Introducción a la Física Cuántica
Víctor Romero Rochín

La delta de Dirac

En clase discutimos que la función delta de Dirac es, en realidad, una distribución que obedece las dos siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \tag{1}$$

y, si $f(x)$ es una función anáitica en x_0, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0). \tag{2}$$

Las propiedades anteriores sugieren que se considere a la delta de Dirac como la "función",

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ \infty & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

Sin embargo, esta forma no es más que una manera simbólica de la función; las propiedades de la delta de Dirac son las dadas por las ecuaciones (1) y (2).

Aunque existen muchas formas de representar a la delta de Dirac, en nuestro curso de Física Cuántica usaremos la siguiente forma:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)} dk. \tag{4}$$

El propósito de estas notas es ofrecer una demostración no del todo rigurosa de la expresión anterior, ec.(4). Para esto, consideremos la siguiente función:

$$\Delta_\epsilon(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\epsilon}^{1/\epsilon} e^{ik(x-x_0)} dk, \tag{5}$$

cuya integral puede hacerse, dando,

$$\Delta_\epsilon(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left((x - x_0)/\epsilon\right)}{x - x_0}, \tag{6}$$

de tal manera que, en el límite $\epsilon \to 0$, tienda a la delta de Dirac; es decir, queremos demostrar que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Delta_\epsilon(x - x_0) = \delta(x - x_0). \tag{7}$$

Para esto, definamos las siguientes dos integrales:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{\epsilon \to 0} \Delta_\epsilon(x - x_0) \right] dx \tag{8}$$

y

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\lim_{\epsilon \to 0} \Delta_\epsilon(x - x_0) \right] dx \tag{9}$$

La meta es mostrar que $I_1 = 1$ y $I_2 = f(x_0)$.

La integral I_1

Tanto para esta integral como la anterior, el "truco" es tener cuidado con los límites. Notamos que la integral I_1 se puede escribir como

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{\epsilon \to 0} \Delta_\epsilon(x - x_0) \right] dx \\ &= \lim_{L \to \infty} \int_{-L+x_0}^{L+x_0} \left[\lim_{\epsilon \to 0} \Delta_\epsilon(x - x_0) \right] dx, \end{aligned} \tag{10}$$

donde los límite se escogen de tal manera que x_0 quede dentro de la integral. La integral de la última línea converge si L y ϵ son finitas. Por lo tanto, podemos "meter" la integral sobre x dentro del límite de ϵ:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{L \to \infty} \int_{-L+x_0}^{L+x_0} \left[\lim_{\epsilon \to 0} \Delta_\epsilon(x - x_0) \right] dx \\ &= \lim_{L \to \infty} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-L+x_0}^{L+x_0} \Delta_\epsilon(x - x_0) dx \\ &= \lim_{L \to \infty} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-L+x_0}^{L+x_0} \frac{\sin\left((x - x_0)/\epsilon\right)}{x - x_0} dx. \end{aligned} \tag{11}$$

Ahora hacemos el siguiente cambio de variable $y = (x - x_0)/\epsilon$ y obtenemos,

$$I_1 = \lim_{L \to \infty} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-L/\epsilon}^{L/\epsilon} \frac{\sin y}{y} dy \tag{12}$$

Tomando el límite $\epsilon \to 0$, da lugar a,

$$I_1 = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy. \tag{13}$$

La anterior integral puede hacerse (hágala!),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \pi \tag{14}$$

Por lo tanto, independiente del límite $L \to \infty$, hallamos el resultado deseado,

$$I_1 = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\pi}\pi = 1 \quad \textbf{QED}. \tag{15}$$

La integral I_2

De forma similar al caso anterior, podemos escribir la integral I_2 como,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\lim_{\epsilon\to 0} \Delta_\epsilon(x-x_0)\right] dx \\ &= \lim_{L\to\infty} \int_{-L+x_0}^{L+x_0} f(x)\left[\lim_{\epsilon\to 0} \Delta_\epsilon(x-x_0)\right] dx, \end{aligned} \tag{16}$$

y, de nuevo, para L y ϵ finitas, la integral converge y podemos escribir:

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{L\to\infty} \int_{-L+x_0}^{L+x_0} f(x)\left[\lim_{\epsilon\to 0} \Delta_\epsilon(x-x_0)\right] dx \\ &= \lim_{L\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-L+x_0}^{L+x_0} f(x)\Delta_\epsilon(x-x_0)dx \\ &= \lim_{L\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-L+x_0}^{L+x_0} f(x)\frac{\sin\left((x-x_0)/\epsilon\right)}{x-x_0}dx. \end{aligned} \tag{17}$$

Como $f(x)$ es analítica en x_0, la desarrollamos en serie de Taylor alrededor de x_0:

$$I_2 = \lim_{L\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-L+x_0}^{L+x_0} \left[f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0} (x-x_0)^n\right] \frac{\sin\left((x-x_0)/\epsilon\right)}{x-x_0}dx \tag{18}$$

Haciendo el cambio de variable $z = x - x_0$, podemos reescribir:

$$\begin{aligned} I_2 = {} & f(x_0) \lim_{L\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} \frac{\sin(z/\epsilon)}{z} dz + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0} \lim_{L\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} z^n \frac{\sin(z/\epsilon)}{z} dz \end{aligned} \tag{19}$$

La primera integral es igual a 1, por la discusión de la integral I_1. El segundo término en I_2 depende de las integrales,

$$\mathcal{I}_n = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-L}^{L} z^n \frac{\sin(z/\epsilon)}{z} dz \quad \forall \; n = 1, 2, 3, \ldots, \infty. \tag{20}$$

Mostraremos ahora que $\mathcal{I}_n = 0$ para toda n. Primero, la integral es cero si n es impar pues el integrando es impar también en ese caso. Para $n = 2m$ par, la integral es

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{2m} &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-L}^{L} z^{2m} \frac{\sin(z/\epsilon)}{z} dz \\ &= 2 \lim_{\epsilon \to 0} \int_{0}^{L} z^{2m-1} \sin(z/\epsilon)\, dz. \end{aligned} \tag{21}$$

Esta integral puede realizarse por partes: haciendo $u = z^{2m-1}$ y $dv = \sin(z/\epsilon)$, se obtiene (hágalo!),

$$\mathcal{I}_{2m} = 2 \lim_{\epsilon \to 0} \left[-(2m-1)\epsilon L^{2m-2} \cos(L/\epsilon) + (2m-1)\epsilon \int_0^L z^{2m-2} \cos(z/\epsilon)\, dz \right]. \tag{22}$$

Haciendo integrales por partes de manera sucesiva $(2m-1)$-veces, hallamos,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{2m} &= 2 \lim_{\epsilon \to 0} \Big[-(2m-1)\epsilon L^{2m-2} \cos(L/\epsilon) + (2m-1)(2m-2)\epsilon^2 L^{2m-3} \sin(L/\epsilon) + \\ &\quad \ldots + (2m-1)(2m-2)\cdots 1 \cdot \epsilon^{2m-1} \int_0^L \cos(z/\epsilon)\, dz \Big] \end{aligned} \tag{23}$$

Debido a que las funciones seno y coseno están acotadas, observamos que cada uno de los términos se hacen cero conforme $\epsilon \to 0$, para L finita. Por lo tanto, verificamos que $\mathcal{I}_n = 0$ para toda $n \geq 1$. Regresando a la expresión (19) para I_2, efectivamente hallamos que,

$$I_2 = f(x_0) \quad \textbf{QED}. \tag{24}$$

Es decir, concluimos que la expresión (4) representa a la delta de Dirac.

NOTA: En las dos demostraciones anteriores hallamos que el límite $L \to \infty$ resultó superfluo. Esto no debería sorprendernos ya que, en su forma más general, las propiedades de la delta de Dirac se escriben como,

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_0 \in [a, b] \\ 0 & \text{si} \quad x_0 \notin [a, b] \end{cases} \tag{25}$$

y

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{si} \quad x_0 \in [a, b] \\ 0 & \text{si} \quad x_0 \notin [a, b] \end{cases} \tag{26}$$

Es decir, que sólo se necesita que el punto x_0 esté contenido dentro del intervalo de integración, sin importar el tamaño de dicho intervalo. Para nuestro curso la forma útil es cuando $a \to -\infty$ y $b \to \infty$.