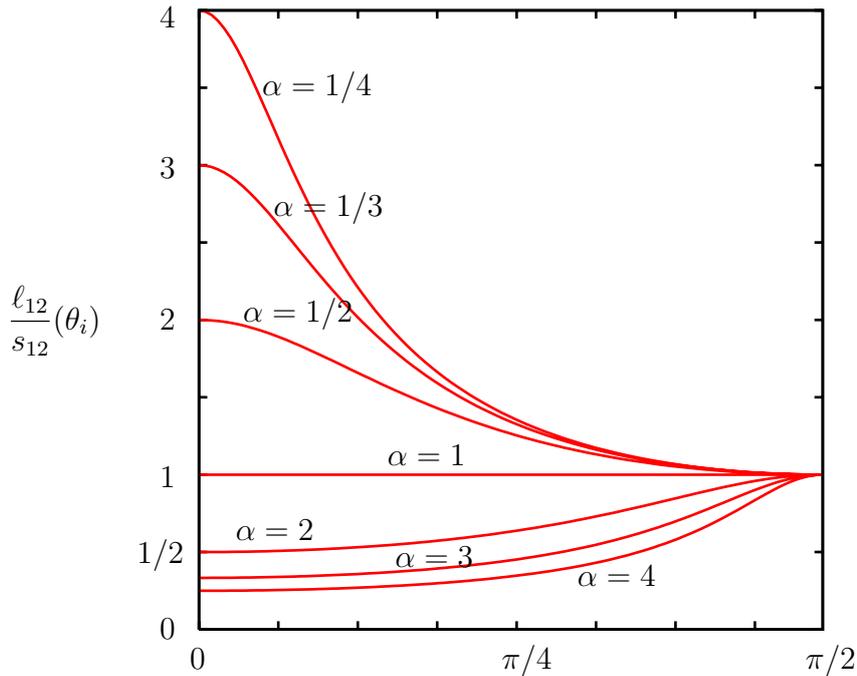


**Figura 6.5:** El ángulo entre  $\mathbf{k}$  y la dirección de los rayos (el vector de Poynting) depende del ángulo de incidencia y del factor de compresión/dilatación  $\alpha$ .

Podemos usar el ángulo  $\xi$  para describir como depende la distancia óptica que tiene que recorrer la luz dentro del medio con respecto al ángulo de incidencia. En (5.35) mostramos que, en general, podemos escribir el camino óptico como:  $k_0 d\ell = k_S ds$ , donde  $k_S$  es la proyección del vector de onda en la dirección de los rayos (el vector de Poynting). En nuestro caso, como tenemos un medio homogéneo, si integramos entre dos puntos dentro del medio encontramos:

$$\frac{\ell_{12}}{s_{12}} = \frac{k_S}{k_0} = \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} \cos \xi \quad (6.21)$$

donde  $s_{12}$  es la distancia que recorre la luz en el espacio físico. Por ejemplo, si integramos a lo largo de una tablilla de longitud  $L$  tenemos:  $s_L = L/\cos\theta$  (recordemos que en el medio homogéneo la luz viaja en línea recta). La expresión (6.21) representa entonces la razón entre la distancia física y el camino óptico entre dos puntos dentro del medio. En la Figura 6.6 hemos graficado esta cantidad como función del ángulo de incidencia para distintos valores de  $\alpha$ . En un medio isotrópico, esta razón no depende del ángulo ( $\ell_{12}/s_{12} = n$ , donde  $n$  es el índice de refracción) por lo que, en nuestro caso, podemos pensar que la anisotropía se origina en el hecho de que sólo hemos comprimido el espacio óptico en una dirección (ver Fig. 6.1). En este sentido,  $k_S/k_0$  resulta ser la generalización del índice de refracción para el caso anisotrópico.



**Figura 6.6:** El camino óptico a través del medio se puede entender en términos de la transformación. La dependencia con el ángulo (la anisotropía) surge de que sólo hemos dilatado/comprimido en una dirección.

Por último, notemos que el caso para polarización-s es idéntico, sólo debemos sustituir:  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ , y  $\bar{\epsilon} \rightarrow \bar{\mu}$ . Que los dos casos de polarización sean el mismo es una consecuencia directa de que la respuesta magnética y la respuesta eléctrica son idénticas ( $\bar{\epsilon} = \bar{\mu}$ ), ya que sólo así las pendientes de los respectivos vectores son las mismas.

### 6.1.3. Transferencia de energía

La transmitancia es la razón entre el flujo incidente y el flujo transmitido de energía. Si  $\hat{\mathbf{n}}$  es la normal a la superficie (en nuestro caso:  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ ), la transmitancia está definida como:

$$T = \frac{\mathbf{S}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\mathbf{S}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}} = \frac{S_{2z}}{S_{1z}} \quad (6.22)$$

Para un medio anisotrópico, al sustituir  $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} = \omega \mu_0 \bar{\mu} \mathbf{H}$  en la definición del vector de Poynting ( $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ) tenemos:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\omega \mu_0} \mathbf{E} \times \bar{\mu}^{-1} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \quad (6.23)$$

Tomando la componente  $z$  de la expresión anterior en la región 2, encontramos:

$$\begin{aligned} \omega \mu_0 S_{2z} &= E_{2x} \frac{1}{\mu_{2y}} (k_{2z} E_{2x} - k_{2x} E_{2z}) - E_{2y} \frac{1}{\mu_{2x}} (k_{2y} E_{2z} - k_{2z} E_{2y}) \quad (6.24) \\ &= E_{1x} \alpha \left( \frac{k_{1z}}{\alpha} E_{1x} - k_{1x} \frac{E_{1z}}{\alpha} \right) - E_{1y} \alpha \left( k_{1y} \frac{E_{1z}}{\alpha} - \frac{k_{1z}}{\alpha} E_{1y} \right) \\ &= \omega \mu_0 S_{1z} \end{aligned}$$

donde usamos (6.9), (6.10) y el hecho de que las componentes paralelas se conservan ( $k_{1x} = k_{2x}$ ,  $E_{1x} = E_{2x}$ ). Este resultado implica inmediatamente que:

$$T = 1 \quad (6.25)$$

Esto significa que toda la energía incidente es transmitida y, por tanto, la luz no sufre ninguna atenuación al atravesar el medio. También, este resultado confirma que el medio se corresponde exactamente con la transformación, ya que ésta no implicó ninguna atenuación de los campos.

### 6.1.4. Impedancia del medio

Si toda la energía es transmitida no puede haber un campo reflejado. Es decir, nuestro medio transformador debe ser perfectamente no-reflector para cualquier ángulo y polarización. Un medio con esta característica se dice que tiene la impedancia exacta del vacío. La impedancia es una medida de la oposición del medio al cambio cuando es aplicada una fuerza y está relacionada con la magnitud de los campos reflejados. Para polarización-p, la impedancia y el coeficiente de reflexión están definidos como:

$$r_p = \frac{Z_{2p} - Z_{1p}}{Z_{2p} + Z_{1p}} \quad Z_p = \frac{E_x}{H_y} \quad (6.26)$$

De las ecuaciones de Maxwell (3.12) tenemos que, para una onda plana (o cuasi-plana) monocromática, en ambos medios se debe cumplir:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad E_x = \frac{k_z}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_x} H_y \quad (6.27)$$

donde nos hemos fijado únicamente en la componente  $x$ . Al calcular  $Z_p$  en la región 2 encontramos:

$$Z_{2p} = \frac{E_{2x}}{H_{2y}} = \frac{k_{2z}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{2x}} = \frac{(k_{1z}/\alpha)}{\omega \varepsilon_0 / \alpha} = \frac{k_{1z}}{\omega \varepsilon_0} = Z_{1p}$$

donde, de nuevo, hemos usado(6.9). Para polarización-s la impedancia y el coeficiente de reflexión están definidos como:

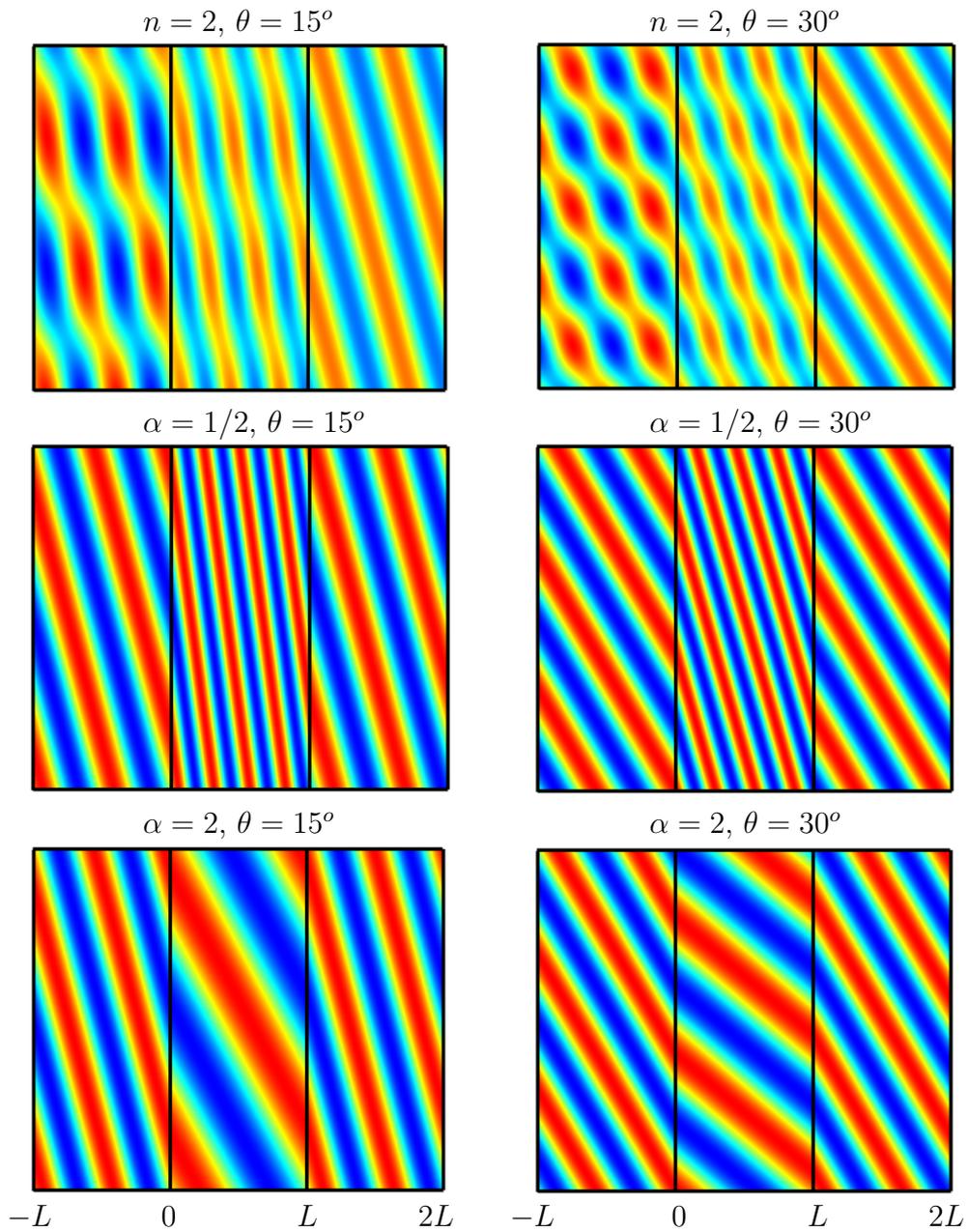
$$r_s = \frac{Z_{2s} - Z_{1s}}{Z_{2s} + Z_{1s}} \quad Z_s = \frac{E_y}{H_x} \quad (6.28)$$

Ahora, tomamos de las ecuaciones de Maxwell:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \bar{\mu} \mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad H_x = -\frac{k_z E_y}{\omega \mu_0 \mu_x} \quad (6.29)$$

con lo que la impedancia para polarización-s en la región 2 está dada por:

$$Z_{2s} = \frac{E_{2y}}{H_{2x}} = -\frac{\omega \mu_0 \mu_{2x}}{k_{2z}} = -\frac{\omega \mu_0 / \alpha}{(k_{1z}/\alpha)} = -\frac{\omega \mu_0}{k_{1z}} = Z_{1s} \quad (6.30)$$



**Figura 6.7:** La magnitud del campo  $|\mathbf{E}|$  a través de un medio isotrópico con índice de refracción  $n = 2$ ; y a través del medio compresor/dilatador para dos valores de  $\alpha$ . Los medios transformadores son perfectamente no-reflectores.

Hemos mostrado, entonces, que la impedancia del medio transformador es la misma que en el vacío, y que, por tanto, los coeficientes de reflexión se anulan:

$$r_p, r_s = 0 \quad (6.31)$$

En la Figura 6.7 ilustramos este resultado mostrando  $|\mathbf{E}|$  para una onda plana que incide sobre el medio transformador. La gráfica se obtuvo a partir de un modelo numérico realizado en el software comercial COMSOL<sup>\*\*</sup>. Éste resuelve directamente las ecuaciones de Maxwell usando el método del elemento finito; el material está contenido en la región  $0 < z < L$ , y las otras dos regiones contienen aire ( $n \approx 1$ ). En las dos gráficas superiores, los campos atraviesan un medio isotrópico con índice de refracción  $n = 2$ . Este medio es transparente, pero presenta un patrón de interferencia debido a los campos reflejados. La magnitud de los campos reflejados depende del ángulo de incidencia y del índice de refracción. En el caso del medio compresor/dilatador, por otro lado, no vemos ningún campo reflejado, lo que comprueba numéricamente que el medio es perfectamente no-reflector. También notemos que la onda se comprime/expande de acuerdo con la transformación.

## 6.2. Índice negativo como transformación

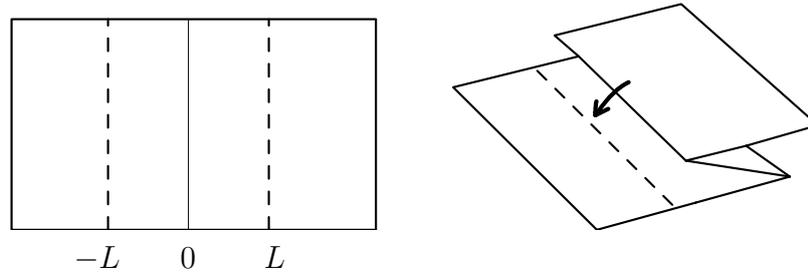
Quizá lo primero que se debe decir acerca de los materiales con índice de refracción negativa es que, hasta la fecha, no se ha encontrado ningún medio natural con esta propiedad. A pesar de esto, en 1967<sup>\*</sup> Victor Veselago mostró que la existencia de este tipo de materiales no estaba prohibida por ninguna ley fundamental de la física; y que, de hecho, un medio con  $\varepsilon, \mu < 0$  *debe* tener un índice de refracción negativo. Veselago también estudio otras propiedades interesantes de este tipo de medios, pero, tras la publicación de estos resultados teóricos, el hecho de que no se encontrara ningún material con estas características en la naturaleza hizo que el interés se disipara rápidamente. Con los avances de la tecnología de materiales, sin embargo, la idea

---

<sup>\*\*</sup>No. Licencia 3073222

<sup>\*</sup>En muchas referencias el año aparece como 1968 porque fue hasta este año en que el artículo de Veselago se publicó en inglés.

fue retomada por John B. Pendry\*\* y David Smith —entre otros— en el año 2000, y se convirtió en una de las principales inspiraciones para el desarrollo de los metamateriales y la óptica de transformación (ver Introducción).



**Figura 6.8:** La transformación se puede visualizar como un "doble" del espacio.

A pesar de que originalmente no fue pensado así, un medio con índice negativo se puede ver también como una transformación del espacio. La transformación es, de hecho, un caso particular de la transformación de la sección anterior, donde ahora tomamos valores negativos para el factor de compresión/dilatación  $\alpha$ . En esta sección, consideraremos el caso más simple con  $\alpha = -1$ , y llegaremos a la conclusión de que se corresponde con un medio isotrópico con índice de refracción  $n = -1$ . Sustituyendo  $\alpha = -1$  en la transformación (6.1) tenemos:

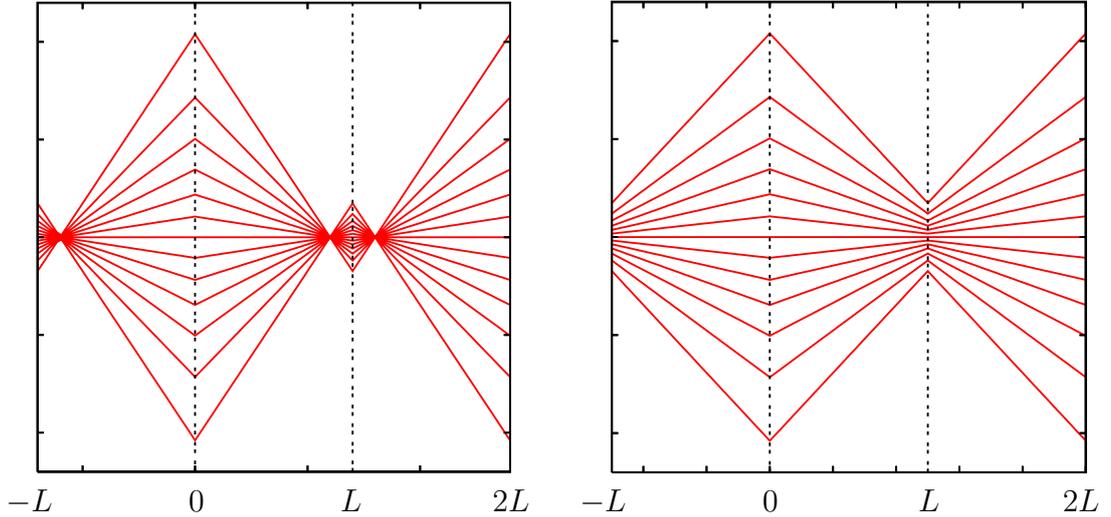
$$x = x' \quad y = y' \quad z = \begin{cases} z' & z' < 0 \\ -z' & 0 < z' < L \\ z' - 2L & z' > L \end{cases} \quad (6.32)$$

Del mismo modo que en la sección anterior, hemos considerado una tablilla de ancho  $L$ , y hemos dividido el espacio en tres regiones: en  $z < 0$  aplicamos la transformación identidad, en la región  $0 < z < L$  tenemos la transformación  $z = -z'$ , y para  $z > L$  tenemos una traslación por un factor  $2L$ . Recordemos de la sección anterior que esta traslación es necesaria para

---

\*\*Pendry descubrió, además, que un medio con índice negativo es también una lente perfecta, es decir, sin límite de resolución.

que la transformación sea continua, y no se traduce en ninguna propiedad material. La transformación es multi-valuada y lleva la recta  $z' = L$  a la recta  $z = -L$ , por lo que podemos visualizarla como un “doblez” del espacio (ver Figura 6.32, [8]).



**Figura 6.9:** Rayos através un medio con índice de refracción  $n = -1$  y ancho  $L$ .

Este dobléz implica que la luz debe parecer transmitirse inmediatamente del plano  $z = -L$  al plano  $z = L$  como si la región  $-L < z < L$  no existiera (ver Figura 6.9). Podemos decir, por tanto, que la transformación “anula” el espacio óptico  $-L < z' < L$ . Este comportamiento debe implicar que el medio negativo “regresa” el avance de la fase, y esto, a su vez, debe traducirse en que la fase (los frentes de onda) viaja en dirección contraria a la propagación de los rayos de luz, dada por el vector de Poynting.

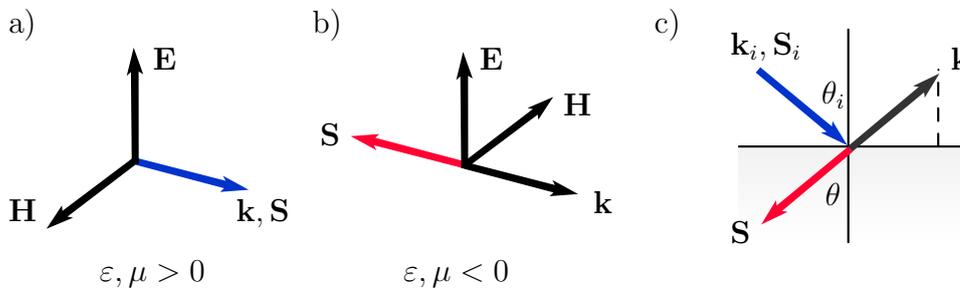
A partir de (6.32) se puede calcular fácilmente el Jacobiano de la transformación y las propiedades materiales del medio transformador correspondiente:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \bar{\epsilon} = \bar{\mu} = \frac{\Lambda \Lambda^T}{\det \Lambda} = -\mathbf{I} \quad (6.33)$$

donde  $I$  es la matriz identidad. En este caso hemos obtenido un medio isotrópico con las propiedades materiales:  $\varepsilon = \mu = -1$ . Para asignar un índice de refracción recordemos que definimos originalmente  $n^2 = \varepsilon\mu$  (ver (2.14)), si tuviéramos propiedades de signo opuesto ( $\varepsilon\mu < 0$ ) el índice sería puramente imaginario y no habría propagación de luz, cuando ambas cantidades tienen el mismo signo ( $\varepsilon\mu > 0$ ), por otro lado, tenemos un medio transparente que propaga radiación electromagnética. Si las propiedades materiales son positivas el índice de refracción debe ser positivo, y si tenemos cantidades negativas *debemos* tomar el signo negativo. Este hecho es una consecuencia directa de las ecuaciones de Maxwell. Notemos que, de las expresiones:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\varepsilon\mathbf{E}, \qquad (6.34)$$

tenemos que  $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$  forman una triada de vectores ortogonales. La orientación\* —derecha o izquierda— de la triada de vectores depende del signo de las propiedades materiales como se puede ver en la Figura 6.10. Si ambas son positivas ( $\varepsilon, \mu > 0$ ) tenemos una triada derecha y si ambas son negativas ( $\varepsilon, \mu < 0$ ) tenemos una triada izquierda\*\*. Como  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , la triada ortogonal  $\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$  siempre es derecha, y, por tanto, cuando  $\varepsilon, \mu < 0$ , tiene la orientación opuesta a  $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ . Esto se traduce en que  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{k}$  son antiparalelos dentro del medio negativo.



**Figura 6.10:** En un medio con  $\varepsilon, \mu > 0$ ,  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{S}$  van en la misma dirección (a); si  $\varepsilon, \mu < 0$ , van en direcciones opuestas (b). Como  $\mathbf{k}_{\parallel}$  debe conservarse, si la luz va de un medio derecho a uno izquierdo, los rayos se refractan negativamente (c).

\*Si tenemos signos opuestos no es posible definir una orientación. Esto se corresponde con que, en este caso, no se puede definir un índice real.

\*\*Por esta razón empezó a conocerse a los materiales de índice negativo como materiales izquierdos.

Cuando la luz incide desde el vacío en un medio negativo, la componente paralela de  $\mathbf{k}$  debe conservarse (este hecho es una consecuencia de la continuidad de la fase [18]) y  $\mathbf{S}$  debe alejarse de la frontera, por lo que el vector de Poynting se refracta en el tercer cuadrante (ver Figura 6.10c) en vez de en el cuarto cuadrante como en el caso ordinario. Ese fenómeno se conoce como refracción negativa. Notemos también de la Figura 6.10c que, como los rayos de luz van en dirección del vector de Poynting, si queremos conservar la misma ley de la refracción:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta} = n \quad (6.35)$$

el índice de refracción  $n$  debe ser negativo cuando  $\varepsilon, \mu < 0$ . En el caso que obtuvimos a partir de la transformación (6.32) ( $\varepsilon = \mu = -1$ ), el índice debe ser por tanto:  $n = -1$ .

Por su puesto, como los materiales negativos no se han encontrado en la naturaleza, un medio de este tipo debe ser construido artificialmente. En el siguiente capítulo discutiremos las ideas esenciales detrás de estos medios artificiales (metamateriales) y los retos que enfrenta esta disciplina naciente. El primer medio negativo, de hecho, fue construido en el año 2000 por David Smith en la Universidad de California en San Diego [11]. A pesar de esta evidencia y otros experimentos subsecuentes, debemos mencionar que los materiales con índice negativo han sido objeto de polémica desde el momento en el que fueron propuestos [19]. Aunque algunas voces críticas permanecen, el consenso general es que la refracción negativa tiene sentido y que es un fenómeno que vale la pena seguir explorando<sup>\*\*\*</sup>.

### 6.3. Capa cilíndrica de invisibilidad

Una de las primeras aplicaciones de la óptica de transformación fue el diseño de una capa de invisibilidad (ver Introducción). Este ejemplo es, sin duda, la aplicación que más interés ha generado, e, incluso, la óptica de transformación es comúnmente conocida como la teoría detrás de la invisibilidad.

---

<sup>\*\*\*</sup>No olvidemos, sin embargo, que estamos tratando con modelos idealizados y esto impone límites en la aplicabilidad de estas ideas. No hemos considerado disipación y sólo hemos tratado con cantidades macroscópicas (homogeneizadas), por ejemplo.

Es claro, sin embargo, que las posibilidades de la óptica de transformación trascienden este caso.

La óptica de transformación permite el diseño de capas de invisibilidad de cualquier forma[10], pero el caso más simple es el de una capa cilíndrica y, por tanto, es el que desarrollaremos en esta sección. La idea de la transformación es hacer un “hueco” en el espacio electromagnético que se traduzca, en el espacio físico, en una región que no interactúe con los campos electromagnéticos. Para esto, tomamos una región cilíndrica  $r' \leq b$  y la comprimimos en una región  $a \leq r \leq b$  en el espacio transformado. La transformación más simple que cumple con estas características se puede escribir en coordenadas cilíndricas como:

$$r = \begin{cases} \alpha r' + a & r' \leq b \\ r' & r' \geq b \end{cases} \quad \phi = \phi' \quad z = z' \quad (6.36)$$

donde  $\alpha$  representa un coeficiente de compresión dado por:

$$\alpha = \frac{b-a}{b} < 1 \quad (6.37)$$

En términos de este coeficiente, la transformación comprime una región de radio  $b$  en una región anular de radio  $\alpha b = b - a$ . Fuera del cilindro exterior, en la región  $r' \geq b$ , tenemos una transformación trivial, por lo que esta región permanecerá sin cambios en el espacio físico; esto es: seguirá siendo el vacío. Notemos que en  $r' = b$  tenemos  $r = b$ , por lo que la transformación es continua en la frontera. Como en la Sección 6.1, este hecho se traducirá en un medio perfectamente no-reflector. El “hueco” en el espacio transformado surge porque la transformación manda la recta  $r' = 0$  (el eje  $z'$ ) al volumen cilíndrico  $r \leq a$ . En términos de la transformación inversa, es como si colapsáramos toda la región  $r \leq a$  en una sola línea recta, es decir, la transformación lleva el volumen  $r \leq a$  a una región con un volumen infinitamente pequeño.

### 6.3.1. Propiedades materiales

Como definimos la transformación en coordenadas cilíndricas, nos convendrá usar estas coordenadas tanto en el espacio EM como en el espacio

físico. En la Sección 5.3.2 mostramos que, para el caso de sistemas coordenados arbitrarios, las propiedades materiales están dadas en términos de la transformación como (ver (5.25)):

$$\bar{\epsilon} = \bar{\mu} = \frac{\sqrt{g'}}{\sqrt{\gamma}} \frac{\Lambda G'^{-1} \Lambda^T}{\det \Lambda} \quad (6.38)$$

donde  $G'$  es la métrica del espacio electromagnético y  $\gamma$  es el determinante de  $\Gamma$ , la métrica del espacio físico. En la región  $r \leq b$  el Jacobiano de la transformación (6.36) es:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial r'} & \frac{\partial r}{\partial \theta'} & \frac{\partial r}{\partial z'} \\ \frac{\partial \theta}{\partial r'} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} & \frac{\partial \theta}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial r'} & \frac{\partial z}{\partial \theta'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

En la región  $r \geq b$  el Jacobiano es simplemente la identidad ( $\Lambda = I$ ). Notemos que el Jacobiano que hemos obtenido tiene la misma forma que el Jacobiano de la compresión/dilatación (6.2). Esto se corresponde con que la transformación (6.36) es esencialmente una compresión del espacio. La diferencia es que el Jacobiano en este caso está dado en coordenadas cilíndricas. Este hecho implica que debemos usar explícitamente la métrica del espacio electromagnético y la métrica del espacio físico:

$$G' = \text{diag}(1, r'^2, 1) \quad \Gamma = \text{diag}(1, r^2, 1) \quad (6.40)$$

De esta expresión, es claro que, aunque ambas tienen una “forma” cilíndrica, debemos de considerarlas como métricas distintas ya que  $r' \neq r$ . Con el Jacobiano y las métricas podemos calcular el coeficiente escalar en (6.38):

$$\frac{\sqrt{g'}}{\sqrt{\gamma} \det \Lambda} = \frac{r'}{\alpha r} \quad (6.41)$$

Antes de calcular las propiedades del medio, recordemos que, si usamos un sistema coordenado arbitrario, debemos denotar las propiedades como:  $\bar{\epsilon} \Gamma$  (esto es una consecuencia de que (6.38) es válida únicamente para componentes covariantes, al multiplicar por  $\Gamma$  las convertimos en componentes

contravariantes (vectoriales). Ver Sección 5.3.2). Tomando esto en cuenta y aprovechando que sólo tenemos matrices diagonales, encontramos:

$$\bar{\varepsilon} \Gamma = \frac{r'}{\alpha r} G'^{-1} \Lambda^2 \Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\alpha r'}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{\alpha r'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r'}{\alpha r} \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

Al sustituir  $r' = (r - a)/\alpha$ , las propiedades del medio quedan escritas como:

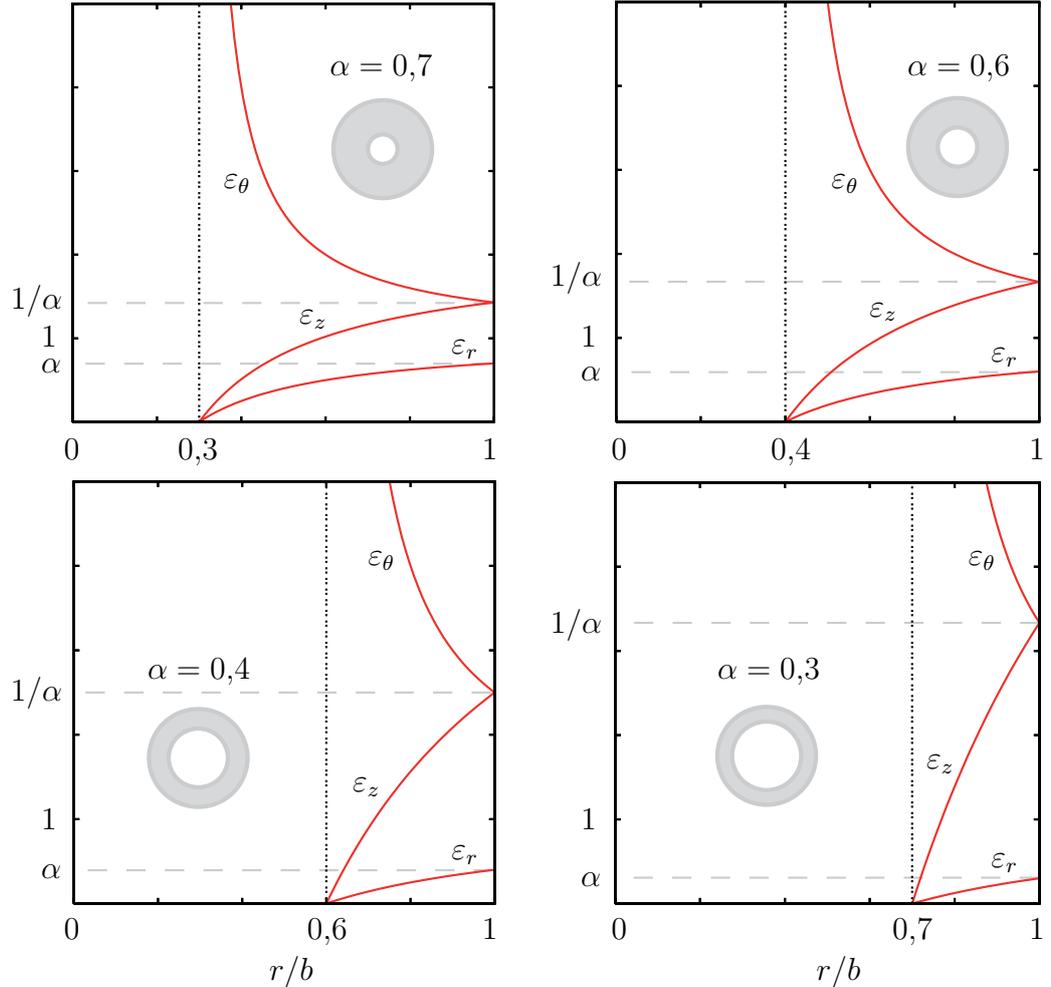
$$\mu_r = \varepsilon_r = \frac{r - a}{r} \quad \mu_\theta = \varepsilon_\theta = \frac{r}{r - a} \quad \mu_z = \varepsilon_z = \frac{r - a}{\alpha^2 r} \quad (6.43)$$

donde  $\bar{\varepsilon} \Gamma = \bar{\mu} \Gamma = \text{diag}(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z)$ . Un medio con estas propiedades materiales, por tanto, no permitirá que los campos electromagnéticos penetren en la región  $r \leq a$  en el espacio físico. Para un valor de  $z$  constante, esta región será equivalente a un punto, y, por tanto, cualquier cosa dentro de esta región no afectará de ningún modo a los campos: será invisible.

Las propiedades materiales (6.43), a diferencia de las que obtuvimos en la Sección 6.1, *además de ser anisotrópicas son inhomogéneas*. Éstas, sin embargo, dependen únicamente del radio cilíndrico. Las propiedades materiales sólo están definidas en la región anular  $a \leq r \leq b$ , que es donde se encuentra el medio transformador. En la Figura 6.11 hemos graficado estas propiedades para distintos valores de  $\alpha$ .

Como con los medios transformadores anteriores, las propiedades que hemos obtenido tienen valores extremos. Por ejemplo,  $\varepsilon_r$  es siempre menor que 1, y, como hemos comentado, esto puede limitar el efecto de invisibilidad a un rango muy reducido de frecuencias (Ver Sección 7.2). Las propiedades más extremas se encuentran en la frontera interior ( $r = a$ ). Directamente de (6.43) vemos que, cuando  $r \rightarrow a$ , tenemos:  $\varepsilon_r, \varepsilon_z \rightarrow 0$  y  $\varepsilon_\theta \rightarrow \infty$ . Este último valor no es sólo extremo sino *simplemente imposibles de alcanzar*. Recordemos, sin embargo, que las propiedades (6.43) se corresponden con una capa de invisibilidad perfecta. Es posible proponer diversas propiedades simplificadas basadas en (6.43) para una capa de invisibilidad imperfecta. En la Sección 6.3.3 exploraremos brevemente esta posibilidad. Una estrategia alternativa es proponer alguna otra transformación que también se traduzca en una región invisible en el espacio físico. Recordemos que la transformación (6.36)

fue el modo más simple de hacer un “hueco” en el espacio electromagnético y alguna otra transformación podría resultar en propiedades materiales más accesibles. No exploraremos esta posibilidad en esta tesis, pero el lector puede encontrar algunas propuestas en [29].



**Figura 6.11:** Las propiedades materiales de la capa cilíndrica de invisibilidad son inhomogéneas y anisotrópicas.

En la frontera exterior ( $r = b$ ), al evaluar las propiedades (6.43) encontramos que éstas resultan ser:

$$\bar{\epsilon}\Gamma|_{r=b} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

que es exactamente como la compresión del eje óptico en la Sección 6.1, con la diferencia de que, en este caso, la compresión es en dirección radial. Esto quiere decir que, justo en la frontera exterior, cada punto del medio es exactamente como un medio de compresión simple —donde, ahora, el eje óptico es la dirección radial—, y ya hemos mostrado que estos medios son no-reflectores para cualquier ángulo y polarización. Esto también significa que el rayo cumple la misma ley de refracción (6.19) al entrar al medio:

$$\tan \theta = \frac{1}{\alpha} \tan \theta_i \quad (6.45)$$

donde los ángulos se miden con respecto a la dirección normal a la frontera (la dirección radial).

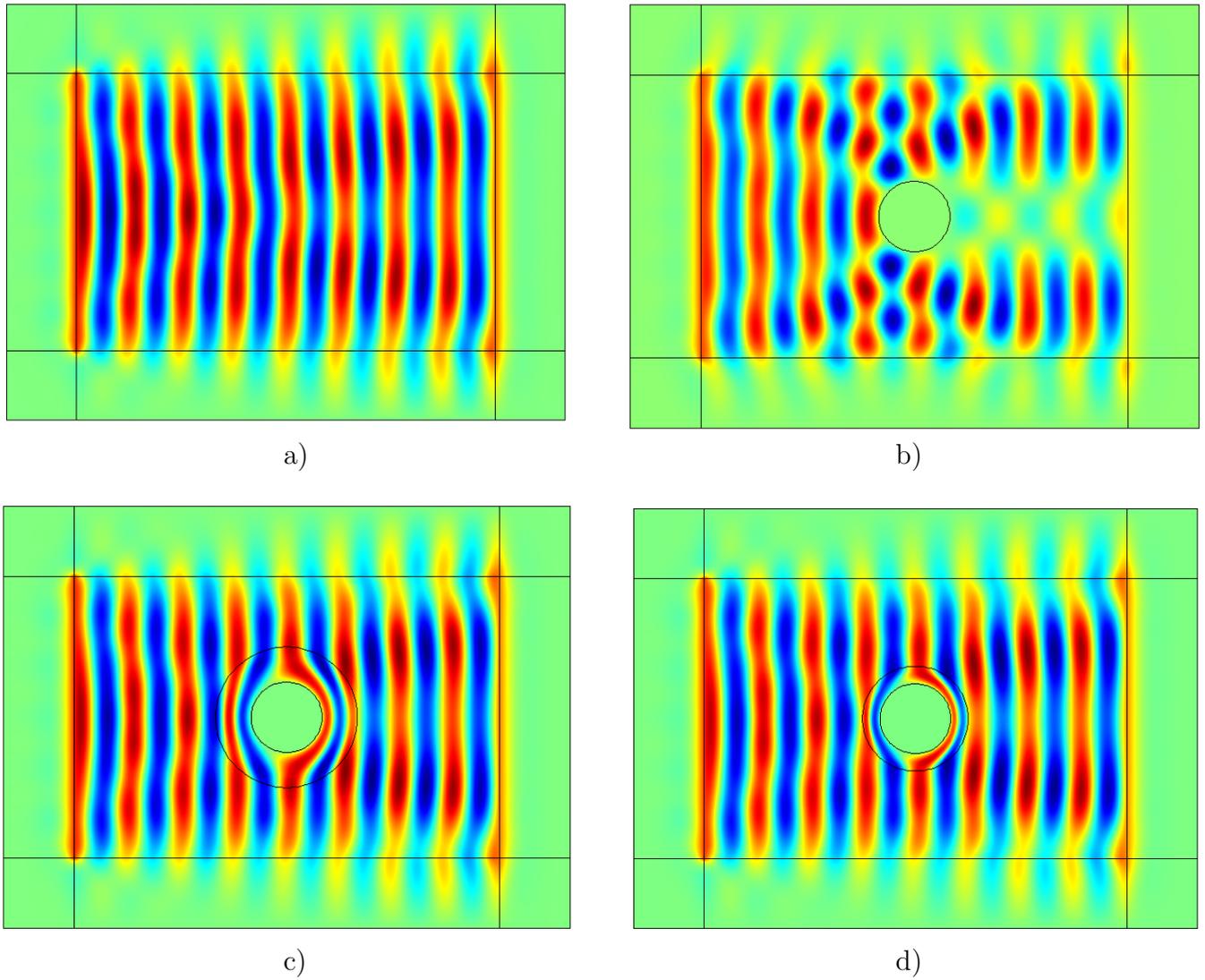
Aquí es importante mencionar que la capa esférica de invisibilidad (el ejemplo de óptica de transformación más estudiado después del caso cilíndrico) no tiene problemas con valores divergentes, pero no está exento de valores extremos, ya que las propiedades materiales también se anulan en la frontera interior. Tanto en el caso cilíndrico como en el esférico, sin embargo, es importante plantear el problema de las condiciones de frontera con cuidado, ya que los resultados estándares no son aplicables en este caso. Las condiciones de frontera adecuadas fueron estudiadas por Ricardo Weder en 2008 [30][31][32] quien mostró de un modo formal que, efectivamente, los diseños ideales propuestos constituyen capas de invisibilidad perfectas. En el Apéndice 5, mencionamos brevemente las ideas esenciales detrás de esta demostración.

### 6.3.2. Simulación numérica en COMSOL

Para apoyar los resultados que hemos discutido se realizó una simulación numérica en el software comercial COMSOL\*. Este software utiliza el método de elemento finito (FEM). El esquema que se usó en la simulación se muestra en la Figura 6.13. Para simular un medio infinito se usaron condiciones PML

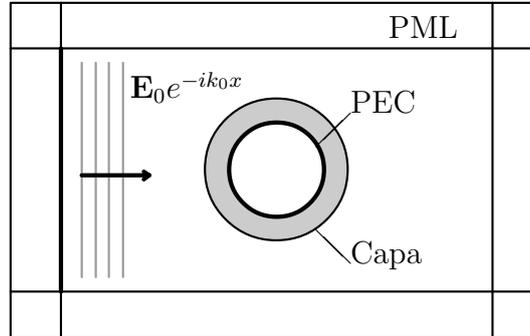
---

\*No. Licencia 3073222



**Figura 6.12:** Magnitud del campo eléctrico.

(Perfectly Matched Layer) en las fronteras del dominio. El objeto que se cubrió con la capa de invisibilidad fue un cilindro conductor eléctrico perfecto (PEC). En la Figura 6.12 se muestra la magnitud del campo eléctrico a través del dominio de la simulación en 4 casos. En a) la onda atraviesa el vacío, y en b) hemos colocado únicamente el conductor PEC. En este último caso, notamos claramente el campo esparcido y la “sombra” que genera el conductor. En c) y d) hemos cubierto el conductor PEC con una capa de invisibilidad con coeficientes de compresión  $\alpha = 0,5$  y  $\alpha = 0,7$ , respectivamente.



**Figura 6.13:** Esquema de la simulación en COMSOL.

### 6.3.3. Trazado de rayos

El modo más simple de realizar el trazado de rayos es usando el Hamiltoniano óptico. En (5.52) encontramos la forma general del Hamiltoniano para un medio de transformación en cualquier sistema coordenado. En nuestro caso, tenemos una métrica cilíndrica en el espacio físico ( $\Gamma = \text{diag}(1, r^2, 1)$ ), por lo que el Hamiltoniano toma la forma:

$$2H = \varepsilon_r k_r^2 + \varepsilon_\theta \frac{k_\theta^2}{r^2} + \varepsilon_z k_z^2 - |\varepsilon| k_0^2 \quad (6.46)$$

Antes de evaluar para las propiedades materiales (6.43), notemos que podemos expresar  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_z$  y  $|\varepsilon|$  únicamente en términos de  $\varepsilon_r$  y  $\alpha$ :

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{\varepsilon_r} \quad \varepsilon_z = \frac{1}{\alpha^2} \varepsilon_r \quad |\varepsilon| = \varepsilon_r \varepsilon_\theta \varepsilon_z = \frac{1}{\alpha^2} \varepsilon_r \quad (6.47)$$

Con esto, podemos simplificar el problema definiendo el nuevo Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} 2H' &= \frac{1}{\varepsilon_r} 2H = k_r^2 + \frac{k_\theta^2}{\varepsilon_r^2 r^2} + \frac{1}{\alpha^2} (k_z^2 - k_0^2) \\ &= k_r^2 + \frac{k_\theta^2}{(r-a)^2} + \frac{1}{\alpha^2} (k_z^2 - k_0^2) \end{aligned} \quad (6.48)$$

Este Hamiltoniano es más simple porque sólo  $k_\theta$  está multiplicada por un término no-constante. Los rayos asociados al Hamiltoniano  $H'$  son los mis-

mos que los que se obtendrían con  $H$ , la única diferencia estará en la parametrización de las curvas (ver Sección 2.3.1). Las ecuaciones de movimiento para este Hamiltoniano simplificado son:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H'}{\partial k_r} = k_r & \dot{k}_r &= -\frac{\partial H'}{\partial r} = \frac{k_\theta^2}{(r-a)^3} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H'}{\partial k_\theta} = \frac{k_\theta}{(r-a)^2} & \dot{k}_\theta &= -\frac{\partial H'}{\partial \theta} = 0 \\ \dot{z} &= \frac{\partial H'}{\partial k_z} = \frac{1}{\alpha^2} k_z & \dot{k}_z &= -\frac{\partial H'}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (6.49)$$

donde  $d/du = \dot{\phantom{u}}$ , con  $u$  el parámetro asociado a  $H'$ . Nos podemos deshacer de este parámetro si consideramos que todas las cantidades sean función del ángulo cilíndrico  $\theta$ , esto es:  $r = r(\theta)$  y  $k_r = k_r(\theta)$ . A partir de las ecuaciones de movimiento, las derivadas con respecto de  $\theta$  quedan escritas como:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{k_r}{k_\theta} (r-a)^2 \quad \frac{dk_r}{d\theta} = \frac{\dot{k}_r}{\dot{\theta}} = \frac{k_\theta}{r-a} \quad (6.50)$$

Encontrar las soluciones a estas ecuaciones se puede simplificar definiendo una nueva función  $\rho(\theta)$  en términos de  $r(\theta)$ , como:

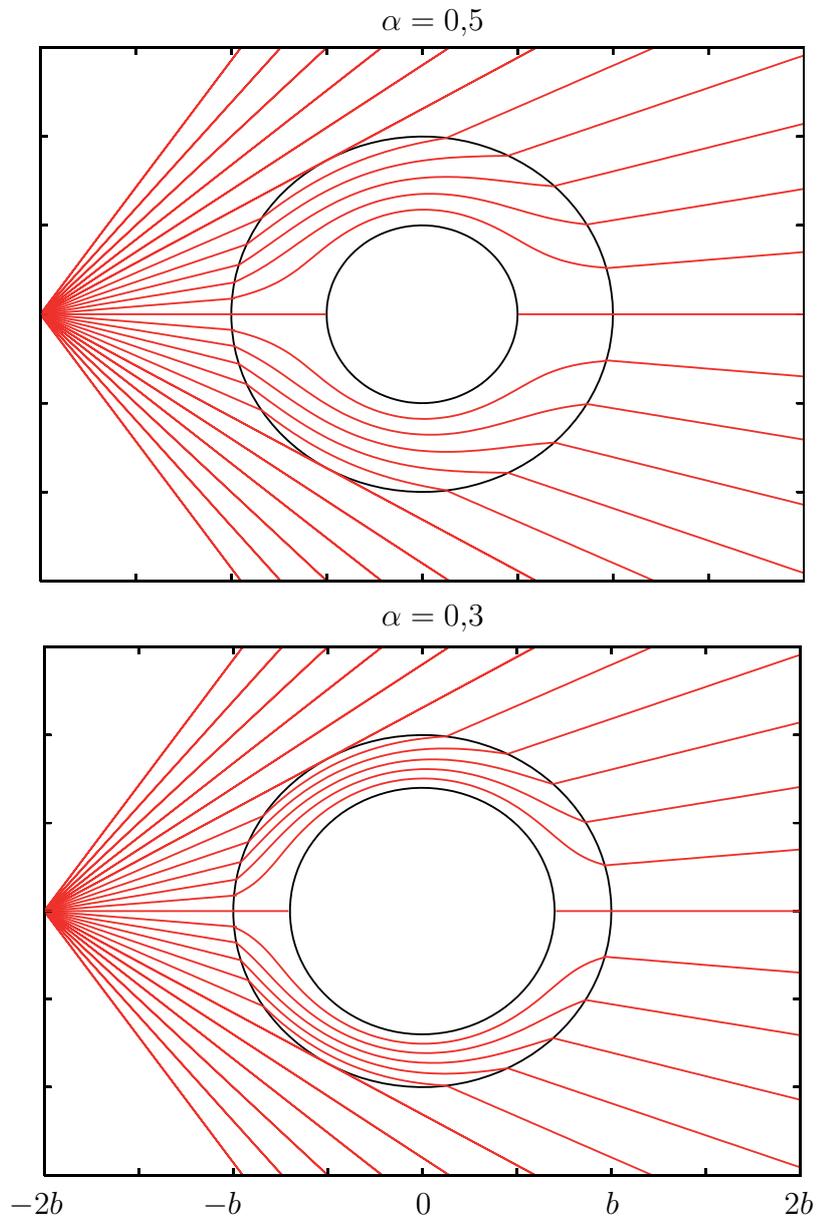
$$\rho(\theta) = \frac{1}{r-a} \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{-1}{(r-a)^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (6.51)$$

En términos de esta función, las ecuaciones (6.50) quedan escritas como:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{k_r}{k_\theta} \quad \frac{dk_r}{d\theta} = k_\theta \rho \quad (6.52)$$

Tomando la derivada del lado izquierdo y sustituyendo el lado derecho, encontramos que la solución general para  $\rho(\theta)$  es:

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{-1}{k_\theta} \frac{dk_r}{d\theta} = -\rho \quad \Rightarrow \quad \rho(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta \quad (6.53)$$



**Figura 6.14:** Rayos desde una fuente puntual a través de una capa cilíndrica de invisibilidad. En ambas gráficas hemos fijado  $b = 1m$ .

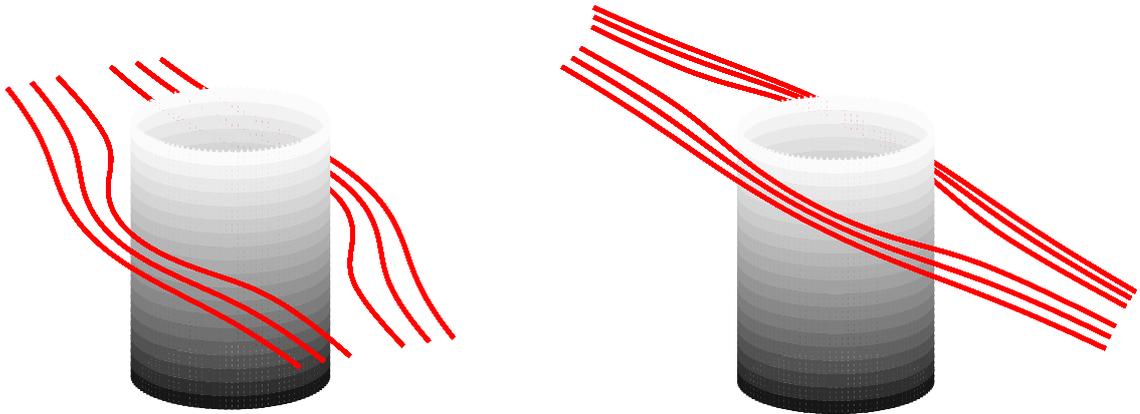
Y sustituyendo en la definición (6.51), la solución general para  $r(\theta)$  es enton-

ces:

$$r(\theta) = \frac{1}{A \cos \theta + B \sin \theta} + a \quad (6.54)$$

Con esto, ya podemos obtener el comportamiento de los rayos de luz para el caso 2D (para un valor fijo de  $z$ ). En la Figura 6.14 hemos graficamos estos rayos a partir de una fuente puntual para dos valores del coeficiente de compresión  $\alpha$ . Además de (6.54), para graficar los rayos se debe considerar la refracción en la frontera exterior (ver (6.45)). Como es claro en la imagen, los rayos “evitan” el interior del la capa y salen exactamente como si hubieran atravesado el vacío; esto es, por su puesto, exactamente lo que esperábamos. Para graficar los rayos en 3D nos falta resolver las ecuaciones de movimiento para la coordenada  $z$ . Del mismo modo que para las cantidades anteriores, directamente de (6.49) la ecuación para  $z(\theta)$  es:

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{\dot{z}}{\dot{\theta}} = \frac{k_z}{\alpha^2 k_\theta} (r - a)^2 = \frac{k_z}{\alpha^2 k_\theta} \left( \frac{1}{A \cos \theta + B \sin \theta} \right)^2 \quad (6.55)$$



**Figura 6.15:** Rayos de onda plana através de la capa cilíndrica de invisibilidad.

Y la solución a esta ecuación resulta ser:

$$z(\theta) = \frac{k_z}{\alpha^2 k_\theta A} \left( \frac{\sin \theta}{A \cos \theta + B \sin \theta} \right) + z_0 \quad (6.56)$$

Hemos graficado los rayos para este caso general en la Figura 6.15. En la imagen, los rayos están asociados a una onda plana. Algo interesante en

el resultado que hemos obtenido es que, como el Hamiltoniano no depende explícitamente de  $z$ , podemos pensar que “el momento óptico” se conserva en esta dirección ( $k_z = 0$ ). Esto tiene como consecuencia que, si consideramos rayos en un plano definido por algún ángulo de incidencia, los rayos permanecen en el plano al atravesar el medio.

### 6.3.4. Propiedades materiales reducidas

Como se explicó en la Sección 6.3.1, las propiedades ideales (6.43) que obtuvimos a partir de la transformación (6.36) son —estrictamente— imposibles de alcanzar. Por tanto, será de interés buscar propiedades materiales más simples que aproximen el efecto de la capa de invisibilidad; esto es, propiedades para capas de invisibilidad imperfectas. Una primera idea es simplemente proponer propiedades “suficientemente cercanas”, y esperar que el comportamiento sea equivalentemente “cercano”. Como los valores más extremos se alcanzan justo en  $r = a$ , se puede proponer un medio “parecido”, que tenga las mismas propiedades que la capa ideal, pero con un radio interior ligeramente más grande en  $r = a + \delta$ . En este material, la función  $\mu_\theta(r)$  no diverge en la frontera interior y toma el valor finito  $\mu_\theta(a + \delta)$ . Que tan parecido es el efecto en comparación con el caso ideal depende del tamaño de  $\delta$ . Para este material se puede calcular que, a pesar de que en el límite  $\delta \rightarrow 0$  se recupera exactamente la capa de invisibilidad perfecta, la convergencia es muy lenta, e incluso valores muy pequeños de  $\delta$  resultan en notable dispersión en la frontera exterior y penetración en la frontera interior de la capa [33]. Esto, aunado a que es muy complicado controlar la respuesta magnética (ver Sección 7.3), indica que esta estrategia no lleva a propiedades prácticas.

Para medios anisotrópicos, sin embargo, es posible desarrollar una estrategia completamente diferente para encontrar propiedades simplificadas, aprovechando una “ambigüedad” en las ecuaciones de Maxwell. En esta sección explicaremos esta estrategia en detalle usando coordenadas cilíndricas, y aplicaremos la técnica para encontrar propiedades reducidas para la capa de invisibilidad. La idea detrás de esta estrategia fue propuesta —aunque de modo incompleto\*— por Schuring, Smith y Pendry en 2006; quienes, usando estas ideas para encontrar propiedades simplificadas, construyeron, ese mismo año, la primera capa de invisibilidad para microondas[12]. En esta sección no llegaremos a las propiedades materiales usadas en este experimento, pero

---

\*Los autores no consideraron la condición dada en (6.65).

las comentaremos brevemente en la Sección 7.4 junto con algunos detalles de la capa de invisibilidad que se construyó.

Lo primero que hay que nota es que, si se fija una polarización, se reduce el número de propiedades que debemos especificar. Para ver esto, consideremos una onda TE tal que campo eléctrico tiene la forma  $\mathbf{E} = E_z \hat{\mathbf{e}}_z$ . La ecuación del rotacional para este campo en coordenadas cilíndricas se escribe como[21]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_\theta = i\omega \bar{\mu} \mathbf{H} \quad (6.57)$$

Si suponemos que tenemos propiedades diagonales\* ( $\bar{\mu} = \text{diag}(\mu_r, \mu_\theta, \mu_z)$ ), la expresión anterior implica:

$$H_r = \frac{1}{i\omega \mu_r r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \quad H_\theta = -\frac{1}{i\omega \mu_\theta} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (6.58)$$

Por otro lado, en coordenadas cilíndricas, la componente  $z$  de  $\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \bar{\epsilon} \mathbf{E}$  está dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} = -i\omega \epsilon_z E_z \quad (6.59)$$

Notemos que, para la polarización que hemos fijado, las únicas cantidades relevantes son  $\epsilon_z, \mu_r, \mu_\theta$ ; ya que sólo éstas aparecen en las ecuaciones anteriores. Al sustituir (6.58) en (6.59), tenemos la ecuación de onda para el campo eléctrico:

$$\frac{1}{\epsilon_z r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\mu_\theta} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{\epsilon_z r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mu_r r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right) + \omega^2 E_z = 0 \quad (6.60)$$

Si suponemos  $\partial \mu_r / \partial \theta = 0$  (condición que cumplen las propiedades ideales) podemos reescribir la ecuación anterior:

$$\frac{1}{\epsilon_z \mu_\theta r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{\epsilon_z \mu_\theta^2} \frac{\partial \mu_\theta}{\partial r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{\epsilon_z \mu_r r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + \omega^2 E_z = 0 \quad (6.61)$$

---

\*Aquí, a pesar de que estamos en coordenadas cilíndricas, no hemos necesitado la métrica cilíndrica para escribir las propiedades ( $\bar{\mu} \Gamma = \bar{\epsilon} \Gamma$ ), porque usamos una base unitaria (no-coordenada) en (6.57).

En esta expresión se hace evidente la ambigüedad en las ecuaciones de Maxwell. Notemos que el comportamiento de  $E_z$  no depende de los valores individuales de  $\varepsilon_z$ ,  $\mu_r$ ,  $\mu_\theta$ , sino de productos entre estas cantidades. Si recordamos las propiedades ideales (6.43):

$$\mu_r = \frac{r-a}{r} \quad \mu_\theta = \frac{r}{r-a} \quad \varepsilon_z = \frac{r-a}{\alpha^2 r} \quad (6.62)$$

y las sustituimos en los productos correspondientes en (6.61), encontramos:

$$\frac{1}{\varepsilon_z \mu_\theta} = \alpha^2 \quad (6.63)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_z \mu_r} = \alpha^2 \left( \frac{r}{r-a} \right)^2 \quad (6.64)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_z \mu_\theta^2} \frac{\partial \mu_\theta}{\partial r} = \frac{\alpha^2}{r} - \frac{\alpha^2}{r-a} \quad (6.65)$$

Como estos productos determinan la ecuación de onda, un campo TE que atraviese un medio con cantidades  $\varepsilon'_z$ ,  $\mu'_r$ ,  $\mu'_\theta$  que cumplan con las condiciones (6.63-6.65), tendrá la misma ecuación de onda para  $E_z$  que un campo a través de una capa de invisibilidad perfecta. Notemos que tenemos tres ecuaciones y cuatro incógnitas ( $\varepsilon_z, \mu_r, \mu_\theta$  y  $\partial \mu_\theta / \partial r$ ), por lo que es claro que tenemos cierta libertad en el sistema. En vez de buscar propiedades que cumplan exactamente\* con (6.63-6.65), buscaremos propiedades que cumplan aproximadamente con las condiciones, pero que sean significativamente más simples que (6.43). Para esto, haremos la aproximación más cruda para  $\mu_\theta(r)$ , y propondremos una propiedad simplificada tomando únicamente el término constante en la serie de Taylor alrededor de  $b^{**}$ . Este término constante es la función valuada en la frontera exterior ( $\mu_\theta(b) = 1/\alpha$ ), con lo que proponemos:

$$\mu'_\theta = \frac{1}{\alpha} \quad (6.66)$$

---

\*Es posible obtener una familia de soluciones exactas notando que la solución general de (6.65) es:  $\mu_\theta = Cr/(r-a)$ , con  $C$  una constante. Estas soluciones, sin embargo, no nos ayudan a "simplificar" el problema.

\*\*Es decir, de la expansión  $\mu_\theta(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (r-b)^n / n!$ , donde  $c_n = (\partial^n \mu_\theta / \partial r^n)|_{r=b}$ , nos quedamos únicamente con el término  $n = 0$ .

Sin duda, esta propiedad es significativamente más simple (una constante en vez de una función divergente), pero —como  $\partial\mu_\theta/\partial r = 0$ — sólo cumple con la condición (6.65) si  $r \gg a$ . A pesar de esto, podemos cumplir exactamente con (6.63-6.64) si las otras dos propiedades están dadas por:

$$\varepsilon'_z = \frac{1}{\alpha} \qquad \mu'_r = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{r-a}{r} \right)^2 \qquad (6.67)$$

Como sólo hemos hecho una aproximación esperamos que las propiedades primadas rescaten varios aspectos de la capa de invisibilidad. Por ejemplo, en la frontera exterior, las propiedades primadas siguen teniendo la forma:  $\bar{\mu} = \text{diag}(\alpha, 1/\alpha, 1/\alpha)$ , por lo que el material simplificado también es un medio no-reflector. Vale la pena recalcar que la simplificación es notable, ya que sólo una cantidad depende del radio y las otras dos son constantes.

El caso para polarización TM es idéntico, sólo debemos sustituir las propiedades correspondientes ( $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{B}$ , y  $\bar{\varepsilon} \leftrightarrow \bar{\mu}$ ). Debemos mencionar que, aunque hemos usado explícitamente las propiedades de la capa de invisibilidad y coordenadas cilíndricas, muchas de las ideas que hemos desarrollado en esta sección son generalizables.

# Capítulo 7

## Análisis riguroso de invisibilidad y condiciones de frontera para propiedades materiales degeneradas

Las propiedades materiales de las capas de invisibilidad que estudiamos en el Capítulo 6 tienen valores degenerados y/o divergentes en la frontera interior, y, por tanto, las condiciones de frontera deben atenderse con cuidado, ya que los resultados estándares no son aplicables en este caso. Las condiciones de frontera adecuadas fueron estudiadas por Ricardo Weder en 2008 [32][30][31], y, en este capítulo, mencionaremos de modo relativamente informal los resultados esenciales.

Como la transformación con la que diseñamos la capa de invisibilidad es singular (ver Sección 6.4), debemos definir con cuidado el dominio y la imagen de la transformación. Si tenemos una capa de invisibilidad centrada en el origen, definimos la transformación como:

$$f : \Omega_0 \rightarrow \Omega \quad (7.1)$$

donde  $\Omega_0$  es el dominio de la transformación en el espacio electromagnético (vacío) y  $\Omega$  es la correspondiente imagen en el espacio físico (donde se encuentra el medio transformador). Estos conjuntos están dados como:

$$\Omega_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \Omega = \mathbb{R}^3 \setminus K \quad (7.2)$$

donde  $K$  representa los puntos dentro de la esfera interior de la capa (la región invisible).

Para analizar la dinámica en ambos conjuntos debemos recurrir a las ecuaciones de Maxwell. Definiendo el operador  $a_\Omega$  en el espacio físico como:

$$a_\Omega(\mathbf{E}, \mathbf{H})^\top = (\bar{\varepsilon}^{-1} \nabla \times \mathbf{H}, -\bar{\mu}^{-1} \nabla \times \mathbf{E})^\top \quad (7.3)$$

podemos expresar las ecuaciones de Maxwell en medios materiales como (comparar con (1.10)):

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}, \mathbf{H})^\top = a_\Omega(\mathbf{E}, \mathbf{H})^\top \quad (7.4)$$

Los campos solución a esta ecuación deben formar parte de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_E$  de las funciones medibles,  $\mathbb{C}^3$ -valuadas, definidas en  $\Omega$ , cuadráticamente integrables con peso  $\varepsilon^{ij}$  y producto escalar:

$$(\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{E}^{(2)})_{\Omega E} = \int_{\Omega} E_i^{(1)} \varepsilon^{ij} \overline{E_j^{(2)}} dx^3 \quad (7.5)$$

Análogamente, denotamos como  $\mathcal{H}_H$  al espacio de Hilbert de las funciones medibles,  $\mathbb{C}^3$ -valuadas, definidas en  $\Omega$ , cuadráticamente integrables con peso  $\mu^{ij}$  y producto escalar:

$$(\mathbf{H}^{(1)}, \mathbf{H}^{(2)})_{\Omega H} = \int_{\Omega} H_i^{(1)} \mu^{ij} \overline{H_j^{(2)}} dx^3 \quad (7.6)$$

Al fijarnos en el modo en el se construyó el objeto con el que representamos a los campos en (7.4), el espacio de Hilbert de los campos con energía finita en  $\Omega$  es simplemente la suma directa de los espacio definidos anteriormente:

$$\mathcal{H}_\Omega = \mathcal{H}_E \oplus \mathcal{H}_H \quad (7.7)$$

Si tomamos la mínima suposición de que las ecuaciones de Maxwell se cumplen en un sentido clásico fuera de la frontera  $\partial\Omega$ , el dominio de  $a_\Omega$  es el conjunto de las funciones  $\mathbb{C}^6$ -valuadas, con soporte compacto y continuamente diferenciables en  $\Omega$ , conjunto que denotamos como:  $\mathbf{C}_0^1(\Omega)$ . Con este dominio,  $a_\Omega$  es simétrico en  $\mathcal{H}_\Omega$ , esto es:  $a_\Omega \subset a_\Omega^*$ , donde  $a_\Omega^*$  es el operador adjunto de  $a_\Omega$ . Dado un operador  $B$  en un espacio de Hilbert  $\tilde{\mathcal{H}}$ , el operador adjunto  $B^*$  correspondiente está definido por el dominio  $\text{Dom}(B^*) = \{y \in \tilde{\mathcal{H}} : \exists z \in \tilde{\mathcal{H}} : (Bx, y) = (x, z) \forall x \in \text{Dom}(B)\}$  y  $B^*y = z$ .

Un operador  $B$  es *simétrico* si  $(Bx, y) = (x, By)$  para todo  $x, y \in \text{Dom}(B)$ . Si el dominio del operador es denso, como es nuestro caso, esto es equivalente a  $\text{Dom}(B) \subset \text{Dom}(B^*)$ . Si  $B^* = B$  se dice que el operador es *auto-adjunto*. Un operador auto-adjunto  $C$  establece una extensión auto-adjunta de un operador simétrico  $B$  si  $\text{Dom}(B) \subset \text{Dom}(C)$  y  $C|_{\text{Dom}(B)} = B$ . Con esto, para construir una dinámica que preserve la energía debemos analizar las extensiones auto-adjuntas de  $a_\Omega$ , que en términos físicos significa que debemos precisar en que sentido resolvemos las ecuaciones de Maxwell en los dominios que nos interesan. Esto es, para construir soluciones  $(\mathbf{E}(t), \mathbf{H}(t))^T \in \mathcal{H}_\Omega$  a la ecuación (7.4), con energía constante, debemos pedir que los campos electromagnéticos con una energía finita inicial pertenezcan al dominio de una de las extensiones auto-adjuntas de  $a_\Omega$ . Dependiendo de las condiciones de frontera que se establezcan, un operador simétrico puede tener una única extensión auto-adjunta, una infinidad de extensiones auto-adjuntas o ninguna extensión posible. Si en algún momento inicial  $t = 0$ , los campos  $(\mathbf{E}(0), \mathbf{H}(0))^T$  tienen la energía finita  $(\mathbf{E}(0), \mathbf{E}(0))_{\Omega E} + (\mathbf{H}(0), \mathbf{H}(0))_{\Omega H} < \infty$ , la solución de energía finita es:

$$(\mathbf{E}(t), \mathbf{H}(t))^T = e^{itA_\Omega} (\mathbf{E}(0), \mathbf{H}(0))^T \quad (7.8)$$

de donde es claro que tendremos una dinámica única sólo si tenemos una única extensión auto-adjunta  $A_\Omega$ . Para el caso de la capa de invisibilidad, esto es precisamente lo que se demostró en [32][30][31]. A continuación mostraremos la idea esencial detrás de esta demostración.

Análogamente al operador que definimos en el espacio físico (7.3), definimos en el espacio electromagnético (en el vacío) el operador  $a_0$ . En este caso denotamos los campos como  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)^T$  y las propiedades materiales\* como  $\varepsilon_0^{ij}$  y  $\mu_0^{ij}$ . Las ecuaciones de Maxwell en este espacio se pueden escribir entonces como:

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)^T = a_0 (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)^T \quad (7.9)$$

En analogía con el espacio físico, el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{0E}$  de los campos eléctricos es el espacio de las funciones medibles,  $\mathbb{C}^3$ -valuadas, definidas en  $\mathbb{R}^3$ , cuadráticamente integrables con peso  $\varepsilon_0^{ij}$  y producto escalar:

$$(\mathbf{E}_0^{(1)}, \mathbf{E}_0^{(2)})_{0E} = \int_{\mathbb{R}^3} E_{0i}^{(1)} \varepsilon_0^{ij} \overline{E_{0j}^{(2)}} dx^3 \quad (7.10)$$

---

\* Como estamos en el vacío:  $\varepsilon_0^{ij} = \varepsilon_0 \delta^{ij}$  y  $\mu_0^{ij} = \mu_0 \delta^{ij}$

y  $\mathcal{H}_{0H}$  es el espacio de las funciones medibles,  $\mathbb{C}^3$ -valuadas, definidas en  $\mathbb{R}^3$ , cuadráticamente integrables con peso  $\mu_0^{ij}$  y producto escalar:

$$(\mathbf{H}_0^{(1)}, \mathbf{H}_0^{(2)})_{0H} = \int_{\mathbb{R}^3} H_{0i}^{(1)} \mu_0^{ij} \overline{H_{0j}^{(2)}} dx^3 \quad (7.11)$$

Notemos que hemos podido definir los campos en todo  $\mathbb{R}^3$  porque  $\Omega_0$  sólo difiere de este conjunto en  $\{\mathbf{0}\}$ , que es un conjunto de medida cero.

El espacio de Hilbert de los campos electromagnéticos correspondientes lo denotamos en este caso como  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{0E} \oplus \mathcal{H}_{0H}$ . Si tomamos como dominio de  $a_0$  a  $\mathbf{C}_0^1(\mathbb{R}^3)$ , el conjunto de funciones continuamente diferenciables con soporte compacto en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{C}^6$ -valuadas, entonces  $a_0$  es simétrico en  $\mathcal{H}_0$  y es posible mostrar (ver [32][30][31]) que tiene una única extensión auto-adjunta  $A_0$ . Lo que significa, como es de esperarse, que, en el caso del vacío, existe una única manera de establecer una dinámica que mantiene la energía constante.

En el Capítulo 5 vimos que los campos y las propiedades materiales en el espacio electromagnético y en el espacio físico están relacionadas através del Jacobiano de la transformación. Esto quiere decir podemos usar el Jacobiano para establecer la transformación:

$$U(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)^T(\mathbf{x}') = (\Lambda_j^{i'}(\mathbf{x}') E_{0i'}(\mathbf{x}'), \Lambda_j^{i'}(\mathbf{x}') H_{0i'}(\mathbf{x}'))^T = (\mathbf{E}, \mathbf{H})^T(\mathbf{x}) \quad (7.12)$$

donde  $\mathbf{x}'$  es un punto en el espacio electromagnético y  $\mathbf{x}$  el correspondiente punto en el espacio físico bajo la transformación. La expresión anterior establece una transformación unitaria de  $\mathcal{H}_0$  sobre  $\mathcal{H}_\Omega$ , y, a partir de esta relación unitaria, se demostró en [32][30][31] que:

*El operador  $a_\Omega$  es esencialmente autoadjunto (tiene una única extensión auto-adjunta) y su única extensión autoadjunta cumple con:  $A_\Omega = U A_0 U^*$ .*

Como la extensión  $A_\Omega$  es unitariamente equivalente al generador  $A_0$  en el vacío, la única *dinámica* que preserva la energía en  $\Omega$  es unitariamente equivalente a la dinámica en el vacío.

Para completar el análisis en el espacio físico, debemos considerar las soluciones a las ecuaciones de Maxwell dentro de  $K$ . En este caso, podemos definir un operador  $a_K$  análogamente a como se hizo para la región  $\Omega$ , donde definimos los campos (y los productos interiores) en la región  $K$ . Si denotamos el espacio de Hilbert que forman los campos solución como  $\mathcal{H}_K$ , el espacio

de Hilbert para campos con energía finita en todo el espacio físico se puede expresar como:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\Omega \oplus \mathcal{H}_K \quad (7.13)$$

Si consideramos ahora el operador  $a = a_\Omega \oplus a_K$  con un dominio dado por la suma directa de los dominios de  $a_\Omega$  y  $a_K$  (ver detalles en [31][30][32]), éste será simétrico en  $\mathcal{H}$  y todas las extensiones auto-adjuntas se pueden expresar como una suma directa de la forma:

$$A = A_\Omega \oplus A_K \quad (7.14)$$

donde  $A_K$  es una extensión auto-adjunta de  $a_K$  que, en general, puede tener más de una extensión auto-adjunta. Esto implica que las soluciones dentro y fuera de  $K$  están completamente desacopladas, y que son, en general, discontinuas en  $\partial K$ . Notemos que  $\partial\Omega$  actúa como un horizonte para las ondas electromagnéticas que se propagan en  $\Omega$ , ya que la dinámica en  $\Omega$  está determinada únicamente sin necesidad de considerar el interior de  $K$ .

También se demostró en [32][30][31] que las amplitudes de dispersión se anulan para cualquier onda plana incidente, y que la matriz de dispersión, para todo paquete de onda incidente, es la identidad. Estos resultados también son consecuencia de que se puede establecer la transformación unitaria (7.12) entre los campos en el espacio vacío y los campos en el espacio físico  $\Omega$ , y confirman rigurosamente que las propiedades materiales propuestas representan capas perfectas de invisibilidad.

Con respecto a la dispersión de ondas planas incidentes, cabe destacar que no tenemos energía finita en todo el espacio, solamente se tiene energía *localmente* finita. Esta condición se expresa como:

$$\int_O E_i \varepsilon^{ij} \overline{E_j} dx^3 + \int_O H_i \mu^{ij} \overline{H_j} dx^3 < \infty \quad (7.15)$$

donde las integrales son sobre subconjuntos acotados  $O \subset \Omega$ . Esto implica que los resultados de [32][30][31] demuestran rigurosamente la invisibilidad en el dominio de frecuencias, adicionalmente al análisis en el tiempo hecho para el caso de energía finita. Con esto,  $K$  es indetectable para todas las frecuencias.

Las condiciones a la frontera que se corresponden con la extensión auto-adjunta  $A_\Omega = UA_0U^*$  son:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \partial K_+ \quad (7.16)$$

donde  $\partial K_+$  representa la frontera exterior de  $K$  y  $\mathbf{n}$  el correspondiente vector normal a esta superficie. Esta condición de frontera se cumple siempre, y la podemos visualizar pensando que, como todo vector es “normal” a un punto, y el origen va a la superficie  $\partial K$  bajo la transformación, los campos permanecen normales a esta superficie.

En  $\partial K_-$  la condición a la frontera puede ser cualquier condición auto-adjunta del generador de Maxwell en  $K$ . La condición de frontera que tomará la naturaleza depende de las propiedades específicas del medio dentro de  $K$ . En [31], se determina la condición a la frontera apropiada para el caso en el que la permitividad y la permeabilidad están acotadas por arriba y por abajo, es decir, que cumplen con  $c_1 \leq \varepsilon_K^{ij} \leq c_2$ , donde  $c_1, c_2 > 0$ , y análogamente para  $\mu_K^{ij}$  (medios de este tipo son los de mayor interés en las aplicaciones). En este caso, incluso si existen corrientes en la frontera, la condición adecuada resulta ser:

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \partial K_- \quad (7.17)$$

Los campos solución, por tanto, para el caso de una capa de invisibilidad, deben cumplir con las ecuaciones de Maxwell y con las condiciones de frontera (7.16) y (7.17).

# Capítulo 8

## Metamateriales

Del capítulo anterior, es claro que la óptica de transformación requiere de un control total de las propiedades materiales. Estas propiedades, en principio, pueden tomar cualquier valor, y no esperamos que se presenten en los materiales que encontramos en la naturaleza. Esta enorme dificultad promete ser superada con el continuo desarrollo de los llamados metamateriales. Estos materiales permitirían construir artificialmente medios materiales que tendrían casi cualquier propiedad que deseemos. Este es justo el sentido del prefijo griego  $\mu\epsilon\tau\alpha$  que significa “más allá” y señala que estos materiales pueden ir más allá de las propiedades que ofrecen los medios naturales. Como la disciplina de los metamateriales está todavía en desarrollo, no existe aún una definición que sea aceptada universalmente. En esta tesis tomaremos la definición que propone Vladimir Shalaev, uno de los pioneros de esta nueva rama de la física[29]:

Un metamaterial es un material estructurado artificialmente que obtiene sus propiedades, no [directamente] de los materiales que lo constituyen, sino a partir de una unidad de estructura. Un metamaterial tiene una escala de inhomogeneidad mucho más chica que la longitud de onda de interés, y su respuesta electromagnética se expresa en términos de parámetros materiales homogeneizados.

La idea fundamental detrás de los metamateriales es entonces que las propiedades del medio material quedan establecidas a partir de una unidad de estructura, en vez de, por ejemplo, la composición química del material. Lla-

maremos *meta-átomo* a la unidad de estructura que se menciona en la definición y pensaremos que forma parte de una arquitectura celular que puede ser periódica o no-periódica[34]. Otro aspecto esencial de la definición es que requiere que los meta-átomos sean mucho más chicos que la longitud de onda de interés. Esto es justamente lo que permite que las propiedades materiales sean expresadas en términos de parámetros homogeneizados\*. Vale la pena mencionar que, aunque hablaremos únicamente de *metamateriales electromagnéticos*, la idea de metamaterial se puede extender a cualquier fenómeno ondulatorio (metamateriales acústicos, por ejemplo).

La ciencia de los metamateriales es relativamente nueva (el término empezó a usarse en 1999), pero ha tenido un enorme desarrollo y ha generado un gran interés dentro y fuera de la comunidad científica. A pesar de esto, *el desarrollo de los metamateriales sigue siendo una disciplina naciente que enfrenta todavía muchos retos*. En este último capítulo, no tenemos la intención de exponer en detalle los métodos y técnicas usadas en el estudio y diseño de metamateriales, sino intentaremos simplemente destacar de un modo sencillo las ideas fundamentales. A pesar de que todos los medios que propusimos en la sección anterior son anisotrópicos, asumiremos de ahora en adelante que tratamos con medios isotrópicos.

## 8.1. Medios Efectivos

Para describir los metamateriales, por tanto, debemos poder establecer la respuesta macroscópica del medio a partir de los componentes individuales del material. Estos *componentes* pueden ser *átomos, moléculas o meta-átomos*. En el Capítulo 1 desarrollamos la teoría de los medios materiales a partir de campos macroscópicos homogeneizados (promediados en el espacio), y describimos la respuesta del material a campos externos a partir de la polarización  $\mathbf{P}$  y la magnetización  $\mathbf{M}$ . Estos campos representan densidades de momentos dipolares eléctricos y magnéticos, y, por tanto, podemos usarlos para establecer una conexión entre la respuesta homogeneizada y la respuesta de cada componente del medio. Si  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{m}$  representan los momentos dipolares eléctricos y magnéticos de los componentes del medio, la polarización y la magnetización se pueden escribir como:

---

\*Debemos mencionar que, en algunos casos, los llamados *cristales fotónicos* también pueden ser descritos con propiedades homogeneizadas a pesar de que sus componentes tienen un tamaño comparable con la longitud de onda.

$$\mathbf{P} = n_e \mathbf{p} \qquad \mathbf{M} = n_m \mathbf{m} \qquad (8.1)$$

donde  $n_e$  y  $n_m$  dan el número de dipolos por unidad de volumen (la densidad volumétrica). Por simplicidad, supondremos que todos los componentes del medio son idénticos, y, por ahora, discutiremos únicamente el caso eléctrico. Si los campos no son muy intensos, se puede pensar que el momento dipolar de cada componente responde linealmente con el campo:

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_L \qquad (8.2)$$

donde  $\alpha$  se conoce como la polarizabilidad y  $\mathbf{E}_L$  representa el campo local que “siente” cada componente individual. Este campo local está definido como el campo promedio sobre cada componente debido al campo externo y a los *demás* componentes del material, y, por tanto, no esperamos que coincida exactamente con el campo promedio total  $\mathbf{E}$ .

Para estimar este campo local consideraremos un radio  $R$  alrededor de algún componente cualquiera donde queramos calcular el campo. Tomaremos este radio tal que, fuera de él, el material pueda ser aproximado como un medio continuo, y los únicos componentes discretos que debemos considerar son los vecinos dentro del radio. Bajo algunas circunstancias (arreglos cúbicos o aleatorios de componentes) los campos asociados a estos componentes vecinos se anulan entre sí y no contribuyen al campo local. Este resultado resulta razonable en muchas circunstancias[35] y supondremos que estos campos son despreciables. Si  $R$  es despreciable en comparación con el tamaño total del material, el campo debido al medio continuo fuera del radio es simplemente el campo promedio total  $\mathbf{E}$  que se compone tanto del campo externo como del campo de depolarización (el campo respuesta promedio). Bajo las suposiciones que hemos hecho, por tanto, el campo local sólo se diferencia del campo promedio total por un campo  $\mathbf{E}_S$  debido a las cargas superficiales justo en el radio  $R$ . La densidad de carga superficial está dada en términos de la polarización como:  $\sigma = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n}$  es la normal externa a la superficie de la esfera. El campo que produce esta densidad dentro de la esfera es uniforme y en dirección de la polarización. Si hacemos coincidir el eje  $z$  con esta dirección, la magnitud del campo es:  $E_S = \mathbf{E}_S \cdot \hat{\mathbf{z}}$ , y podemos calcular en coordenadas esféricas:

$$E_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{-\sigma \cos\theta}{R^2} R^2 d\Omega = \frac{2\pi P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{P}{3\epsilon_0} \qquad (8.3)$$

Notemos que, aunque este resultado no depende de  $R$ , hemos hecho varias suposiciones que dependen de haber tomado un radio adecuado. El campo local es, entonces, el campo promedio más la contribución que acabamos de calcular:

$$\mathbf{E}_L = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} = \left(1 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{3\varepsilon_0}\right) \mathbf{E} = \frac{1}{3}(\varepsilon + 2)\mathbf{E} \quad (8.4)$$

donde hemos usado la identidad macroscópica:  $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}$  (ver Sección 1.2.2). De esta misma identidad y el resultado que acabamos de obtener, la polarización y el campo local quedan relacionados como:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_L \quad (8.5)$$

Recordando que la polarización es la densidad de momentos dipolares (ver (8.1) y (8.2)) también tenemos:

$$\mathbf{P} = n_e\mathbf{p} = n_e\alpha\mathbf{E}_L \quad (8.6)$$

por lo que la polarizabilidad en términos de la permitividad del medio debe ser:

$$\alpha = \frac{3\varepsilon_0}{n_e} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \quad (8.7)$$

Este resultado es conocida como *la relación de Clausius-Mossotti*. Si recordamos que  $\varepsilon$  es una cantidad que relaciona campos homogeneizados, podemos ver que la relación de Clausius-Mossotti establece una conexión entre el mundo microscópico (de las componentes individuales del material) y el macroscópico (de las cantidades homogeneizadas).

Ahora usaremos Clausius-Mossotti para determinar la respuesta de un medio compuesto de una mezcla de materiales. Supondremos que el compuesto se puede pensar como un medio efectivo en el que las propiedades de los medios que lo conforman se mezclan. En esta sección analizaremos el caso de un medio compuesto de dos materiales, uno de los cuales llamaremos *medio matriz* y al otro *medio inclusión*. El medio matriz lo consideraremos como un medio de fondo, y es comúnmente un dieléctrico (óxido de silicio o aire, por ejemplo). El material inclusión pensaremos que está disperso en el medio matriz, y tomará el lugar de los componentes del material en la discusión que llevó a (8.7) (en ese caso, el fondo era simplemente el vacío).

Comúnmente las inclusiones son esferas de algún metal noble como oro o plata. El grado en que las propiedades de la matriz y la inclusión se combinan depende de la proporción de volumen que ocupe la inclusión. Usando distintos materiales y controlando este factor de llenado podemos controlar las propiedades del medio efectivo. Para incluir los efectos del medio matriz en Clausius-Mossotti sólo debemos sustituir en (8.7) una permitividad relativa\* dada por:  $\varepsilon = \varepsilon_{ef}/\varepsilon_m$ , donde  $\varepsilon_m$  es la permitividad de la matriz y  $\varepsilon_{ef}$  es la permitividad del medio efectivo; la relación en este caso es entonces:

$$\alpha = \frac{3\varepsilon_0 (\varepsilon_{ef}/\varepsilon_m) - 1}{n (\varepsilon_{ef}/\varepsilon_m) + 2} = \frac{3\varepsilon_0 \varepsilon_{ef} - \varepsilon_m}{n \varepsilon_{ef} + 2\varepsilon_m} \quad (8.8)$$

Si suponemos que las inclusiones son esferas, la polarización  $\mathbf{P}_i$  de cada inclusión estará dada en términos del campo local como en (8.5), pero con una permitividad relativa:  $\varepsilon = \varepsilon_i/\varepsilon_m$ , donde  $\varepsilon_i$  es la permitividad de la inclusión. El momento dipolar total  $\mathbf{p}_i$  de cada esfera es la polarización veces el volumen de la inclusión; si  $a$  es el radio de las esferas, esto es:

$$\mathbf{p}_i = \frac{4\pi}{3} a^3 \mathbf{P}_i = 4\pi a^3 \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_m}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m} \mathbf{E}_L \quad (8.9)$$

La polarizabilidad de las esferas es entonces:

$$\alpha = 4\pi a^3 \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_m}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m} \quad (8.10)$$

Como (8.8) y (8.10) deben representar la misma polarizabilidad, tenemos la igualdad:

$$\frac{\varepsilon_{ef} - \varepsilon_m}{\varepsilon_{ef} + 2\varepsilon_m} = f \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_m}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m} \quad (8.11)$$

donde  $f$  es la *fracción de llenado* y está dada por:

$$f = \frac{4\pi}{3} a^3 n \quad (8.12)$$

que no es más que la proporción de volumen que ocupa la inclusión. No olvidemos que, para obtener (8.11), supusimos explícitamente inclusiones esféricas.

---

\*Si tenemos un medio de fondo en vez de sólo vacío, el campo de desplazamiento se modifica como:  $\mathbf{D}/\varepsilon_m$ , de donde:  $\varepsilon_{ef} = \varepsilon_m \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$ .

cas<sup>\*\*</sup>. Directamente de (8.11), podemos despejar la permitividad efectiva del medio en términos de la permitividad de la matriz, la permitividad de la inclusión y el factor de llenado:

$$\varepsilon_{ef} = \varepsilon_m \frac{(\varepsilon_i + 2\varepsilon_m) + 2f(\varepsilon_i - \varepsilon_m)}{(\varepsilon_i + 2\varepsilon_m) - f(\varepsilon_i - \varepsilon_m)} \quad (8.13)$$

Este resultado es la fórmula central de la llamada *teoría de Maxwell-Garnett* (MGT). Un impedimento de esta fórmula es que distingue necesariamente entre el medio matriz y la inclusión. Una buena aproximación para considerar los materiales de un modo simétrico es la llamada *fórmula de Bruggeman*. Para motivar esta fórmula pensemos que ahora tenemos dos tipos de inclusiones dispersas en un medio matriz. Los medios están caracterizados por las permitividades:  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , y el volumen que ocupan está dado por sus correspondientes fracciones de llenado:  $f_1, f_2$ . En este caso (8.11) se reescribe como:

$$\frac{\varepsilon_{ef} - \varepsilon_m}{\varepsilon_{ef} + 2\varepsilon_m} = f_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_m}{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_m} + f_2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_m}{\varepsilon_2 - 2\varepsilon_m} \quad (8.14)$$

Si suponemos que el medio sólo está compuesto de los medios caracterizados por  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , el medio de fondo debe ser el medio efectivo mismo:  $\varepsilon_{ef} = \varepsilon_m$ , con lo que:

$$0 = f_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{ef}}{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_{ef}} + f_2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_{ef}}{\varepsilon_2 - 2\varepsilon_{ef}} \quad (8.15)$$

Con la condición de que los factores de llenado cumplan:  $f_1 + f_2 = 1$ . La fórmula de Bruggeman que acabamos de obtener es uno de los resultados más importantes de la teoría del medio efectivo.

Debemos de tener en cuenta que tanto la fórmula de Bruggeman como la de Maxwell-Garnett son aproximaciones en las que hemos hecho muchas suposiciones. Un modo de mejorar estas aproximaciones es tomar en cuenta las fluctuaciones asociadas a los promedios de los campos. Para cerrar esta sección, consideraremos brevemente una propuesta por Rubén G. Barrera[36] donde se incluyen las fluctuaciones de la polarización en una polarizabilidad renormalizada  $\alpha^*$ . Pensemos en un medio con  $N$  inclusiones esféricas idénticas

---

<sup>\*\*</sup>Para inclusiones elipsoidales, se tiene la expresión:  $(\varepsilon_{ef} - \varepsilon_m)/(\varepsilon_{ef} + \kappa\varepsilon_m) = f(\varepsilon_i - \varepsilon_m)/(\varepsilon_i + \kappa\varepsilon_m)$ , donde  $\kappa$  contiene la información geométrica de la inclusión y, en general, depende de la dirección de los campos externos. Notemos de (8.11) que, para inclusiones esféricas,  $\kappa = 2$ .

de radio  $a_0$  y con polarizabilidad  $\alpha$ . Para calcular la polarización sobre una inclusión  $i$ , no usaremos el campo local como en (8.6), sino que usaremos directamente la interacción dipolar con todas las demás inclusiones. Esto se puede escribir como:

$$\mathbf{P}_i = \alpha \left( \mathbf{E}'_i + \sum_j \mathbf{T}_{ij} \cdot \Delta \mathbf{P}_j \right) \quad (8.16)$$

donde el segundo sumando toma en cuenta las fluctuaciones del campo de polarización  $\Delta \mathbf{P}_j = (\mathbf{P}_j - \langle \mathbf{P} \rangle)$ , y el tensor  $\mathbf{T}_{ij}$  es el llamado tensor dipolar, y da el campo eléctrico en la posición  $i$  debido a un dipolo en la posición  $j$ . Este tensor depende únicamente de la distancia entre los puntos  $i$  y  $j$ . El otro sumando es el campo:  $\mathbf{E}'_i = \mathbf{E}_{ext}/\varepsilon_m + \sum_j \mathbf{T}_{ij} \cdot \langle \mathbf{P} \rangle$ , que incluye al campo externo, con el medio matriz de fondo, más la interacción dipolo-dipolo debido al campo de polarización promedio. Si suponemos que la polarización se puede expresar únicamente en términos de este campo como:  $\mathbf{P} = \alpha^* \mathbf{E}'_i$ , la cantidad  $\alpha^*$  incorpora los efectos debido a las fluctuaciones y la podemos pensar como una *polarizabilidad renormalizada*. Notemos que  $\alpha^* = \alpha$  implica  $\Delta \mathbf{P}_j = 0$ . En [36] se muestra que  $\alpha^*$  cumple una expresión de tipo Clausius-Mossotti (8.7), y que debe cumplir con la ecuación cuadrática:

$$\frac{1}{4} f_e \tilde{\alpha} (\tilde{\alpha}^*)^2 - \tilde{\alpha}^* + \tilde{\alpha} = 0 \quad f_e = 3f \int_0^\infty \frac{\rho^{(2)}(2a_0 X)}{X^4} dX \quad (8.17)$$

donde  $\tilde{\alpha}^* = \alpha^*/a_0$ , y  $f_e$  es una fracción de llenado efectiva dada en términos la función  $\rho^{(2)}$ . Esta función describe la distribución radial de la densidad de partículas, con  $i$  como punto de referencia, y también da información sobre la correlación entre pares de partículas.

## 8.2. Respuesta eléctrica

En el Capítulo 1 también mostramos que, debido a que los átomos y moléculas no siempre le pueden “seguir el paso” a los campos, la respuesta del medio, en general, es función de la frecuencia de oscilación los campos. De hecho, definimos originalmente a  $\varepsilon$  y  $\mu$  en el espacio de frecuencias y no como funciones del tiempo. Para modelar esta dependencia pensaremos que los componentes del medio reaccionan como átomos con un electrón atado a

un núcleo positivo por medio de un resorte amortiguado. Si  $\mathbf{d}(t)$  es el vector de desplazamiento que apunta del núcleo al electrón, el momento dipolar será simplemente:  $\mathbf{p} = -q_e \mathbf{d}$ , donde  $-q_e$  es la carga del electrón. Para un campo oscilante, la fuerza que siente el electrón es:  $\mathbf{F}(t) = -q_e \mathbf{E}_L(t)$ , por lo que la segunda ley de Newton se escribe como:

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \mathbf{d}(t) = -\frac{q_e}{m_e} \mathbf{E}_L(t) \quad (8.18)$$

donde  $k^2 = m_e \omega_0^2$  es la constante del resorte,  $m_e \gamma$  es la constante de amortiguamiento, y  $m_e$  es la masa del electrón. Notemos que si la carga fuera un múltiplo de  $q_e$ , habríamos obtenido la misma ecuación porque la masa se incrementaría por el mismo factor. Si tomamos la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (ver 1.17), las derivadas temporales se convierten en:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow -i\omega \quad (8.19)$$

de donde el desplazamiento y el campo en el espacio de frecuencias cumplen con la ecuación algebraica:

$$(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2) \mathbf{d}(\omega) = -\frac{q_e}{m_e} \mathbf{E}_L(\omega) \quad (8.20)$$

El momento dipolar de los componentes del material como función de la frecuencia es entonces:

$$\mathbf{p}(\omega) = -q_e \mathbf{d}(\omega) = \frac{q_e^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_L(\omega) \quad (8.21)$$

con lo que la polarizabilidad debe ser:

$$\alpha(\omega) = \frac{q_e^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (8.22)$$

Al sustituir este resultado en la identidad (8.6), la polarización en el espacio de frecuencias se escribe como:

$$\mathbf{P}(\omega) = n_e \mathbf{p}(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_L(\omega) \quad (8.23)$$

donde hemos definido:

$$\omega_p^2 = \frac{n_e q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \quad (8.24)$$

Esta cantidad se conoce como *la frecuencia del plasma* y se corresponde con la frecuencia natural de oscilación del mar de electrones cuando el campo dentro del medio es puramente longitudinal\*. Los cuantos de energía de estas oscilaciones se llaman *plasmones* (también: plasmones de volumen, para distinguirlos de los plasmones de superficie). Usando de nuevo la identidad macroscópica\*\* :  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathbf{E}$ , la permeabilidad como función de la frecuencia es:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (8.25)$$

De este resultado podemos analizar inmediatamente dos casos límite: cuando  $\omega \ll \omega_0$  la permitividad tiende al valor real:  $\varepsilon \rightarrow 1 + \omega_p^2/\omega_0^2$ , y cuando  $\omega \gg \omega_0$  tenemos  $\varepsilon \rightarrow 1$ . Al recordar que la absorción es proporcional a la parte imaginaria de la permitividad (ver Sección 1.2.3), vemos que, en ambos casos, las pérdidas de energía son despreciables. Esperaremos, entonces, que las pérdidas de energía se concentren alrededor de la frecuencia de resonancia.

Los medios materiales reales, a diferencia de (8.25), tienen varios procesos de absorción de energía y cada uno tendrá una frecuencia de resonancia característica. Además de las excitaciones de electrones que hemos considerado otros procesos pueden ser rotaciones moleculares o vibraciones atómicas. Para tomar en cuenta distintas frecuencias de resonancia  $\omega_j$  podemos simplemente reescribir (8.25) como:

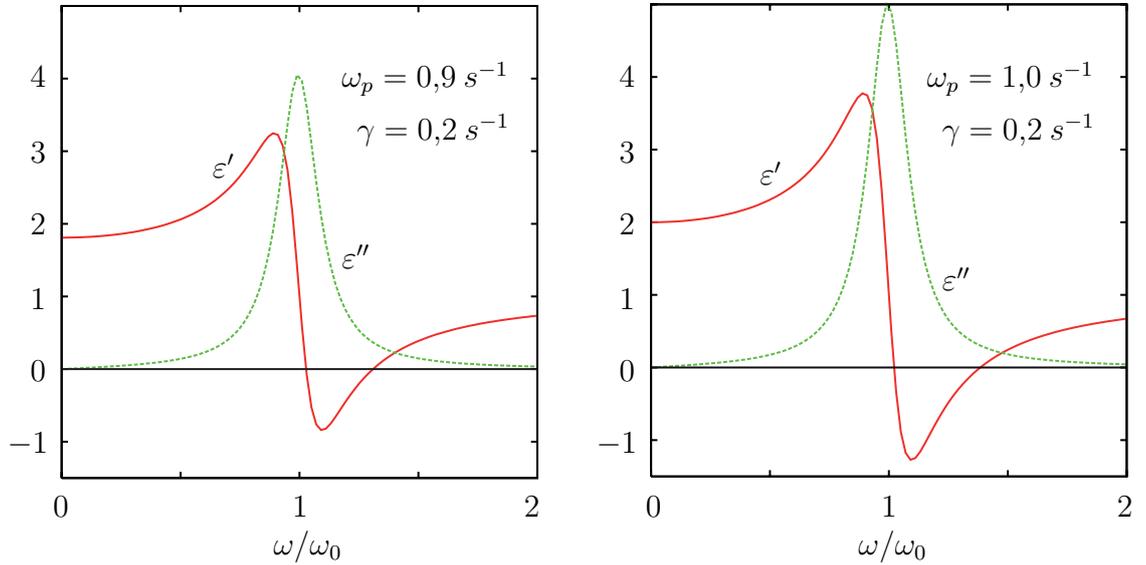
$$\varepsilon(\omega) = 1 + \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \quad (8.26)$$

En estos casos  $\omega_p^2$  pierde la interpretación que le hemos dado y se sustituye por un factor  $f_j$  que caracteriza la intensidad de cada resonancia.

---

\*En el vacío las ondas electromagnéticas sólo se propagan transversalmente, en medios materiales, sin embargo, pueden consistir en una combinación de modos transversales y longitudinales. Un modo longitudinal puro está caracterizado por  $\varepsilon = 0$ .

\*\*Aquí, como en la mayoría de las referencias [29][18], supondremos que el campo local es igual al campo promedio ( $\mathbf{E}_L = \mathbf{E}$ ). Esto se corresponde con un medio cuyos componentes estén muy diluidos. Considerar (8.5) resulta en una permeabilidad que se expresa exactamente como (8.25), pero con la frecuencia de resonancia reducida:  $\omega_0'^2 = \omega_0^2 - \omega_p^2/3$ .



**Figura 8.1:** Modelo de Lorentz

En la Figura 8.1 hemos graficado la parte real y la parte imaginaria de (8.25). Las expresiones para estas cantidades son:

$$\varepsilon' = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad \varepsilon'' = \frac{\gamma\omega_p^2\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (8.27)$$

En la gráfica hemos usado valores puramente ilustrativos para  $\omega_p$  y  $\gamma$ . El modelo que hemos desarrollado hasta ahora se conoce como el *modelo de Lorentz*, y la curva que describe  $\varepsilon'$  se conoce como Lorentziana. En las gráficas se hace evidente uno de los *retos más grandes en el desarrollo de los metamateriales*. Como hemos mencionado, lejos de la resonancia la permitividad se mantiene relativamente constante. La región donde tenemos acceso a una amplia gama de valores para la permitividad es, por tanto, la vecindad de la frecuencia de resonancia; valores negativos o cercanos a cero, por ejemplo, sólo se alcanzan en esta región. Alrededor de la resonancia, sin embargo, es donde tenemos la mayor pérdida de energía, como se ve en el pico característico de  $\varepsilon''$ . Esto hace que los metamateriales en general y especialmente los que

incluyen inclusiones metálicas sean altamente disipadores. Este hecho limita severamente los efectos que se pueden alcanzar y puede complicar incluso la interpretación de los resultados del Capítulo 6. Recientemente (2010) se ha propuesto que la inclusión de medios activos podría aminorar las pérdidas. Intentos en esta dirección de pueden encontrar en [37].

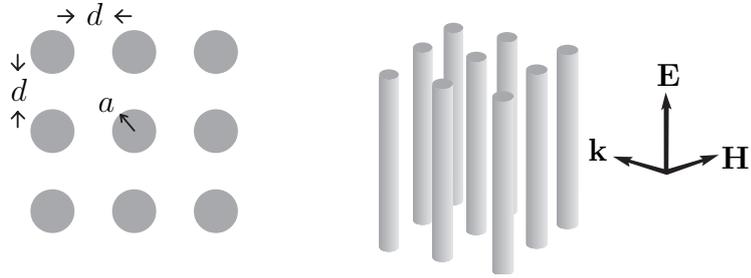
En los metales, los electrones de conducción no están asociados a ningún átomo o molécula en particular y, por tanto, no esperamos que estén descritos correctamente por (8.25). Los electrones de conducción, sin embargo, se pueden modelar como partículas libres más un término de fricción, y la ecuación dinámica para este modelo es exactamente (8.18) menos la fuerza de restauración del resorte. Esto se traducirá simplemente en sustituir  $\omega_0 = 0$  en (8.25):

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (8.28)$$

Esta descripción de los electrones libres se conoce como el *modelo de Drude*. En este caso, si  $\gamma$  es pequeña en comparación con  $\omega_p$ , cuando  $\omega \ll \omega_p$ , la parte real de la permitividad toma valores muy negativos hasta llegar a  $\omega_p$  donde  $\varepsilon \approx 0$ , y pasando este punto  $\varepsilon \rightarrow 1$  como en el modelo de Lorentz. La parte imaginaria toma altos valores positivos en la región  $\omega \ll \omega_p$  y tiende rápidamente a cero pasando la frecuencia del plasma. Esperamos, entonces, que los metales sean opacos para frecuencias menores a  $\omega_p$  y se vuelvan transparentes para frecuencias mayores. Para altas frecuencias los campos pueden excitar transiciones interbanda en los metales y, por tanto, para un metal real, no es suficiente considerar sólo electrones de conducción. Las transiciones interbanda se pueden modelar usando el modelo de Lorentz, por lo que simplemente una suma de términos de la forma (8.25) y (8.28) nos dará una mejor aproximación para la permitividad de un metal real.

### 8.2.1. Arreglo de tubos metálicos

Un arreglo de tubos metálicos en aire, como el de la Figura 8.2, es quizá el ejemplo más simple de un metamaterial. El arreglo está caracterizado por tubos de radio  $a$  y una constante de red  $d$ , si estos parámetros son mucho más chicos que la longitud de onda de interés, el medio se puede describir con una permitividad efectiva dada por el modelo de Drude en (8.28). Supondremos que el campo eléctrico es paralelo a los tubos. En este caso, no necesitamos las fórmulas de mezclado generales de la sección anterior, ya que podemos



**Figura 8.2:** Metamaterial compuesto de tubos de metal con el que es posible sintonizar la respuesta eléctrica.

aprovechar que tenemos un arreglo ordenado para poder dar directamente los parámetros necesarios en (8.28).

El estudio de la respuesta electromagnética de este arreglo tiene varios precedentes, pero fue John B. Pendry en 1996 quien lo reintrodujo y lo puso en el contexto de los metamateriales en [38]. De hecho, este artículo es uno de los trabajos seminales en metamateriales. En el artículo, Pendry propone que el medio se puede describir como un metal donde debemos considerar una densidad volumétrica efectiva y una masa efectiva del electrón:

$$n_{ef} = n_e \frac{\pi a^2}{d^2} \quad m_{ef} = \frac{\mu_0 n a^2 q_e^2}{2} \ln(d/a) \quad (8.29)$$

El ajuste en la densidad volumétrica se debe a que los electrones, al estar confinados en los tubos metálicos, sólo ocupan una fracción del volumen de la red. El segundo ajuste a considerar se debe a que la auto-inductancia de los tubos se opone al cambio de la corriente eléctrica, y Pendry propone que este efecto se puede representar como un aumento en la masa efectiva del electrón. A partir de estos parámetros efectivos la frecuencia del plasma está dada, según (8.24), como:

$$\omega_p^2 = \frac{n_{ef} q_e^2}{\varepsilon_0 m_{ef}} = \frac{2\pi c^2}{d^2 \ln(d/a)} \quad (8.30)$$

Notemos que la frecuencia del plasma queda expresada únicamente en términos de las características geométricas del arreglo, por lo que podemos ajustar

$\omega_p$  simplemente tomando distintos anchos y densidades para los tubos. Como la densidad volumétrica disminuye y la masa efectiva aumenta, el efecto final es una disminución en la frecuencia del plasma, esta disminución puede ser de varios ordenes de magnitud. Aquí debemos comentar que el aumento en la masa efectiva del electrón es una suposición limitada que no se puede aplicar de modo general. Otros métodos, sin embargo, llevan a expresiones similares a (8.30) (ver [29]). Esto, por otro lado, es una buena muestra de que, en general, la descripción precisa de arreglos, incluso los más simples, puede ser una tarea compleja.

### 8.3. Respuesta magnética

Controlar la respuesta magnética de los medios es otro de los grandes retos que enfrentan los metamateriales. Los medios naturales, de hecho, no presentan respuesta magnética alguna en el óptico. El libro de texto de Landau y Lifshitz [20], una de las referencias más respetados en física teórica, menciona al respecto:

En contraste con  $\varepsilon(\omega)$ , [...] cuando se alcanza el dominio de las frecuencias ópticas, carece de sentido utilizar la permeabilidad magnética  $\mu(\omega)$ , y al estudiar los correspondientes fenómenos debemos usar  $\mu = 1$ .

En [20], los autores calculan el acoplamiento eléctrico y magnético de un átomo y muestran que, en comparación, siempre se puede despreciar el acoplamiento magnético. El argumento es, por su puesto, correcto pero depende crucialmente del tamaño del átomo, y los meta-átomos son, en general, mucho más grandes que átomos y moléculas. Esto implica que los meta-átomos y, por tanto, los metamateriales, no están sujetos a la restricción descrita por Landau y Lifshitz.

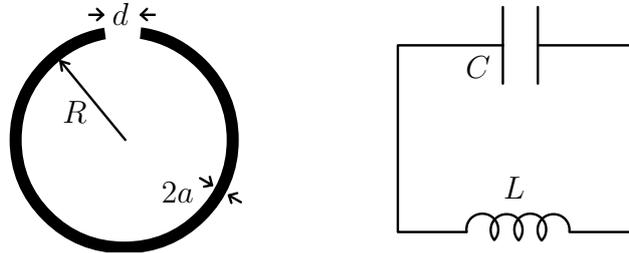
Una vez que se admite la posibilidad de una respuesta magnética el tratamiento es muy parecido al caso eléctrico. Recordemos de (8.1) que la magnetización  $\mathbf{M}$  es un momento dipolar magnético por unidad de volumen y, análogamente a (8.2), si introducimos la polarizabilidad magnética  $\alpha_m$  como:  $\mathbf{m} = \alpha_m \mathbf{H}$ , la magnetización en términos del campo-H es:  $\mathbf{M} = n_m \alpha_m \mathbf{H}$ . Usando ahora la identidad macroscópica:  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ , la permeabilidad magnética efectiva del medio se puede expresar como:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 1 + \frac{M}{H} = 1 + n_m \alpha_m \quad (8.31)$$

En el caso eléctrico pudimos establecer un modelo general pensando en electrones ligados y en electrones libres. En este caso, sin embargo, un modelo tan general no es posible y, para determinar  $\alpha_m$ , debemos saber exactamente el modo en el que el meta-átomo adquiere un momento magnético. En la siguiente sección analizaremos brevemente el meta-átomo magnético más estudiado.

### 8.3.1. Resonador de anillo cortado (SRR)

El único modo de obtener una respuesta magnética es, por tanto, con un material estructurado artificialmente. En 1999, John B. Pendry propuso un meta-átomo que podría lograr esta hazaña: el resonador de anillo cortado o SRR por sus siglas en inglés (Split-Ring Resonator),\* y exploró explícitamente la idea de estructurar un medio magnético (ver [40]). Este anillo resonador es, sin duda, el meta-átomo más famoso y es un símbolo para los metamateriales en general.



**Figura 8.3:** Un resonador de anillo cortado es como un circuito LC.

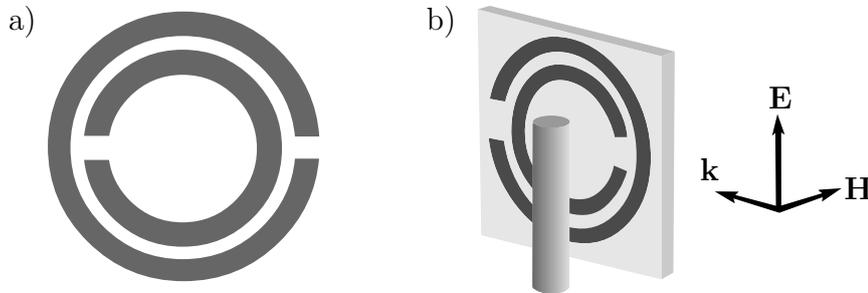
En la Figura 8.3 mostramos el esquema básico de un resonador de anillo cortado. El radio promedio del anillo es  $R$ , y la circunferencia tiene un pequeño corte de largo  $d$ . El anillo tiene una sección transversal circular de radio  $a$ . En [40], Pendry calcula que la polarizabilidad  $\alpha_m$  para una estructura de

\*El término SRR fue acuñado originalmente por W.N. Hardy y L.A. Whitehead en 1981 para un resonador muy parecido (cilíndrico) al propuesto por Pendry. Los autores usaron este resonador en experimentos de física nuclear [39].

este tipo tiene la forma (8.22). La respuesta magnética, por tanto, presenta una forma Lorentziana (ver Figura 8.1) caracterizada por una frecuencia de resonancia  $\omega_0$ , una frecuencia de plasma magnético  $\omega_{mp}$  y un término de amortiguamiento  $\gamma$ . La respuesta del meta-átomo, además, se puede modelar como un circuito LC. Cuando un campo magnético atraviesa perpendicularmente el plano del anillo se forma una corriente inducida por lo que el anillo funciona como un inductor, y las cargas acumuladas en el corte del anillo funcionan como un capacitor. Si aproximamos la inductancia por la de un anillo cerrado<sup>\*\*</sup>:  $L \approx \mu_0 \pi R$ , tomando la capacitancia:  $C = \epsilon_0 \pi a^2 / d$ , la frecuencia de resonancia para el circuito LC es:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\pi a} \sqrt{\frac{d}{R}} \quad (8.32)$$

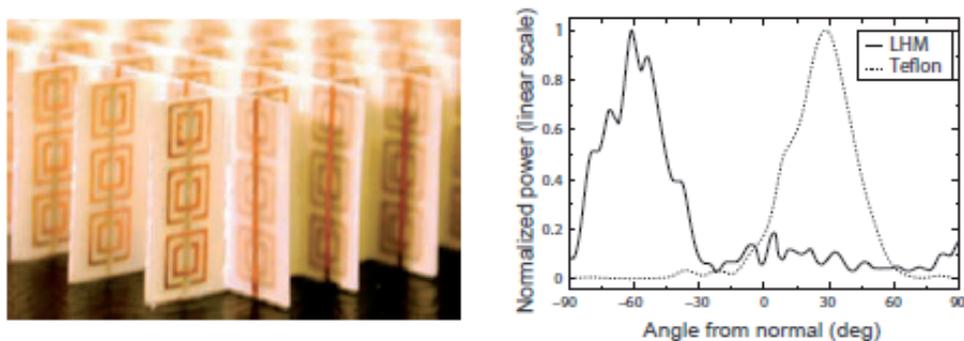
donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Vemos entonces que la frecuencia de resonancia depende únicamente de los detalles geométricos del anillo. Este, por su puesto, es un cálculo muy aproximado y no da cuenta de posibles efectos que pueden tomar relevancia. Por ejemplo, una mejor aproximación muestra que, cuando  $a \rightarrow 0$ , el anillo se satura y tenemos  $\omega_0 \rightarrow cte$ , por lo que el uso de anillos cortados es limitado y no se pueden usar en cualquier escala. (ver [29])



**Figura 8.4:** a) SRR doble, b) meta-átomo compuesto de tubo metálico y SRR doble.

<sup>\*\*</sup>El campo magnético en el centro de un anillo cerrado es:  $B = \mu_0 I / 2R$ , donde  $I$  es la corriente a través del anillo. Como  $m = \pi R^2 I$  es el momento magnético del anillo, la energía magnética en términos de la inductancia es:  $LI^2/2 = mB = \mu_0 \pi R I^2 / 2$ .

En su artículo seminal, Pendry no propone exactamente el anillo cortado simple como el de la Figura 8.3, sino un anillo doble como el de la Figura 8.4a, en el que se forma una capacitancia adicional entre los anillos. Inmediatamente después de esta propuesta, se intentaron varios experimentos para corroborar la teoría de Pendry. Uno de los experimentos más significativos fue llevado a cabo por David J. Smith —quién se convirtió en uno de los colaboradores más cercanos de Pendry— y Richard A. Shelby en 2001 (ver [41]). El objetivo del experimento fue construir un medio con índice de refracción negativo (Sección 6.2), para lo cual, se necesita que  $\epsilon$  y  $\mu$  sean simultáneamente negativos. El reto es, entonces, lograr que ambas cantidades tomen valores negativos en el mismo rango de frecuencias. La idea para el diseño del medio fue combinar el medio de tubos metálicos (ver Figura 8.2) con anillos cortados como se muestra en la Figura 8.4b. En la Figura 8.5 se muestra una foto del medio utilizado, en este caso se usaron anillos cuadrados y, en vez de tubos, se usaron tiras de cobre; ambos elementos fueron impresos sobre tablillas dieléctricas para circuitos. El experimento midió el ángulo de salida de un haz de microondas a través del metamaterial, y el índice de refracción se obtuvo directamente de la ley de Snell. Los resultados del experimento mostraron claramente una refracción consistente con un índice de refracción negativo. La gráfica en la Figura 8.5 muestra la potencia normalizada como función del ángulo para el metamaterial y un medio control hecho de Teflón. Notemos, sin embargo, que, como la gráfica sólo muestra la potencia normalizada, no se aprecian las enormes pérdidas de energía asociadas al metamaterial.

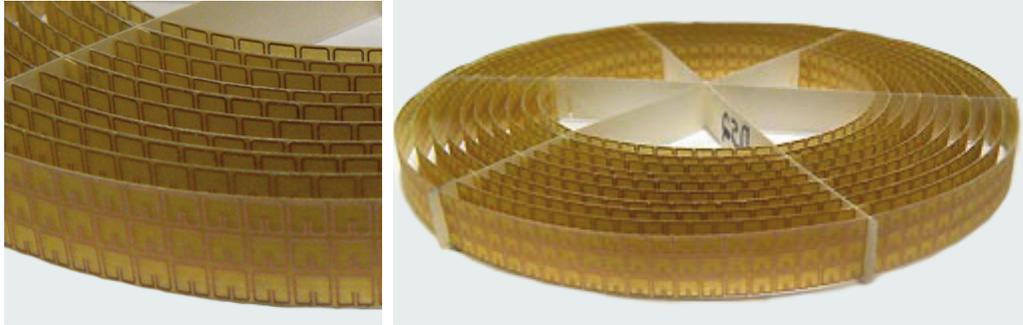


**Figura 8.5:** Metamaterial de refracción negativa y resultados experimentales tomados de [41]

Por último, debemos mencionar que controlar la respuesta magnética sigue siendo un reto enorme, y en muchos prototipos de metamateriales se ha buscado usar propiedades simplificadas para no tener que lidiar con  $\mu(\omega)$ .

## 8.4. Capa de invisibilidad

Como ya hemos mencionamos, la primera capa de invisibilidad (ver Sección 6.3) fue diseñada y construida por Schuring, Smith y Pendry en 2006 [12]. Para la construcción de este medio artificial también se usaron resonadores de anillo cortado para controlar la respuesta magnética.



**Figura 8.6:** Capa de invisibilidad para microondas diseñada y realizada por Schuring, Smith y Pendry en 2006.

Como las propiedades exactas para la capa de invisibilidad (6.43) son muy complicadas, en la Sección 6.3.3, mostramos como se pueden obtener propiedades simplificadas para una capa de invisibilidad imperfecta. Para esto, recordemos que necesitamos fijar una polarización. Los autores de [12] usaron un procedimiento parecido, usando polarización TE, pero ignoraron la condición (6.65) y sólo consideraron las condiciones (6.63-6.64) dadas por:

$$\mu_{\theta}\varepsilon_z = \frac{1}{\alpha^2} \qquad \mu_r\varepsilon_z = \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{r-a}{r} \right)^2 \qquad (8.33)$$

Para encontrar nuevas propiedades, los autores hicieron una aproximación todavía mas cruda que la hicimos en la Sección 6.3.3 para  $\mu_{\theta}(r)$ , proponiendo

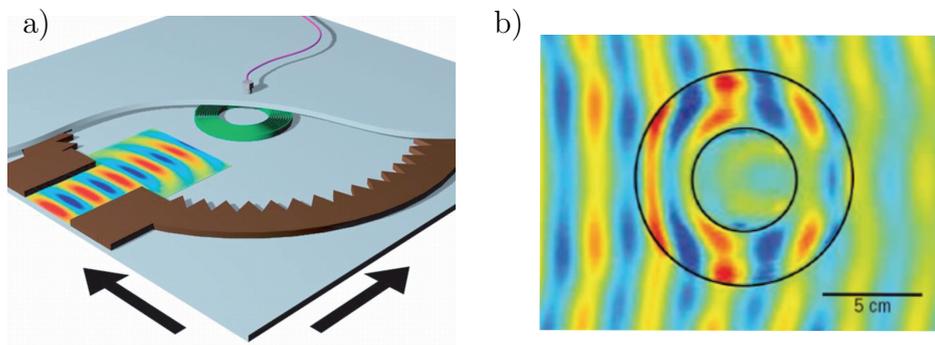
$\mu'_\theta = 1$ . Para cumplir con las condiciones, las otras propiedades simplificadas deben ser:

$$\varepsilon'_z = \frac{1}{\alpha^2} \qquad \mu'_r = \left( \frac{r-a}{r} \right)^2 \qquad (8.34)$$

A diferencia de las propiedades que obtuvimos en la Sección 6.3.3, estas propiedades no cumplen con ser no-reflejantes. La impedancia del medio, de hecho, está dada por:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_\theta}{\varepsilon_z}} = \alpha = \frac{b-a}{b} \qquad (8.35)$$

De las propiedades simplificadas, vemos que el reto se reduce a controlar la respuesta magnética en dirección radial. El material que diseñó Smith y sus colaboradores consistió en 10 cilíndricos concéntricos con anillos resonadores impresos en la superficie (ver Figura 8.6). Para controlar la respuesta magnética se fueron cambiando las características de los anillos resonadores como función del radio para simular la inhomogeneidad. En el experimento se colocó al material sobre una placa conductora frente a una guía de onda plana, rodeada de un absorbedor de onda. Una antena colocada en una placa conductora superior se usó para medir la fase y la magnitud del campo. El campo se midió para un anillo de cobre sólo y para el anillo cubierto por la capa de invisibilidad (ver Figura 8.7b). Moviendo la placa superior se hizo un mapeo del campo dentro del absorbedor (flechas negras en la Figura 8.7a). Se usó una frontera exterior para el material de  $b \approx 5,9\text{cm}$ , una interior de  $a \approx 2,7\text{cm}$ , y se encontró que la capa trabajaba a una frecuencia óptima de 8.5 GHz.



**Figura 8.7:** a) El dispositivo experimental usado en [12]. b) La capa de invisibilidad cubrió un anillo de cobre, y se corroboró una disminución en el campo dispersado y en la “sombra” del anillo.



# Conclusiones

La Óptica de Transformación es una nueva manera de controlar y manipular la luz, y aporta una nueva perspectiva para la comprensión de la luz. La teoría se sustenta en el hecho de que las ecuaciones de Maxwell en el vacío con una geometría dada por una métrica  $g_{ij}$  son idénticas a las ecuaciones para un medio anisotrópico, si las propiedades materiales cumplen con:

$$\varepsilon^{ij} = \mu^{ij} = \sqrt{g}g^{ij} \quad (\text{C.1})$$

Este hecho se conoce como la *interpretación material de la métrica* y permite que podamos identificar explícitamente una métrica con un medio material. Este resultado se puede aprovechar para diseñar medios materiales novedosos a partir de transformaciones si notamos que, por ejemplo, la métrica en la ecuación anterior se puede pensar como un nuevo sistema coordenado que se obtiene a partir de un sistema Cartesiano a partir de la transformación:

$$g^{ij} = \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^j \delta^{i'j'} \quad (\text{C.2})$$

donde  $\Lambda_{i'}^i$  es el Jacobiano de la transformación, y  $\delta^{i'j'}$  es la delta de Kronecker. En el capítulo 6, desarrollamos en detalle estas ideas y mostramos como se pueden aplicar estas ideas en distintos sistemas coordenados. También, hacemos especial énfasis en el modo de usar la técnica pensando en transformaciones de rayos de luz. Esto surge al identificar los rayos de luz con las geodésicas de la métrica  $g^{ij}$ .

La implementación de los materiales diseñados a partir de la óptica de transformación puede ser posible con el uso de metamateriales. Con los metamateriales se puede controlar las propiedades materiales a partir de una unidad de estructura. A pesar de que ha habido avances en esta nueva tecnología es importante estar consciente de los enormes retos que aún enfrenta.

Las propiedades

$$\mu_r = \varepsilon_r = \frac{r-a}{r} \quad \mu_\theta = \varepsilon_\theta = \frac{r}{r-a} \quad \mu_z = \varepsilon_z = \frac{r-a}{\alpha^2 r} \quad (\text{C.3})$$

El Hamiltoniano

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \varepsilon^{ij} k_i k_j - k_0^2 \quad (\text{C.4})$$

# Apéndices

## A.1. Curvas Paramétricas

Sea  $\Gamma$  una colección de puntos en el espacio  $\mathbb{R}^3$  y  $[a, b]$  un intervalo de números reales  $a \leq t \leq b$ . Decimos que una función

$$\gamma(t) : [a, b] \rightarrow \Gamma \tag{A.1}$$

es una *parametrización de la curva* si  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  es continua y sobreyectiva, esto es, si cada punto sobre  $\Gamma$  se corresponde con algún  $\gamma(t)$  para al menos una  $t \in [a, b]$ . La variable  $t$  es conocida como *el parámetro* de la curva. En esta tesis, siempre asumimos, además, que la parametrización es diferenciable y que  $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \gamma'_3(t)) \neq 0$  (en este caso se dice que la curva es suave).

Notemos que, formalmente, tenemos dos aspectos asociados a una curva, por un lado tenemos una trayectoria  $\Gamma$  en el espacio y por otro debemos especificar un “modo” de recorrer dicha trayectoria (la parametrización). Como existen infinitas maneras de recorrer una trayectoria  $\Gamma$  dada, tenemos infinitas parametrizaciones posibles. Aprovechando que, para una trayectoria dada, distintas parametrizaciones deben tener la misma imagen, podemos establecer una relación de equivalencia entre ellas. Para mostrar esto, pensemos en una curva parametrizada por  $\gamma(t)$  como en (A.1), si consideramos alguna otra parametrización  $\alpha(u) : [c, d] \rightarrow \Gamma$ , donde  $[c, d]$  es algún otro intervalo de números reales, las parametrizaciones serán equivalente si podemos establecer una biyección  $u(t) : [a, b] \rightarrow [c, d]$ , donde  $u(t)$ , además, debe ser continua y creciente ( $u'(t) > 0$ ). Las parametrizaciones quedan relacionadas entonces como:

$$\alpha(u(t)) = \gamma(t) \tag{A.2}$$

Expresado de esta modo, decimos que  $\alpha(u)$  es una *reparametrización* de la curva descrita por  $\gamma(t)$ , y  $u$  es el nuevo parámetro.

La longitud total  $L$  de una trayectoria  $\Gamma$  es independiente de la parametrización y está dada por:

$$L = \int_a^b |\gamma'(x)| dx \quad (\text{A.3})$$

Esta longitud se puede usar para definir un parámetro natural conocido como la *longitud de arco*. Para definir esta parametrización, consideremos una función que nos de la longitud del camino recorrido hasta algún punto  $a \leq t \leq b$ :

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(x)| dx \quad (\text{A.4})$$

Esta función establece una biyección  $s(t) : [a, b] \rightarrow [0, L]$  creciente, ya que, del teorema fundamental del cálculo, tenemos  $s'(t) = |\gamma'(t)| > 0$ . Con esto, definimos la parametrización por longitud de arco como:  $\sigma(s(t)) = \gamma(t)$ . Una de las características más notables de esta parametrización es que el vector derivada (tangente) siempre tiene magnitud unitaria, hecho que podemos ver directamente de la regla de la cadena:

$$|\sigma'(s)| s'(t) = |\gamma'(t)| \quad \Rightarrow \quad |\sigma'(s)| = 1 \quad (\text{A.5})$$

La parametrización, además, es única para una trayectoria  $\Gamma$  dada, y, como este desarrollo siempre es posible, cualquier curva (trayectoria parametrizada) puede ser reparametrizada por longitud de arco.

En el Capítulo 2 se optó por usar una notación donde no se explicita la parametrización como en este apéndice, sino que, dado un punto  $\mathbf{r} \in \Gamma$ , denotamos la curva como:  $\mathbf{r}(s) = \sigma(s)$ . En este caso, distinguimos que parametrización usamos directamente del parámetro usado. Ésta, por su puesto, es una notación informal, pero ayuda a simplificar algunos argumentos y no se presta a confusiones.

## A.2. Ecuación de Euler-Lagrange

Dada una cantidad  $S$  definida como una integral entre los valores extremos  $u_1$  y  $u_2$  (sólo analizaremos el caso cuando estos extremos están fijos), el problema básico del calculo de variaciones es determinar el conjunto de

funciones  $\{x_i(u)\}$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$  (en esta tesis  $n = 3$ ), tales que el valor de  $S$  dada por:

$$S = \int_{u_1}^{u_2} L(x_i(u), \dot{x}_i(u); u) du \quad (\text{A.6})$$

tome un valor extremo, esto es, máximo, mínimo o de punto de inflexión. El integrando depende de un parámetro independiente  $u$ , de las funciones  $x_i(u)$  y de las primeras derivadas de estas funciones  $\dot{x}_i = dx_i/du$ . Si, por ejemplo, tenemos un conjunto de soluciones, tales que  $S$  toma un valor mínimo, cualquier variación a estas soluciones debe hacer que el valor de  $S$  se incremente. Definimos esta variación paramétricamente como:

$$x_i(\alpha, u) = x_i(0, u) + \alpha \eta_i(u) \quad (\text{A.7})$$

donde  $x_i(0, u)$  son las soluciones que minimizan  $S$ , y  $\eta_i(u)$  son funciones arbitrarias con derivada continua y que se anulan en los extremos ( $\eta_i(u_1) = \eta_i(u_2) = 0$ ). La cantidad  $S$  se vuelve, entonces, una función del parámetro  $\alpha$  con mínimo en  $\alpha = 0$ , y, por tanto, cualquier  $\alpha > 0$  debe incrementar el valor de  $S$ . Al escribimos (A.6) como:

$$S(\alpha) = \int_{u_2}^{u_1} L(x_i(\alpha, u), \dot{x}_i(\alpha, u); u) du \quad (\text{A.8})$$

la condición para que  $S$  tenga un valor extremo se expresa como:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Directamente de (A.8) la parcial está dada por:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{u_1}^{u_2} du \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \alpha} \right) \quad (\text{A.10})$$

Y notando de (A.7) que podemos escribir las parciales con respecto a  $\alpha$  en términos de las funciones  $\eta_i(u)$ :

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} = \eta_i(u) \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \alpha} = \dot{\eta}_i(u) \quad (\text{A.11})$$

sustituyéndolas en (A.10) tenemos:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{u_1}^{u_2} du \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{\eta}_i \right) \quad (\text{A.12})$$

Integrando por partes<sup>\*\*\*</sup> el segundo sumando se obtiene:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{\eta}_i du = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \eta_i(u) \right|_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} \frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \eta_i(u) du \quad (\text{A.13})$$

Notando que el primer sumando se anula (recordemos  $\eta_i(u_1) = \eta_i(u_2) = 0$ ), la expresión (A.12) se reduce a:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{u_1}^{u_2} du \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \eta_i(u) = 0 \quad (\text{A.14})$$

Como  $\eta_i(u)$  son funciones arbitrarias, la expresión anterior sólo se cumple si el término entre paréntesis se anula para toda  $i$ , esto es:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Con lo que hemos obtenido  $n$  ecuaciones, que deben cumplir las funciones  $x_i(u)$  para ser solución de (A.9). La expresión que hemos obtenido es conocida como *la ecuación de Euler-Lagrange*.

En muchas referencias —y en esta tesis— el problema variacional se escribe en la llamada notación  $\delta$ . Para esto simplemente definimos:

$$\delta S \equiv \frac{\partial S}{\partial \alpha} d\alpha \quad \delta x_i \equiv \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} d\alpha \quad (\text{A.16})$$

Con lo que la condición (A.9) se puede escribir como:

$$\delta S = 0 \quad (\text{A.17})$$

### A.3. Transformada de Legendre y Lagrangiano degenerado

En la descripción de sistemas mecánicos —y en otros contextos— el integrando en (A.6) se conoce como el Lagrangiano del problema, y la dinámica

---

<sup>\*\*\*</sup>  $\int u dv = uv - \int v du$

del sistema queda descrita por la ecuación de Euler-Lagrange (A.15), una ecuación diferencial de segundo orden. En algunos casos, el problema puede ser simplificado definiendo una nueva función  $H(x_i, p_i)$ , conocida como el Hamiltoniano, tal que podamos separar la ecuación (A.15) en dos ecuaciones de primer orden (lineales). Esta función se puede encontrar normalmente aplicando la transformada de Legendre al Lagrangiano en (A.6). En el Capítulo 2, sin embargo, no fue posible aplicar directamente esta transformación al Lagrangiano óptico (2.35). En este apéndice, mostraremos en detalle las razones detrás de este hecho.

Primero mostraremos como se puede separar la ecuación de Euler-Lagrange. El primer paso es definir la nueva variable  $p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i$ , conocida como el momento conjugado. El Hamiltoniano será función de esta nueva variable y de las funciones  $x_i(u)$ , pero no de las derivadas  $\dot{x}_i(u)$ . Tomando en cuenta la definición del momento conjugado, las ecuaciones asociadas al Lagrangiano son:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = p_i \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \dot{p}_i \qquad (\text{A.18})$$

El Hamiltoniano, la transformada de Legendre correspondiente, está definido en términos del momento conjugado y  $L(x_i, \dot{x}_i)$  como:

$$H(x_i, p_i) = \sum_{k=1}^n \dot{x}_k p_k - L(x_i, \dot{x}_i) \qquad (\text{A.19})$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas a esta función son:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x}_i + \sum_{k=1}^3 \left( p_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial p_i} \right) = \dot{x}_i \qquad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = - \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\dot{p}_i \qquad (\text{A.21})$$

Podemos ver que estas expresiones reproducen exactamente las ecuaciones en (A.18), notando que (A.20) es exactamente el lado izquierdo de (A.18), y que (A.20) contiene implícitamente la ecuación de Euler-Lagrange (ver expresión dentro del paréntesis). Este proceso, sin embargo, supone que podemos

despejar  $\dot{x}_i$  en términos del momento conjugado  $\dot{p}_i$ , esto es, supone que la función  $p_i = p_i(\dot{x}_j)$  es invertible. Para esto, se debe cumplir:

$$\det \left( \frac{\partial p_i}{\partial \dot{x}_j} \right) = \det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_i} \right) \neq 0 \quad (\text{A.22})$$

Esto es, el Jacobiano de  $p_i(\dot{x}_j)$  (el Hessiano de  $L(x_j, \dot{x}_j)$  con respecto a las variables  $\dot{x}_j$ ) debe ser no-nulo. El Lagrangiano (2.35) que definimos a partir del principio de Fermat en el Capítulo 2 no cumple esta condición, y, por tanto, no pudimos simplemente aplicar la transformada de Legendre para encontrar el Hamiltoniano correspondiente. Mencionamos que la razón por la que el Lagrangiano no cumple con la condición es por ser una función homogénea de primer orden. A continuación demostramos este hecho. Una función es *homogénea de primer orden* en las variables  $\dot{x}_i$  si cumple con:

$$L(x_i, a\dot{x}_i) = aL(x_i, \dot{x}_i) \quad (\text{A.23})$$

donde  $a > 0$  es cualquier número real\*. Con esta identidad, definimos una función de  $a$  como:

$$g(a) = L(x_i, a\dot{x}_i) - aL(x_i, \dot{x}_i) \quad (\text{A.24})$$

Es claro que, para toda  $a$ , la función cumple con  $g(a) = 0$ , y, por tanto, la derivada también debe anularse ( $g'(a) = 0$ ). Al calcular la derivada encontramos:

$$g'(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L(x_i, a\dot{x}_i)}{\partial (a\dot{x}_k)} \dot{x}_k - L(x_i, \dot{x}_i) = 0 \quad (\text{A.25})$$

donde en el primer sumando hemos usado la regla de la cadena. En particular, para  $a = 1$  tenemos la identidad:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial L(x_i, \dot{x}_i)}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = L(x_i, \dot{x}_i) \quad (\text{A.26})$$

Este resultado es conocido como *el teorema de Euler para una función homogénea de primer orden*. De esta identidad podemos mostrar directamente

---

\*En el caso del Lagrangiano (2.35):  $L(\mathbf{r}, a\dot{\mathbf{r}}) = n(\mathbf{r})|a\dot{\mathbf{r}}| = a n(\mathbf{r})|\dot{\mathbf{r}}| = aL(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

que la matriz Hessiana (de las segundas derivadas) tiene determinante cero. Para esto, derivamos con respecto a  $\dot{x}_j$  de ambos lados de la igualdad anterior:

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k} \dot{x}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \delta_{kj} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \quad (\text{A.27})$$

por lo que:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = 0 \quad (\text{A.28})$$

Esto quiere decir que las tres filas  $j$  son perpendiculares al vector con entradas  $\dot{x}_k$  y, por tanto, se encuentran en un plano y no pueden ser linealmente independientes. Esto hecho implica directamente que:

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k} \right) = 0 \quad (\text{A.29})$$

Con lo que hemos demostrado que si el Lagrangiano es homogéneo de primer orden, la matriz Hessiana correspondiente tiene determinante cero.

Este resultado esta conectado con la libertad de parametrización que mencionamos en el Capítulo 2. Para mostrar esto, notemos que, de la regla de la cadena, las derivadas bajo distintas parametrizaciones están relacionadas como:

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} = \frac{du}{ds} \frac{dx}{du} = a \frac{dx}{du} \quad (\text{A.30})$$

donde hemos denotado:  $a = du/ds$ . Este cambio de parametrización en un Lagrangiano homogéneo de primer orden se puede expresar como:

$$L(x_i, \dot{x}_i) = L(x_i, a \frac{dx_i}{du}) = a L(x_i, \frac{dx_i}{du}) \quad (\text{A.31})$$

Si definimos un nuevo Lagrangiano:  $L'(x_i, dx_i/du) = a L(x_i, dx_i/du)$ , la nueva función cumplirá exactamente con la misma ecuación de Euler-Lagrange (A.15) con respecto al nuevo parámetro  $u$  ( $a$  simplemente se cancela).

## A.4. Algunas identidades del tensor métrico

En este apéndice demostraremos algunas identidades del tensor métrico que se usaron en el Capítulo 4 sin una prueba explícita.

Primero mostraremos la identidad (4.54) que usamos en la Sección 4.3.2. La identidad es una relación entre  $\Gamma_{ki}^k$  y el determinante de la métrica  $g$ . Para esto, notemos que podemos expresar la cantidad  $\sqrt{g}$  en términos de los elementos en la base como:

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)) = \frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial x^i} \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \quad (\text{A.32})$$

Recordando que triple producto escalar cumple con:  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ , podemos desarrollar el segundo término en la derecha como:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial x^i}) + \mathbf{e}_1 \cdot (\frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial x^i} \times \mathbf{e}_3) \quad (\text{A.33})$$

$$= \frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial x^i} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) + \frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial x^i} \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \quad (\text{A.34})$$

Y sustituyendo en la expresión original obtenemos:

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i} = \frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial x^i} \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) + \frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial x^i} \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) + \frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial x^i} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \quad (\text{A.35})$$

$$= \Gamma_{1i}^k \mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) + \Gamma_{2i}^k \mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) + \Gamma_{3i}^k \mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \quad (\text{A.36})$$

$$= \sqrt{g} (\Gamma_{1i}^1 + \Gamma_{2i}^2 + \Gamma_{3i}^3) = \sqrt{g} \Gamma_{ki}^k \quad (\text{A.37})$$

donde usamos explícitamente las propiedades (4.7). Con esto tenemos directamente la identidad que buscábamos:

$$\Gamma_{ki}^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i} \quad (\text{A.38})$$

En la Sección 4.4 usamos la expresión (A.41) sin demostrarla. La identidad se obtiene notando que, como  $g^{lj}g_{jk} = \delta_j^k$ , tenemos:

$$\frac{\partial(g^{lj}g_{jk})}{\partial x^i} = \frac{\partial(\delta_j^k)}{\partial x^i} = 0 \quad (\text{A.39})$$

Con lo que, la regla de la cadena implica:

$$\frac{\partial(g^{lj}g_{jk})}{\partial x^i} = g^{lj} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + g_{jk} \frac{\partial g^{lj}}{\partial x^i} = 0 \quad (\text{A.40})$$

De donde despejamos:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = -g_{lj}g_{mk} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} \quad (\text{A.41})$$

Los símbolos de Christoffel se pueden expresar, en general, en términos de la métrica como:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il} \left[ \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right] \quad (\text{A.42})$$



# Bibliografía

- [1] I. Y. Tamm. Electrodynamics of the anisotropic medium in the special theory of relativity. *J. Russ. Phys.-Chem. Soc.* 56, 2-3 ,248, 1924.
- [2] J. Plebanski. Electromagnetic waves in gravitational fields. *Physical Review Letters* 118, 1396-1408, 1960.
- [3] J.B. Pendry and A.J. Ward. Refraction and geometry in maxwell's equations. *Journal of Modern Optics* 43, 773-793, 1996.
- [4] J.B. Pendry, D. Schuring, and D.R. Smith. Controlling electromagnetic fields. *Science Express* 14, 9794-9804, 2006.
- [5] U. Leonhardt. Optical conformal mapping. *Science* 312, 1777-1780, 2006.
- [6] U. Leonhardt and T. G. Philbin. Transformation optics and the geometry of light. *Progress in Optics*, 2009.
- [7] J.B. Pendry, D.R. Schuring, and D. Smith. Calculation of material properties and ray tracing in transformation media. *Optics Express* 14, 9794-9804, 2006.
- [8] U. Leonhardt and T. G. Philbin. General relativity in electrical engineering. *New J. Phys.* 8, 247, 2006.
- [9] U. Leonhardt and T. Tyc. Broadband invisibility by non-euclidean cloaking. *Science* 323, 110, 2008.
- [10] Min Qui, Wei Yan, Min Yan, and Zhichao Ruan. Coordinate transformation makes perfect invisibility cloak with arbitrary shape. *New J. Phys.* 10, 043040, 2008.

- [11] D.R. Smith, W.J. Padilla, D.C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys. Rev. Lett.* *84*, 4184-4187, 2000.
- [12] D.R. Smith, D. Schuring, J.B. Pendry, J.J. Mock, S.A. Cummer, B.J. Justice, and A.F. Starr. Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science* *314*, 977, 2006.
- [13] J. Li and J.B. Pendry. Hiding under the carpet: A new strategy for cloaking. *Phys. Rev. Lett.* *101*, 203901, 2008.
- [14] L.H. Gabrielli, J. Cardenas, C.B. Poitras, and M. Lipson. Silicon nanostructure cloak operating at optical frequencies. *Nature Photonics* *3*, 461-3, 2009.
- [15] J. Valentine, J. Li, T. Zentgraf, G. Bartal, and X. Zhang. An optical cloak made of dielectrics. *Nature Materials* *8*, 568-71, 2009.
- [16] M. Gharghi, C. Gladden, T. Zentgraf, Y. Liu, X. Yin, J. Valentine, and X. Zhang. A carpet cloak for visible light. *Nano Letters* *11*, 2825, 2011.
- [17] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1864.
- [18] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics 3rd Ed.* Prentice Hall, 1999.
- [19] Carlos Prieto. *Disipación y Transporte de Energía en Materiales con Refracción Negativa.* UNAM, 2009.
- [20] L. D. Landau E. M. Lifshitz. *Electrodinámica en los medios continuos.* Reverté, 1981.
- [21] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists, 3rd Ed.* Academic Press, Inc., 1985.
- [22] Max Born and Emil Wolf. *Principles of Optics 6th Ed.* Pergamon Press, 1980.
- [23] Richard P. Feynman. *QED: The strange theory of light and matter.* Princeton University Press, 1985.

- [24] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, 1995.
- [25] C.T.J. Dodson and T. Poston. *Tensor Geometry 2nd. Ed.* Springer-Verlag, 1980.
- [26] Leonid P. Lebedev and Micheal J. Cloud. *Tensor Analysis*. World Scientific Publishing, 2003.
- [27] Bernard F. Schutz. *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge University Press, 1980.
- [28] Bernard F. Schutz. *A first course in General Relativity*. Cambridge University Press, 1985.
- [29] V. Shalaev and W. Cai. *Optical Metamaterials*. Springer, 2010.
- [30] R. Weder. A rigorous analysis of high order electromagnetic invisibility cloaks. *J. Phys. A: Math. Theor.* *41* 065207, 2008.
- [31] R. Weder. The boudary conditions for point transformed electromagnetic invisibility cloaks. *J. Phys: Math. Theor. A* *41*, 415401, 2008.
- [32] R. Weder. A rigorous time-domain analysis of full-wave electromagnetic cloaking (invisibility). *arXiv:0704.0248v3 [physics.optics]*, 2007.
- [33] Min Qui, Zhichao Ruan, Min Yan, and C.W. Neff. Ideal cylindrical cloak: Perfect but sensitive to tiny perturbations. *Phys. Rev. Lett.* *99*, 113903, 2007.
- [34] D.R. Smith, T.J. Cui, and R. Liu. *Metamaterials*. Springer, 2010.
- [35] John D. Jackson. *Clasical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, 1962.
- [36] R.G. Barrera, G. Monsivais, and W.L. Mochán. Renormalized polarizability in the maxwell garnett theory. *Physical Review B* *38*, 5371, 1988.
- [37] V. Shalaev, Shumin Xiao, V.P. Drachev, A.V. Kildishev, Xingjie Ni, U.K Chettirar, and Hsiao-Kuan Yuan. Loss-free and active optical negative-index metamaterials. *Nature* *466*, 735-738, 2010.

- [38] J.B. Pendry, A.J. Holden, W.J. Stewart, and I. Youngs. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. *Physical Review Letters* 76, 4773-4776, 1996.
- [39] W.N. Hardy and L.A. Whitehead. Split-ring resonator for use in magnetic resonance from 200–2000 mhz. *Rev Sci Instrum* 52 213–216, 1981.
- [40] J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, and W.J. Stewart. Magnetism for conductors and non-linear phenomena. *IEE Transactions on microwave theory and techniques* 47, 11, 1999.
- [41] R.A. Shelby, D.R. Smith, and S. Schultz. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science* 292(5514), 11, 2001.