Introducción a la Física Cuántica
Tarea 7

A entregar: Miércoles 28 de noviembre de 2018

Spin y sistemas de dos estados

Prob. 31. Matrices de momento angular $j = 1$.

En clase discutimos que para cada valor de momento angular o spin $j = 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, \ldots$, existen espacios de Hilbert de matrices 2×2, para $j = 1/2$; 3×3 para $j = 1$; 4×4 para $j = 3/2$, etc. En todos esos espacios se definen las matrices correspondientes a los operadores de momento angular $\hat{\vec{J}} = \mathbf{i}\hat{J}_x + \mathbf{j}\hat{J}_y + \mathbf{k}\hat{J}_z$, con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ vectores unitarios cartesianos. Se acostumbra usar la letra "J" para denotar momento angular para incluir tanto al momento angular orbital como al spin. El que los operadores $\hat{\vec{J}}$ sean de "momento angular" es porque obedecen el siguiente álgebra:

$$\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = i\hbar J_z \qquad \left[\hat{J}_z, \hat{J}_x\right] = i\hbar\hat{J}_y \qquad \left[\hat{J}_y, \hat{J}_z\right] = i\hbar\hat{J}_x \tag{1}$$

y

$$\left[\hat{J}^2, \hat{J}_x\right] = 0 \qquad \left[\hat{J}^2\hat{J}_y\right] = 0 \qquad \left[\hat{J}^2, \hat{J}_z\right] = 0, \tag{2}$$

con $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$.

Usando $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_z$ como conjunto completo de operadores, la base del subespacio de Hilbert $(2j+1)\times(2j+1)$, con $j = 1/2, 1, 3/2, 25/2, 3, \ldots$, es, en notación de Dirac,

$$\hat{J}^2|j,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|j,m\rangle \qquad \hat{J}_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle \tag{3}$$

con $m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j$, un total de $(2j+1)$ valores.

Para $j = 1$, las matrices correspondientes son,

$$\hat{J}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{J}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{J}_y = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

a) Escriba la representación en forma de vector columna de los estados base $|1,1\rangle$, $|1,0\rangle$ y $|1,-1\rangle$.

b) Muestre explícitamente que las matrices $j = 1$ obedecen las expresiones (1), (2) y (3).

Prob. 32. Matrices de Pauli como una base de matrices Hermitianas 2×2.

Considere la siguiente matriz 2×2:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{5}$$

a) Escriba las condiciones que deben satisfacer los elementos de matriz a_{ij} para que la matriz $\hat{A}$ sea Hermitiana.
b) Muestre que si $\hat{A}$ es Hermitiana, se puede escribir como,

$$\hat{A} = \alpha\hat{1} + \beta\sigma_x + \gamma\sigma_y + \delta\sigma_z \tag{6}$$

donde $\hat{1}$ es la matriz unidad 2×2 y σ_n, con $n = x, y, z$ son las matrices de Pauli. Identifique los coeficientes α, β, γ y δ en términos de los elementos de matriz a_{ij}.

Prob. 33. Diagonalización de matrices 2×2 como "rotaciones" en el espacio de Hilbert.

a) Considere la siguiente matriz:

$$\hat{U} = e^{-i\sigma_y\theta/2} \tag{7}$$

Muestre que se puede escribir como:

$$\hat{U} = \hat{1}\cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_y \sin\frac{\theta}{2} \tag{8}$$

Note que puede obviar el factor $\hat{1}$. Muestre además que $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{1}$. A las matrices que su inversa es igual a su hermitiana conjugada se les llama *unitarias*. **Sugerencia:** Para resolver este inciso, muestre que $\sigma_y^2 = \hat{1}$ ... y lo mismo para las otras 2 matrices de Pauli.

b) Considere ahora la siguiente matriz,

$$\hat{H} = a\sigma_z + b\sigma_x \tag{9}$$

con a y b reales. Muestre que se puede escribir como

$$\hat{H} = R \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{10}$$

Identifique R y $\cos\theta$ en términos de a y b.

c) Diagonalice la matriz $\hat{H}$, es decir, encuentre sus eigenestados y sus eigenvalores.

d) Considere ahora la matriz

$$\begin{aligned} \hat{K} &= R\sigma_z \\ &= R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

Obviamente, los eigenvalores son $\pm R$ y los eigenestados son,

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Muestre que $\hat{H}$ del inciso anterior y $\hat{K}$ están relacionados por,

$$\hat{H} = e^{-i\sigma_y\theta/2}\hat{K}e^{i\sigma_y\theta/2} \tag{13}$$

y que los eigenestados de $\hat{H}$ están dados por,

$$e^{-i\sigma_y\theta/2}|+\rangle \quad \text{y} \quad e^{-i\sigma_y\theta/2}|-\rangle. \tag{14}$$

Concluimos que la matriz U representa una "rotación" positiva (contraria a las manecillas del reloj), por un ángulo θ, alrededor del eje y: es decir, usted mostró que,

$$e^{-i\sigma_y\theta/2}\sigma_z e^{i\sigma_y\theta/2} = \sigma_z\cos\theta + \sigma_x\sin\theta. \tag{15}$$

Intente el caso general (no tiene que entregarlo). Considere la matriz,

$$\hat{B} = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z \tag{16}$$

con x, y y z reales. Encuentre la matriz de rotación $\hat{U}$ tal que

$$\hat{B} = R\hat{U}\sigma_z\hat{U}^\dagger \tag{17}$$

con $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ... si usted aprende a usar estas matrices $\hat{U}$, nunca jamás tendrá que diagonalizar matrices 2×2! ... le será muy útil.

Probs. 34 y 35. Oscilaciones de Rabi

Considere el siguiente problema (muy realista!): Sea un cristal con átomos con spin $s = 1/2$. El material se encuentra en presencia de un campo magnético uniforme en la dirección z, $\vec{B}_0 = B_0\mathbf{z}$. Al mismo tiempo se le hace incidir al material una onda electromagnética clásica de frecuencia ω y polarizada de tal manera que el campo magnético de la onda apunta en una dirección $\mathbf{b}$ perpendicular a $\mathbf{z}$, es decir, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{z} = 0$. Suponiendo que los spines no interactúan entre ellos (por ejemplo, para un material paramagnético), podemos considerar un sólo átomo para analizar el problema. En ese caso, el spin del átomo percibe a la onda electromagnética como un campo magnético oscilante, $\vec{B}_{EM} = \mathbf{b}B\cos(\vec{k} \cdot r_n - \omega t)$, donde $\vec{r}_n$ es la posición del átomo en el cristal. Como la vibración del átomo en el cristal es muy pequeña, podemos considerar la posición $\vec{r}_n$ como constante e ignorarla. Es decir, podemos suponer que el campo magnético de la onda es $\vec{B}_{EM} \approx \mathbf{b}B\cos(\omega t)$.

El propósito del problema es estudiar las transiciones entre los estados del spin, inducidas por la onda electromagnética ... Este modelo fue usado por Isaac Rabi en sus estudios experimentales de resonancia magnética nuclear por los que recibió el Premio Nobel en 1944. Este modelo es la base no sólo de la comprensión de las resonancias de spin, sino de muchos más estudios de la física atómica y de la óptica cuántica.

El Hamiltoniano de un spin en presencia de estos campos magnéticos (en la llamada "aproximación de onda rotante") se puede escribir como,

$$\hat{H}(t) = g\mu_B B_0\sigma_z + g\mu_B B\sigma_x \cos\omega t + g\mu_B B\sigma_y \sin\omega t \tag{18}$$

Suponga primero que la onda electromagnética no está presente, es decir, hacemos $B = 0$ en la expresión anterior y obtenemos que el Hamiltoniano $\hat{H}(t)$ (denotado $\hat{H}_0$ cuando $B = 0$), es

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\Delta E_0\, \sigma_z \tag{19}$$

donde $\Delta E_0 = 2g\mu_B B_0$ es la separación de energía de los estados $|-\rangle$ y $|+\rangle$.

Al tiempo inicial $t = 0$, el estado del sistema es $|\psi(0)\rangle = |-\rangle$ y a partir de ese instante incide la onda electromagnética. El propósito es hallar el estado al tiempo t, $|\psi(t)\rangle$, en presencia de la onda electromagnética, y calcular la probabilidad de hallar al sistema en el estado $|+\rangle$ como función del tiempo y como función de la magnitud del campo B y como función de la frecuencia ω.

El problema es, pues, resolver la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle \tag{20}$$

con condición inicial $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ ... El problema técnico es que en esta ecuación el Hamiltoniano depende del tiempo y, por lo tanto,

$$|\psi(t)\rangle \neq e^{-i\hat{H}(t)t/\hbar}|\psi(0)\rangle \tag{21}$$

a) Verifique que el enunciado de la ecuación (21) es cierto, es decir, suponga igualdad en dicha ecuación y muestre que no es solución a (20).

Existe un "truco" para resolver el problema. Definimos una transformación del estado $|\psi(t)\rangle$ como,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\sigma_z\, \omega t/2\hbar}|\tilde{\psi}(t)\rangle \tag{22}$$

o equivalentemente como,

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{i\sigma_z\, \omega t/2\hbar}|\psi(t)\rangle. \tag{23}$$

b) Muestre que la ecuación de Schrödinger que obedece el estado transformado $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ es,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\psi}(t)\rangle = \hat{H}_T|\tilde{\psi}(t)\rangle \tag{24}$$

donde el Hamiltoniano $\hat{H}_T$ **no depende del tiempo** y está dado por:

$$\hat{H}_T = -\frac{\hbar}{2}\left(\omega - \frac{\Delta E}{\hbar}\right)\sigma_z + g\mu_B B\sigma_x \tag{25}$$

Muestre también que el estado inicial es $|\tilde{\psi}(0)\rangle = |-\rangle$. **Sugerencia:** Puede usar los resultados del Prob. 32.

c) Resuelva la evolución temporal del estado transformado $|\tilde{\psi}(t)\rangle$, es decir, notando que podemos escribir,

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle \tag{26}$$

halle explícitamente los coeficientes $a_+(t)$ y $a_-(t)$.

d) Regresando al problema original, es decir, al estado $|\psi(t)\rangle$, encuentre la probabilidad de hallar al sistema en el estado $|+\rangle$ al tiempo t (dado que inició en $|-\rangle$). Llámela $P_{-+}(t)$.

e) Muestre que la probabilidad de transición $P_{-+}(t)$ es siempre menor que 1 si $\omega \neq \Delta E/2$ y que $P_{-+}(t)$ oscila entre 0 y 1 sólo si $\omega = \Delta E/2$, es decir, cuando la frecuencia ω de la onda electromagnética es igual a la diferencia de energía ΔE (dividida por $\hbar$) del Hamiltoniano $\hat{H}_0$, producido por el campo uniforme en z. Al fenómeno de lograr una transición de un estado ($|-\rangle$) a otro ($|+\rangle$), con probabilidad 1, se le llama *resonancia*.

f) Para el caso de resonancia, es decir, $\omega = \Delta E/2$, grafique $P_{-+}(t)$ y encuentre la frecuencia ω_R con la que dicha probabilidad oscila entre 0 y 1. Estas son la oscilaciones de Rabi y ω_R se llama la frecuencia de Rabi.

Probs. 36. La constante de Planck y el kilogramo. OPCIONAL PARA MEJORAR CALIFICACION

El día de hoy (16 de noviembre de 2018), la Comisión Internacional de Pesas y Medidas votó unanimemente que la "constante" de Planck es ya una verdadera constante fundamental, con un valor exacto:

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

Esto tiene como consecuencia que el kilogramo queda redefinido usando una balanza de Kibble. Realice una pequeña investigación del funcionamiento de dicha balanza y de cómo, con la constancia de h, se puede medir el peso de cualquier cuerpo con una enorme precisión. Haga un breve reporte (mínimo 2 cuartillas) de su investigación. Para explicar lo anterior necesitará conocer también un poco sobre el efecto Josephson y el efecto Hall cuántico. Dedíquele un párrafo, al menos, a cada uno de estos conceptos.