Las leyes de Kepler y la ley de la Gravitación Universal

Rosario Paredes y Víctor Romero Rochín

Instituto de Física, UNAM

16 de septiembre de 2014

Resumen

Estas notas describen con cierto detalle la deducción de las leyes de Kepler usando la ley de la Gravitación Universal de Newton. Se invita al lector a que realice las partes técnicas faltantes.

1. Las leyes de Kepler

Comenzaremos enunciando las tres leyes de Kepler. Estas describen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Como veremos, su generalidad es mayor pues se aplican a cualquier sistema de dos cuerpos tal que la dirección de la fuerza coincida con la línea que los une y cuya magnitud sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

Primera ley: *Los planetas se mueven describiendo órbitas elípticas, con el Sol situado en uno de sus focos.*

Segunda ley: *El vector que une al sol con el planeta en cuestión barre áreas iguales en tiempos iguales. Esta ley también es conocida como la ley de las áreas.*

Tercera ley: *El cuadrado del periodo de la órbita es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita.*

2. Ley de la Gravitación Universal de Newton.

El objetivo del escrito es mostrar que las leyes de Kepler son consecuencia de la ley de Gravitación Universal de Newton. Esta ley establece que existe una fuerza gravitacional entre cualesquiera dos cuerpos y que es proporcional al producto de sus masas m_1 y m_2, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa y en la dirección de la línea que los une.

Supongamos un sistema de referencia en la que los vectores de posición que describen el movimiento de los cuerpos de masas m_1 y m_2 son $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ respectivamente. El cuerpo de masa m_1 podría ser el Sol y el de masa m_2 la Tierra.

1. Dibuje el sistema coordenado en tres dimensiones con dos vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$.

2. Dibuje el vector $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Note que este va de $\vec{r}_2$ a $\vec{r}_1$.

De acuerdo a la ley de gravitación universal la fuerza que la masa m_2 ejerce sobre la masa m_1 es

$$m_1 \ddot{\vec{r}_1} = -\frac{G m_1 m_2}{|r_1 - r_2|^2} \left(\hat{r}_1 - \hat{r}_2 \right), \tag{1}$$

mientras que la fuerza que m_1 ejerce sobre m_2 es

$$m_2 \ddot{\vec{r}_2} = -\frac{G m_1 m_2}{|r_1 - r_2|^2} \left(\hat{r}_2 - \hat{r}_1 \right). \tag{2}$$

La constante de proporcionalidad es $G = 6{,}67^{-11} Nm^2/kg^{-2}$ y se llama la Constante Universal de la Gravitación. Es importante notar que la masa m_1 “sienteüna fuerza hacia la masa m_2 y esto la acelera. De manera análoga, la masa m_2 se siente atraída hacia m_1, obedeciendo la Tercera Ley de Newton. Las direcciones de las fuerzas están dadas por los vectores unitaris $-(\hat{r}_1 - \hat{r}_2)$ y $-(\hat{r}_2 - \hat{r}_1)$. Asegúrese de entender este punto.

Decimos que las ecuaciones (1) y (2) están *acopladas* pues la solución $\vec{r}_1(t)$ depende de $\vec{r}_2(t)$ y viceversa. Para simplificar el problema matemático, que a su vez nos permiitá entender el problema físico, lo que sigue es desacoplar estas dos ecuaciones. Para ello definimos al vector centro de masa $\vec{R}$, a la masa total M, a la coordenada relativa $\vec{r}$ y a la masa reducida μ en términos de los vectores de posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, y de las masas m_1 y m_2 como sigue

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

$$M = m_1 + m_2 \tag{4}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{5}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{6}$$

3. De las ecuaciones anteriores, muestre que $\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}$ y $\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}$. Es decir, que si conocemos $\vec{R}$ y $\vec{r}$, podemos conocer $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$.

4. Muestre que si suma las ecuaciones (1) y (2) e identifica el vector $\vec{R}$, obtiene

$$M\ddot{\vec{R}} = 0 \tag{7}$$

Esta ecuación implica que el centro de masa se mueve con velocidad constante $\dot{\vec{R}} =$ constante. Dado que la elección del origen de un sistema coordenado es arbitraria, podemos escoger un marco de referencia tal que el origen coincida con el vector centro de masa y que se mueva a velocidad $\dot{\vec{R}}$. En ese marco de referencia se tiene $\vec{R} = 0$ y $\dot{\vec{R}} = 0$.

5. Ahora, si resta las ecuaciones (1) y (2), e identifica $\vec{r}$ y μ, obtendrá

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM\mu}{r^2}\hat{r} \tag{8}$$

Esta ecuación representa a un cuerpo imaginario, que no es ni 1 ni 2, de masa μ y que siente una fuerza gravitacional hacia el origen $\vec{r} = 0$, en donde se encuentra otro cuerpo imaginario con la masa total del sistema, M. Dicha fuerza es,

$$\vec{F} = -\frac{GM\mu}{r^2}\hat{r} \tag{9}$$

pero sólo la percibe la masa relativa μ y, aparentemente, no se obedece la Tercera Ley porque la masa M no siente la fuerza de μ. En verdad no existe ningún problema ya que el movimiento de $\vec{r}$ y de $\vec{R}$ son en realidad propiedades del sistema de los cuerpos con masas m_1 y m_2, y no representan a dos cuerpos con masas μ y M. Procure entender bien este punto también.

Como podemos notar, hemos simplificado el problema pues la ecuación del centro de masa (7) es completamente independiente de la del movimiento relativo (8). Es decir, la ecuación para $\vec{R}$ no involucra a $\vec{r}$ y viceversa.

A continuación estudiaremos en detalles el movimiento relativo. Como vimos, el movimiento del centro de masa es trivial.

3. Energía del Movimiento Relativo

Queremos mostrar que la energía del movimiento relativo es constante, esto quiere decir que dicha cantidad no cambia con el tiempo. En otras palabras, que una vez conocida la posición $\vec{r}(t)$ como función del tiempo, sus energía cinética y potencial serán tales que la suma de ambas permanecerá constante.

La energía potencial que corresponde a la fuerza dada en la ecuación (9) es

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{|r_1 - r_2|}. \tag{10}$$

6. Muestre que se cumple que $\vec{F} = -\nabla U(r)$ donde el operador $\nabla f(r)$ de una función escalar $f(r)$ se llama el gradiente de $f(r)$ y se define como $\nabla f(r) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{k}$. Este es un resultado más general: si sabemos la energía potencial de sólo depende del vector $\vec{r}$, entonces, esto corresponde a una fuerza $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$.

La energía total del sistema es la suma de la energía cinética y potencial de los dos cuerpos, esto es

$$E_T = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} - \frac{G m_1 m_2}{|r_1 - r_2|}. \tag{11}$$

7. Sustituya $\dot{\vec{r}}_1^{\,2}$ y $\dot{\vec{r}}_2^{\,2}$ en términos de $\dot{\vec{r}}$ y $\dot{\vec{R}}$ y muestre que

$$E_T = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} - \frac{GM\mu}{|\vec{r}|} \tag{12}$$

donde hemos introducido el momento del centro de masa $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$ y el momento relativo $\vec{p} = \mu\dot{\vec{r}}$. El primer término de E_T es la energía del centro de masa, que es constante pues $\dot{\vec{R}} =$ constante, y ya argüimos que la podemos considerar como cero. La que nos interesa es la otra parte, que es la energía del movimiento relativo,

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} - \frac{GM\mu}{|\vec{r}|}. \tag{13}$$

Note que tanto $\vec{p}$ como $\vec{r}$ dependen del tiempo, por lo tanto, E debería depender también del tiempo. Mostraremos que no, que permanece constante. Esto es muy interesante, veremos que mientras la energía cinética y la potencial cambian, la suma no lo hace. Por lo tanto, existe una permanente conversión entre los dos tipos de energía. Usando el resultado del ejercicio 6, esto nos dice que la energía potencial está asociada a la fuerza, y que es ésta la que cambia la velocidad y la energía cinética del movimiento. Sin energía potencial no hay fuerza y, por lo tanto, la energía cinética es constante.

8. Muestre que la energía se conserva, esto es, calcule la derivada con respecto al tiempo de E y muestre que $\frac{dE}{dt} = 0$. Por lo tanto, si en el instante inicial conocemos el valor de la energía E, este será siempre su valor, sin importar el movimiento que realice el sistema.

4. Momento angular

El momento angular es una cantidad asociada al movimiento de un sistema y, en particular, nos provee información sobre movimientos que involucren rotación. En algunos casos, como el presente, es una cantidad conservada también.

Se define de la siguiente forma

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{14}$$

es decir, es el producto cruz del vector de posición $\vec{r}$ y el vector de momento $\vec{p}$. Dado que el momento angular es una cantidad vectorial, el momento angular del sistema de las dos masas es un vector y es igual a la suma de los correspondiente momentos angulares,

$$\vec{L} = \vec{r_1} \times m_1\dot{\vec{r_1}} + \vec{r_2} \times m_2\dot{\vec{r_2}} \tag{15}$$

9. Sustituya las expresiones de $\vec{r}_1$, $\vec{r_2}$, $\dot{\vec{r_1}}$ y $\dot{\vec{r_2}}$ en esta última ecuación y obtenga una expresión para $\vec{L}$ como función de $\vec{r}$, $\vec{R}$, $\dot{\vec{r}}$ y $\dot{\vec{R}}$. Debe hallar,

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\dot{\vec{R}} + \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}} \tag{16}$$

Pero habíamos establecido que el origen del sistema coordenado coincide con el vector centro de masa, por lo tanto el primer término puede hacerse cero y ello nos conduce a que el momento angular del movimiento relativo,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}} \tag{17}$$

10. Muestre que $\vec{L}$ es una constante del movimiento, esto es muestre que se satisface que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0. \tag{18}$$

Para hacer esta demostración use el hecho que el producto cruz de dos vectores paralelos es igual a cero y que la derivada del producto cruz es

$$\frac{d}{dt}\vec{A} \times \vec{B} = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}. \tag{19}$$

El hecho que el momento angular del sistema de los dos cuerpos sea constante implica que $\vec{L}$ es constante tanto en magnitud como en dirección.

Analicemos primero cuál es la consecuencia del que la dirección del momento angular es constante. Como en el producto cruz $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$, se tiene que $\vec{L}$ es perpendicular tanto a $\vec{r}$ como $\vec{p}$, entonces, dado que la dirección de $\vec{L}$ es constante, se concluye que $\vec{r}$ como $\vec{p}$ siempre están en el mismo plano. Si escogemos, arbitrariamente, la dirección de $\vec{L}$ a lo largo del eje z, es decir $\vec{L} = L\hat{k}$, entonces, concluimos que el movimiento tiene lugar siempre en el plano $x - y$. Este hecho es de importancia fundamental pues significa que en lugar de estudiar el movimiento del sistema tierra-sol en tres dimensiones, su descripción se simplifica considereando que dicho movimiento ocurre en sólo dos dimensiones. Más adelante veremos que el que la magnitud del momento angular también sea constante, implica la Segunda Ley de Kepler.

5. Coordenadas polares

Dada la naturaleza del movimiento en el plano, conviene usar coordenadas polares. Estas son: dado el vector $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$, definimos dos coordenadas r y θ de la siguiente manera, vea la figura (1),

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\theta \\ y &= r\,\sin\theta \end{aligned} \tag{20}$$

o de manera inversa,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{21}$$

Aunque el uso de coordenadas polares puede se muy útil (como en este problema) sí tiene una pequeña complicación y es que los vectores unitarios correspondientes no son constantes, a diferencia de los cartesianos, sino que dependen del ángulo θ. Veamos.

El vector unitario a lo largo de la coordenada r es

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \tag{22}$$

y, por lo tanto cambia de dirección en cada punto (x, y) del plano. Por convención se define el vector $\hat{\theta}$ como aquel vector unitario ortogonal a $\hat{r}$ y que apunta en la dirección en la que se incrementa el ángulo θ, vea la figura 1. Por ser $\hat{\theta}$ ortogonal a $\hat{r}$, también depende del punto (x, y) del plano. La relación entre los vectores unitarios $(\hat{r}, \hat{\theta})$ y $(\hat{\imath}, \hat{\jmath})$ es, vea la figura,

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{\imath}\,\cos\theta + \hat{\jmath}\,\sin\theta \\ \hat{\theta} &= -\hat{\imath}\,\sin\theta + \hat{\jmath}\,\cos\theta. \end{aligned} \tag{23}$$

Compruebe que son ortogonales, es decir, que $\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$.

Lo importante de estas coordenadas es que son tan válidas para describir cualquier vector en el plano $x - y$, como lo son las cartesianas. Por ejemplo, sea un vector arbitrario $\vec{A}(\vec{r})$ que depende del punto $\vec{r}$. Se puede escribir de manera alternativa, aunque única en cada sistema de coordenadas, como

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= A_x(x,y)\hat{\imath} + A_y(x,y)\hat{\jmath} \\ \vec{A}(\vec{r}) &= A_r(r,\theta)\hat{r} + A_\theta(r,\theta)\hat{\theta}. \end{aligned} \tag{24}$$

El que los vectores unitarios polares $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ dependan del ángulo θ, tiene como consecuencia que, cuando los usemos para describir el movimiento de la coordenada relativa $\hat{r}$, dependerán del tiempo.

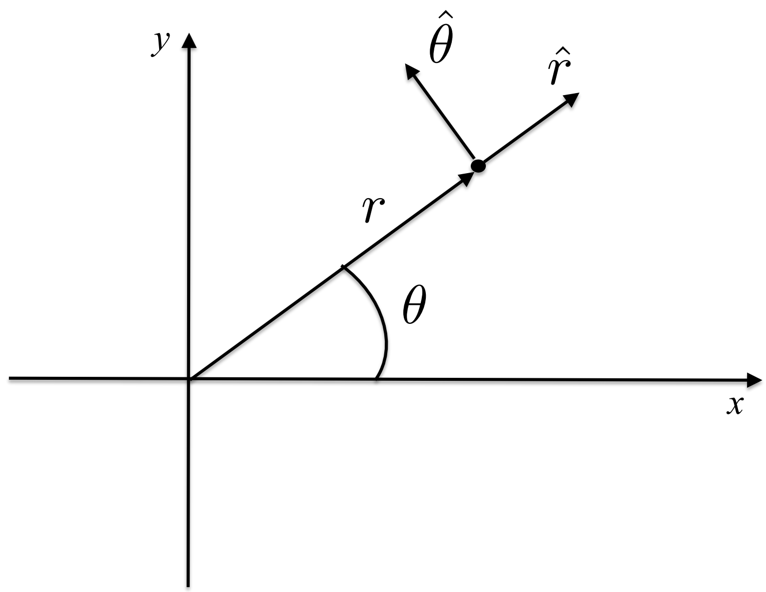

Figura 1: Coordenadas Polares (r, θ). Se indican los vectores unitarios $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$.

11. Suponiendo que el ángulo θ es una función del tiempo, calcule la primera y la segunda derivadas temporales del vector de posicion $\vec{r} = r\hat{r}$. Debe obtener,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \\ \ddot{\vec{r}} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta} \end{aligned} \tag{25}$$

Sustituyamos ahora la aceleración $\ddot{\vec{r}}$ en coordenadas polares en la ecuación de Newton para el movimiento relativo dado por la ec.(8),

$$\mu\left[\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}\right] = -\frac{GM\mu}{r^2}\hat{r} \tag{26}$$

Usando ahora la propiedades de que los vectores unitarios $\hat{r}$y $\hat{\theta}$ son ortogonales, obtenemos (multiplicando la ecuación por $\hat{r}$ y por $\hat{\theta}$),

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \tag{27}$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \tag{28}$$

Estas son las ecuaciones que obedecen las coordenadas r y θ del movimiento relativo en el plano $x - y$. Como estudiaremos a continuación, la ec. (27) es responsable de las Primera y Tercera leyes de Kepler, mientras que la ec.(28)

explica la Segunda ley. Esta última ecuación no es otra cosa que la conservación de la magnitud del momento angular. Verifiquemos esto primero.

El momento angular es,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}}. \tag{29}$$

12. Use la expresión para la velocidad $\dot{\vec{r}}$ dada en la ec. (25) y muestre que

$$\vec{L} = \mu r^2 \dot{\theta}\,(\hat{r} \times \hat{\theta}). \tag{30}$$

Como $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ están en el plano $x - y$, su producto cruz apunta fuera del plano, es decir, $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{k}$, apunta en la dirección z, y es constante. La magnitud del momento angular es, entonces, $L = \mu r^2\dot{\theta}$. En el ejercicio 10 usted ya mostró que $L =$ constante. Por lo tanto $dL/dt = 0$, y derivando L se obtiene la ecuación (28). Verifíquelo.

6. Primera ley de Kepler

Los planetas se mueven describiendo órbitas elípticas, con el sol situado en uno de sus focos.

La Primera Ley de Kepler es la más difícil de obtener. Aqui daremos los pasos suficientes y el trabajo arduo lo hará usted. Recapitulemos. Tenemos la ecuación para el movimiento en r,

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}. \tag{31}$$

Tenemos también que el momento angular es constante, $L =$ constante,

$$L = \mu r^2 \dot{\theta} \tag{32}$$

y tenemos también que la energía es una constante, $E =$ constante, vea la ec. (13). Muestre que esta última ecuación puede escribirse como,

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}. \tag{33}$$

El "truco" matemático es pasar de ecuaciones diferenciales en el tiempo, cuyo resultado sería conocer r y θ como funciones del tiempo, $r = r(t)$ y $\theta = \theta(t)$, a una ecuación para la *trayectoria* (u órbita), es decir a una ecuación para r como función de θ, $r = r(\theta)$. En otras palabras, necesitamos "eliminar" la dependencia en el tiempo t. Procedemos de la siguiente manera:

Suponemos que $r = r(\theta(t))$, es decir, r es función de θ y θ es función del tiempo t. Entonces, si derivamos r con respecto a t, usando la regla de la cadena, obtenemos,

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}. \tag{34}$$

Sin embargo, usando la conservación del momento angular,

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{\mu r} \tag{35}$$

es decir, la derivada $\dot{\theta} = L/\mu r^2$ y la derivada $\dot{r}$ la reemplazamos por (35).

13. Encuentre una expresión para la segunda derivada en el tiempo $\ddot{r}$ en términos de derivadas de r con respecto a θ, de r y de L. Debe hallar,

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{\mu^2 r^4}\frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2L^2}{\mu r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2. \tag{36}$$

¡Y ahora sí viene lo arduo!

14. Combinando todas las ecuaciones de esta sección, muestre que se obtiene la siguiente ecuación diferencial para r como función de θ,

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{4El}{GM\mu}\left(\frac{r^3}{l^2}\right) + r - \frac{r^2}{l} = 0, \tag{37}$$

donde

$$l = \frac{L^2}{GM\mu^2} \tag{38}$$

es una cantidad constante con unidades de longitud.

15. Muestre que

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \epsilon\cos\theta} \tag{39}$$

es solución de la ecuación diferencial (37), donde

$$\epsilon = \left(1 + \frac{2lE}{GM\mu}\right)^{1/2} \tag{40}$$

es una cantidad sin unidades. Haga su cálculo "simplemente"sustituyendo la solución (39) en la ecuación (37) ... es un trabajo edificante ¡hágalo! ... esto fue lo que hizo Newton en persona.

La solución $r = r(\theta)$ dada por (39) es la ecuación de las llamadas secciones cónicas, que para $l > 0$, corresponden a un círculo $\epsilon = 0$, una elipse $0 < \epsilon < 1$, una parábola $\epsilon = 1$ y una hipérbola $\epsilon > 1$. Tales figuras tienen a uno de sus focos en el origen, es decir, donde se encuentra el centro de masa y de donde "emana" la fuerza gravitacional para el cuerpo de masa reducida. Al parámetro l se le llama el *semilado recto* y a ϵ la *excentricidad*. La verificación de estas propiedades geométricas concierne al curso de geometría analítica.

Notamos que las órbitas circulares y elípticas describen movimientos planetarios y de satélites, mientras que las parábolas asemejan comportamientos de cometas (aunque también podrían ser elipses con un semi-eje mayor enorme). Además, de la ecuación (40) hallamos que las órbitas circulares y elípticas, que son las cerradas, corresponden a energías negativas; las parabólicas a energía cero; y las hiperbólicas a energías positivas. En particular, para la órbita circular, tenemos que el semilado recto es el radio de la órbita $r_0 = l$, y como $\epsilon = 0$, la energía tiene una forma muy simple que puede deducirse sin tanto trabajo,

$$E = -\frac{GM\mu}{2r_0} \qquad \text{orbita circular.} \tag{41}$$

En su clase de geometría analítica aprenderá los siguientes aspectos relacionados con las propiedades de una elipse. Vea la figura 2.

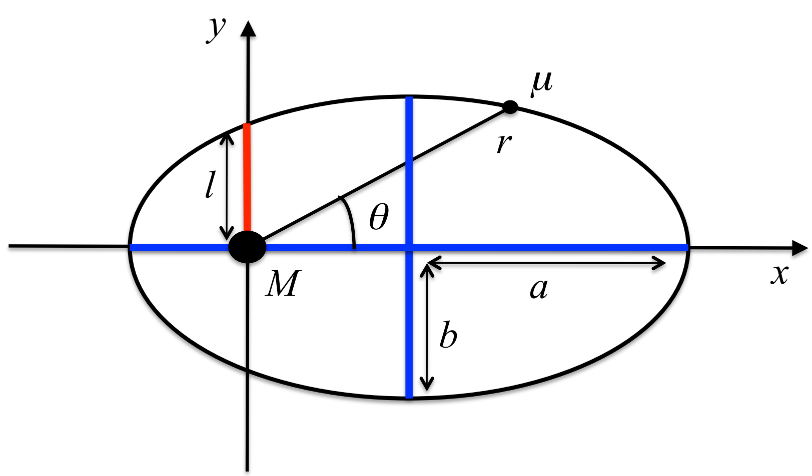

Figura 2: Elipse con un foco en el origen. La masa total M está en un uno de los focos. La masa reducida μ tiene coordenadas polares (r, θ). Se muestran el semieje mayor a, el semieje menor b y el lado recto l.

Para una elipse, $\theta = \pi$ es el acercamiento mínimo, el perihelio, y da

$$r_{min} = \frac{l}{1+\epsilon}. \tag{42}$$

El afelio es $\theta = 0$ y es el alejamiento máximo,

$$r_{max} = \frac{l}{1-\epsilon}. \tag{43}$$

El semilado recto ocurre a $\theta = \pi/2$. Además, la elipse tiene, con obvia notación, un semieje menor b y un semieje mayor a. Muestre que estos están dados por,

$$a = \frac{l}{1-\epsilon^2} \qquad b = \frac{l}{\sqrt{1-\epsilon^2}}. \tag{44}$$

Muestre que el área de una elipse es

$$A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-\epsilon^2} \tag{45}$$

y que el semilado recto es,

$$l = a(1-\epsilon^2). \tag{46}$$

Para el caso de un círculo de radio r_0, $\epsilon = 0$, y $a = b = l = r_0$.

Sin embargo, cómo hemos insistido, las ecuaciones para $\vec{r}$ y $\vec{R}$ son una ayuda al problema real de los dos cuerpos de masa m_1 y m_2. Supongamos ahora que $m_1 = M_T$ es la Tierra y $m_2 = M_S$ es el Sol. Notamos lo siguiente inmediatamente, ¡el Sol es aproximadamente 5×10^5 veces más masivo que la Tierra!, es decir $M_S \gg M_T$. Veamos que implica esto.

Renombrando las variables, 1 es Tierra y 2 es Sol, obtenemos lo siguiente, mostrando el valor aproximado que tienen despreciando factores M_T/M_S con respecto a 1:

i) masa total:

$$\begin{aligned} M &= M_S + M_T \\ &= M_S\left(1 + \frac{M_T}{M_S}\right) \quad \Longrightarrow \\ M &\approx M_s \end{aligned} \tag{47}$$

ii) posición del Sol

$$\begin{aligned} \vec{r}_S &= \vec{R} - \frac{M_T}{M_S + M_T}\vec{r} \\ &\approx \vec{R} - \frac{M_T}{M_S}\vec{r} \quad \Longrightarrow \\ \vec{r}_S &\approx \vec{R}. \end{aligned} \tag{48}$$

Hallamos que la posición del centro de masa es aproximadamente la posición del Sol y, de la misma manera, la masa total es aproximadamente la masa del Sol.

ii) masa reducida:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{M_S M_T}{M_S + M_T} \\ &= \frac{M_S M_T}{M_S\left(1 + \frac{M_T}{M_S}\right)} \quad \Longrightarrow \\ \mu &\approx M_T \end{aligned} \tag{49}$$

ii) posición de la Tierra:

$$\begin{aligned}\vec{r}_T &= \vec{R} + \frac{M_S}{M_S + M_T}\vec{r} \\ &\approx \vec{R} + \frac{M_S}{M_S}\vec{r} \implies \\ \vec{R}_T &\approx \vec{R} + \vec{r}. \end{aligned} \tag{50}$$

La masa de la Tierra es aproximadamente la masa reducida y la posición de la Tierra es la posición relativa medida desde la posición del Sol.

Si ahora consideramos que el centro de masa está en el origen $\vec{R} = 0$, entonces la masa total es la del Sol y su posición es el origen $\vec{R}_S = 0$; por otro lado, la posición y masa relativas son las de la Tierra, $\mu = M_T$ y $\vec{R}_T = \vec{r}$.

Con esta aproximación se demuestra la Primera Ley de Kepler, pues hallamos que si la excentricidad es $0 < \epsilon < 1$, la órbita de la Tierra es una elipse, con el Sol (aproximadamente) en uno de los focos. Note que en esta aproximación la Tierra siente el efecto del Sol pero se desprecia el efecto contrario.

16. Investigue las excentricidades de las órbitas de los planetas Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. Investigue también las distancias medias de dichos planetas al Sol, así como el radio del Sol. Encuentre en cada caso la posición media del centro del Sol, suponiendo que el centro de masa en cada caso está en el origen.

7. Segunda Ley de Kepler.

La línea que une a un planeta y al Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales.

Este enunciado no es mas que la conservación del momento angular y, por lo tanto, es válida no sólo para elipses sino para todas la secciones cónicas. Véamos.

Considere que en un instante dado el planeta esta en el punto (r, θ) de la órbita. Un tiempo Δt después estará en el punto (aproximado) por $(r, \theta + \Delta\theta)$. El área ΔA que barrió en el tiempo Δt, se puede aproximar por un triángulo, vea la figura 3,

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r\, r \Delta\theta. \tag{51}$$

Por lo tanto la "velocidad" de área, es decir, la tasa con la barre esa área es

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \tag{52}$$

Note que el lado derecho depende del punto de la órbita pues r depende de θ. Sin embargo, el lado derecho no es mas que $L/2\mu$, vea la ec. (32), que sabemos

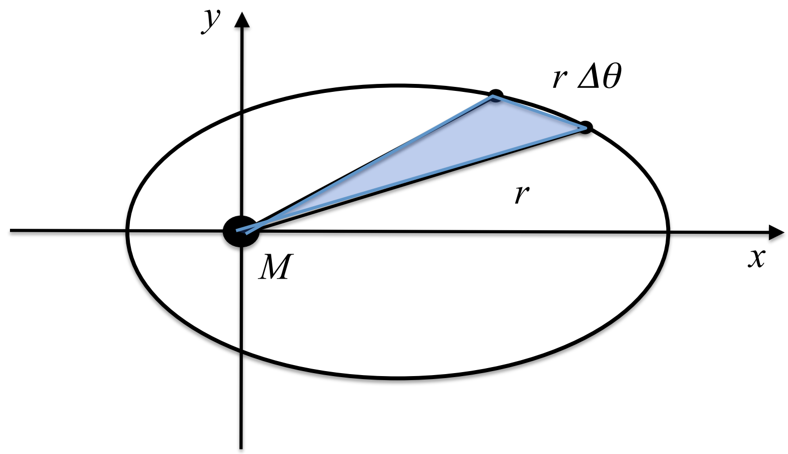

Figura 3: El área del segmento en azul es $\Delta A \approx \frac{1}{2} r \, r\Delta\theta$, aproximándolo como un triángulo. En el límite infinitesimal es exacto, $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$.

que es constante por conservación de momento angular. Por lo tanto $\Delta A/\Delta t$ es una constante sin importar el punto de la órbita. En el límite infinitesimal,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu}. \tag{53}$$

Es decir, la velocidad del ‡́rea barrida por la masa reducida es una constante, por lo tanto, en intervalos de tiempos iguales se barren áreas iguales.

8. Tercera Ley de Kepler.

El cuadrado del periodo de la órbita es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita.

Esta sigue de una combinación de los resultados de la Primera y de la Segunda. Usando la ecuación (53) la integramos en un periodo τ en el que se recorre el área completa A,

$$\begin{aligned} \int_A dA &= \frac{L}{2\mu} \int_\tau dt \\ A &= \frac{L}{2\mu} \tau. \end{aligned} \tag{54}$$

Usamos las ecuaciones (38), (45) y (46),

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2\mu A}{L} \\ &= 2\mu\pi \frac{a^2\sqrt{1-\epsilon^2}}{\sqrt{\mu^2 G M a(1-\epsilon^2)}}. \end{aligned} \tag{55}$$

Elevando al cuadrado ambos términos y cancelando términos iguales, hallamos,

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3, \tag{56}$$

Note un detalle muy interesante. Esta expresión nos dice que la constante de proporcionalidad $4\pi^2/GM$ ¡no es la misma constante para todos los planetas! debido a que aparece la masa total $M = M_S + M_P$, donde M_P es la masa del planeta en cuestión. Por lo tanto, la Tercera Ley de Kepler, estrictamente no es correcta. Lo es sólo si aproximamos la masa total como la masa del Sol, $M \approx M_S$, es decir, si despreciamos la masa del planeta con respecto a la del Sol.