Introducción a la Física Cuántica
Tercer Examen Parcial

Jueves 29 de noviembre de 2018

A entregar al INICIO de la clase, 10 AM, del viernes 30 de noviembre de 2018
NO SE ACEPTARAN DESPUES DE ESA HORA

Problema 1. Momento angular y energía en el átomo de Hidrógeno.

a) Muestre que el siguiente conmutador es cierto:

$$[f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}), \hat{p}_x] = -\hat{p}_x f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

donde $f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ es una función de los operadores $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$; y $\hat{p}_x$ es el operador del momento en la dirección x.

Sugerencia: Aplique el conmutador a una función de onda arbitraria $\psi(x, y, z)$ y muestre que el conmutador puede escribirse, en la representación de la posición, como:

$$[f(x, y, z), \hat{p}_x] = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$$

Note que el resultado es análogo si cambiamos $\hat{p}_x$ por $\hat{p}_y$, o por $\hat{p}_z$.

b) Considere ahora el átomo de Hidrógeno, cuyo Hamiltoniano está dado por (donde todas las cantidades son operadores)

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$

donde $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ y $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

El operador de momento angular está dado por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Muestre que

$$[H, L_y] = 0.$$

c) Arguya que el resultado anterior es válido si L_y se cambia por L_x o por L_z. Muestre entonces que

$$\left[H, L^2\right] = 0$$

donde $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$.

Recuerde que

$$[x, p_x] = [y, p_y] = [z, p_z] = i\hbar$$

y que cualquier otro conmutador entre esos operadores es cero.

La siguiente identidad podría serle útil:

$$[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B$$

Problema 2. Evolución de un sistema de dos niveles

Suponga un sistema de dos niveles, cuyo Hamiltoniano está dado,

$$H = \frac{\hbar\omega_x}{2}\,\sigma_x + \frac{\hbar\omega_y}{2}\,\sigma_y$$

donde σ_x y σ_y son las matrices x y y de Pauli.

Inicialmente, $t = 0$, el sistema se encuentra en el estado $|\psi\rangle = |-\rangle$ donde $|-\rangle$ es el eigenestado de la matriz de Pauli σ_z con eigenvalor $-$, es decir, $\sigma_z|-\rangle = -|-\rangle$.

(a) Encuentre la probabilidad de que, si se mide el operador σ_z, lo hallemos con eigenvalor $+$ al tiempo t. Recuerde que $|+\rangle$ es el eigenestado de σ_z, con $\sigma_z|+\rangle = +|+\rangle$. Realice un bosquejo de dicha probabilidad como función del tiempo.

(b) Calcule el valor de expectación de σ_z al tiempo t. Realice un bosquejo de su resultado como función del tiempo.

Las matrices de Pauli son,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$