

Radiación de Cuerpo Negro - Gas de fotones

Víctor Romero Rochín

Instituto de Física. Universidad Nacional Autónoma de México.

Apartado Postal 20-364, 01000 México, D.F., Mexico

(Dated: February 26, 2015)

Notas sobre la termodinámica y la física estadística de la radiación de cuerpo negro.

I. INTRODUCCIÓN, HISTORIA, RELEVANCIA

Es una observación experimental que todos los cuerpos reflejan, absorben y emiten radiación electromagnética. La emisión es más evidente mientras mayor sea la temperatura del cuerpo. Los ejemplos más comunes son el fuego, los focos, las estrellas, es decir, cuerpos que están calientes. Los humanos emitimos radiación infrarroja que no podemos ver, pero ahora con las tecnologías modernas sabemos que es así. El ejemplo más claro de absorción lo podemos observar en los hornos de microondas: el agua absorbe fuertemente esas ondas, convierte la energía recibida en energía cinética rotacional de sus moléculas y se calienta.

Porque los cuerpos emiten y absorben radiación tiene su explicación última en el hecho de que la materia está compuesta de átomos y moléculas. Estas entidades son las que absorben y emiten la radiación por medio de un proceso que es la esencia de la mecánica cuántica, que a su vez es la teoría que nos explica el comportamiento de nuestro Universo. Este hecho, sin embargo, no es ni obvio ni evidente, e históricamente llegar a esta conclusión fue acompañado de una serie de diferentes resultados que aún ahora nos parecen contradictorios.

Brevemente podemos resumir la historia recordando que I. Newton supuso que la luz estaba compuesta de corpúsculos, teoría con la cual las observaciones que realizaba, como las sombras, la refracción y la descomposición de la luz entre otras, podían explicarse. Pasaron más de cien años para que científicos como T. Young y A. Fresnel mostraran claramente que la luz era una onda. Este trabajo finalmente concluyó con la deducción de las ecuaciones de J.C. Maxwell en los 1850's, que son las que rigen el electromagnetismo, y que tienen como consecuencia y predicción fundamental que la luz es una forma de radiación electromagnética. Con los trabajos de H. Hertz y H. Lorentz, se llegó a la conclusión que eran las cargas en movimiento acelerado las responsables de la emisión de la luz. A su vez, siendo la luz un campo electromagnético, resultaba evidente que este último podía ceder su energía a las cargas mismas. De manera paralela, a mediados del Siglo XIX, como consecuencia del establecimiento de la termodinámica, que estudia las transformaciones de la energía de los cuerpos macroscópicos en forma de calor y trabajo, se comprendió que era posible establecer un equilibrio termodinámico entre la materia y la radiación electromagnética por medio de procesos de emisión y absorción de ésta por los cuerpos materiales. Aun sin conocer los detalles de tales procesos, se llegó a varios resultados fundamentales, entre otros por G. Kirchhoff, que indicaban que había algo sutil y crucial entre la interacción de la materia con

la radiación y que debería ser entendido.

Fue Max Planck quien finalmente, basado en resultados experimentales muy finos para la época, así como en trabajos teóricos por W. Wein y L. Boltzmann, abrió la puerta a un nuevo mundo, el mundo cuántico que confronta de manera fundamental al mundo clásico hasta entonces aceptado, y que requiere de manera forzosa no sólo de una discretización de la materia en forma de átomos y moléculas, sino de la radiación misma en forma de fotones. Este último hecho, el de la discretización de la radiación, fue explícitamente reconocido como una necesidad por A. Einstein en 1905 al mostrar que ni Maxwell ni Newton tenían completa razón, es decir, nos mostró el camino, a veces tortuoso e incomprensible, de aceptar que tanto la materia como la radiación son a la vez onda y partícula.

El siguiente paso importante, que es parte esencial de la explicación de lo que nos concierne aquí, lo dio N. Bohr en 1911 cuando propuso, como parte de su modelo del átomo, que éste sólo podía estar en ciertas “órbitas” o estados discretos y que la transición de uno de esos estados a otro iba acompañado de la emisión o absorción de radiación, también cuantizada, dependiendo respectivamente si el estado inicial tenía mayor o menor energía que el final; a su vez, la frecuencia de la radiación emitida o absorbida debería ser igual a la diferencia de las energías de los estados involucrados en la transición, dividida entre la constante h que Planck había introducido en 1900.

Una consecuencia muy importante, que usaremos más adelante, es que si un cuerpo emite en una frecuencia, el cuerpo también absorbe en esa misma frecuencia. Es claro que si un cuerpo no absorbe en una frecuencia arbitraria dada es porque no existe una transición atómica con esa frecuencia en el cuerpo y, por lo tanto, el cuerpo tampoco emitirá en esa frecuencia. Aunque esta teoría fue finalmente afinada en los estudios de W. Heisenberg y E. Schrödinger dando lugar a lo que ahora conocemos como la mecánica cuántica, la esencia del intercambio de la energía entre la materia y la radiación electromagnética permanece tal cual como Bohr la señaló. Es este intercambio básico no sólo la razón del equilibrio radiación-materia, sino la explicación de toda la radiación que observamos en el Universo.

Realizar una descripción detallada de lo que se señala en el párrafo anterior es el motivo de ¡toda una carrera de física! En este Cuaderno nos concentraremos en el detalle del equilibrio que se puede lograr con el intercambio de energía entre la materia y la radiación. Por un lado, proveeremos una descripción detallada de tal proceso, tanto desde una perspectiva fenomenológica clásica, basada en el electromagnetismo y la termodinámica, como en las

ideas modernas establecidas por la mecánica cuántica y la física estadística. Incluiremos también en este escrito los detalles históricos suficientes para comprender la relevancia de este proceso, sobre la forma en la que arribamos a su comprensión cabal.

El estudio del equilibrio radiación-materia se asocia con el nombre del problema de la *Radiación del Cuerpo Negro*, una idealización de un sistema macroscópico que es capaz de absorber absolutamente toda la radiación que le llegue. En las siguientes secciones se verá por qué la consideración de tal cuerpo es útil para la comprensión del fenómeno; un sustantivo alternativo más moderno es tildar a este problema como la termodinámica de un *gas de fotones*.

Sin embargo, los dos hechos anteriores, esto es, la relevancia histórica y la comprensión del proceso de equilibrio radiación-materia, no son único por lo que el análisis de este tema es importante. Resulta ser que, típicamente, el estudio de los grandes problemas de la física se terminan discutiendo por medio de modelos estilizados que capturan los aspectos esenciales y fundamentales del fenómeno en cuestión. Esto es porque la solución matemática de casi todos los problemas que podemos plantear resulta ser imposible de lograr. En el caso del cuerpo negro, o gas de fotones, resulta que no es así. Es decir, es uno de los pocos modelos de la naturaleza que permite ser resuelto de manera exacta.

Por otro lado, el gas de fotones en equilibrio térmico no es un modelo, es la realidad de lo que ocurre con la radiación electromagnética en equilibrio térmico. Esto se debe a que los fotones no interactúan entre sí, sólo son absorbidos o emitidos por la materia y, por lo tanto, en sí mismos constituyen un *gas ideal*. Por esta razón, los resultados obtenidos de esta teoría pueden ser aplicados directamente a observaciones experimentales. En particular, el presente problema tiene una enorme relevancia en estudios actuales de la astronomía y la cosmología, por ejemplo, la radiación de fondo del Universo, que se considera un remanente del Big Bang que dio inicio a nuestro Universo, obedece de manera espectacular la distribución de Planck a una temperatura de $T = 2.725$ K. Entre los temas de más interés en estos días es la observación y análisis de las pequeñas fluctuaciones de la distribución que Planck que pueden ser observadas a nivel cosmológico. Se cree que su elucidación explicaría la existencia o no de la materia oscura. Al final del texto revisaremos brevemente estos hechos, así como las observaciones astronómicas de dicha radiación de fondo.

II. UNA CAVIDAD “VACÍA” EN UN CUERPO A TEMPERATURA T ...

La manera más sencilla de iniciar este estudio es considerar un sólido a temperatura T al cual se le hace una cavidad de geometría arbitraria, como se muestra en la figura 1. Es decir, suponemos que la cavidad está “vacía” pues no tiene materia. Veremos que realmente no está vacía sino que dentro de ella se forma un “gas” de radiación electromagnética, o de fotones, en equilibrio termodinámico a la misma temperatura T del cuerpo.

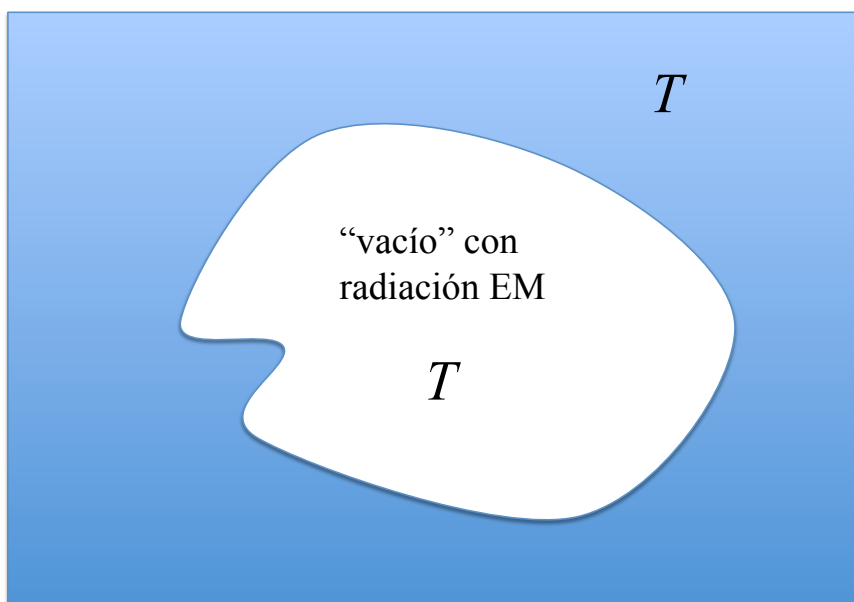


FIG. 1. Cuerpo negro en equilibrio con radiación en una cavidad de forma arbitraria con volumen V .

Al estar a temperatura T los átomos y/o moléculas de las paredes de la cavidad se excitan y desexcitan (típicamente por colisiones con sus átomos vecinos) y como parte de este proceso emiten radiación electromagnética, o de manera “moderna”, emiten fotones. Esta radiación entra a la cavidad y al alcanzar las paredes opuestas ocurre que, o es reflejada o es absorbida

por los átomos de la pared opuesta. Tales átomos, tarde o temprano vuelven a emitir parte o toda esa energía absorbida de nuevo a la cavidad y, una vez más, el proceso se repite. Como mencionamos en la Introducción, esto no era claro a mediados del Siglo XIX. Sin embargo, la mecánica cuántica lo explica bien, lo que consideraremos como un hecho. Es importante recalcar que la emisión de radiación, por ser espontánea, es altamente isotrópica, es decir, puede ser emitida en cualquier dirección. Es una observación empírica, que da lugar a la hipótesis básica de la Termodinámica, que cuando dos o más cuerpos macroscópicos intercambian energía, eventualmente alcanzan todos un estado de equilibrio en el que la temperatura T es la misma para todos. La consecuencia de este resultado para nuestro problema es que se alcanza el equilibrio termodinámico entre el cuerpo que compone las paredes de la cavidad y la radiación misma. En particular, la radiación y el cuerpo acaban por tener la misma temperatura T .

Veamos con más detalle cómo es que podemos considerar que la radiación misma se equilibra. Primero, el cuerpo emite en cualquier dirección y, por lo tanto, esa misma radiación es absorbida por otra parte de la cavidad, ya sea de manera directa o después de ser reflejada una o varias veces por las paredes mismas. Esto nos lleva a concluir que, tarde o temprano, debe ocurrir lo siguiente:

- La radiación en cualquier elemento de volumen de la cavidad, en promedio, será *homogénea, isotrópica* e independiente de su polarización.
- La cantidad de energía de la radiación en cualquier elemento de volumen de la cavidad debe ser la misma.
- La energía total de la radiación contenida en una cavidad de volumen V debe ser independiente de la *forma* de la cavidad.

Si las condiciones anteriores no se cumplieran, entonces, de manera ingeniosa podríamos lograr que hubiera un transporte de energía de manera direccional, abriendo la posibilidad de realizar algún trabajo en otro cuerpo. Por ejemplo, si la energía en los elementos de volumen dependieran de su posición en la cavidad, se generaría un gradiente que a su vez produciría un flujo de energía. Esto lo lograríamos simplemente haciéndole una cavidad a cualquier cuerpo en equilibrio a temperatura T . Sin embargo, se obtendría una violación a la segunda ley de la termodinámica, que establece que es imposible realizar trabajo usando sólo una fuente de calor a una temperatura dada. Por lo tanto, la radiación, en promedio, debe estar balanceada en todas sus propiedades consigo misma. Esto nos indica que podemos asignarle

una temperatura, como a cualquier cuerpo material, ya que esa radiación la podríamos poner en contacto con otro cuerpo que pudiera absorberla, y eventualmente se volvería a alcanzar un estado de equilibrio entre los dos cuerpos en cuestión y la radiación. La termodinámica nos indica que todas esas propiedades de equilibrio de transferencia de energía se enuncian asignándoles la misma temperatura a todos los “cuerpos” involucrados, sin hacer referencia a su composición. Por lo tanto, la radiación se considera en si misma como un sistema macroscópica que tiene propiedades termodinámicas como cualquier otro cuerpo.

Como ya mencionamos antes, debe ser claro que las frecuencias de radiación en las que un cuerpo emite y absorbe dependerán de manera esencial en la composición química del material. Por lo tanto, tal cuerpo sólo se puede poner en equilibrio con radiación que tenga sus frecuencias. Al conjunto de frecuencias que un cuerpo puede emitir o absorber se le llama el *espectro de absorción* del material en cuestión. Sea ν una de las frecuencias presentes en el espectro de un cuerpo dado. La pregunta fundamental es ¿cuál es la cantidad de energía de energía electromagnética $I(\nu, T)$, por unidad de volumen en una cavidad, con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$, cuando el cuerpo y la radiación tienen temperatura T ? Por las condiciones arriba enunciadas, $I(\nu, T)$ no puede depender ni de la posición \vec{r} del elemento de volumen considerado, ni de la dirección \vec{k} de la radiación, ni de la polarización σ de la misma. Una vez que la densidad de energía electromagnética es conocida, el problema está esencialmente resuelto y los diferentes resultados sobre las características de la radiación en equilibrio se pueden deducir. Note que desde el punto de vista cuántico, $I(\nu, T)$ es la densidad de energía de un gas de fotones de frecuencia ν a temperatura T .

Las consideraciones anteriores indican que si el cuerpo puede absorber y emitir en un cierto intervalo de frecuencias $\Delta(\nu_0)$ alrededor de alguna frecuencia ν_0 , la energía contenida en la cavidad puede escribirse como,

$$E(V, T) = V \int_{\Delta(\nu_0)} I(\nu, T) d\nu, \quad (1)$$

donde V es el volumen de la cavidad. Cabe mencionar en este momento el teorema de Kirchhoff, a reserva de discutirlo más a fondo después. Desde los años 1850 era entendido que si un cuerpo recibía radiación de frecuencia ν , ésta podía ser reflejada o absorbida. En el último caso, se sabía también que de una cantidad de radiación recibida por un cuerpo, sólo una fracción es absorbida. Esta fracción se denota por $A(\nu)$ y es llamada el coeficiente de absorción del cuerpo con respecto a radiación de frecuencia ν . Esta cantidad es adimensional

y varía de cero a uno, $0 \leq A(\nu) \leq 1$, dependiendo del cuerpo. Otra vez, recordemos que si un cuerpo absorbe radiación de frecuencia ν también emite radiación de la misma frecuencia. Kirchhoff mostró (y nosotros lo haremos en la Sección V) que si un cuerpo se encuentra en equilibrio termodinámico con radiación electromagnética de frecuencia ν , entonces, cualquier elemento de superficie del cuerpo emite en promedio una cantidad de energía por unidad de tiempo, $J(\nu, \theta, T)$, en el intervalo de frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$ y en una dirección θ medida desde la normal, dada por

$$J(\nu, T, \theta) = \frac{c}{8\pi} A(\nu) I(\nu, T) \cos \theta, \quad (2)$$

donde c es la velocidad de la luz. Debido a que $I(\nu, T)$ es una propiedad exclusiva de la radiación, la razón $J(\nu, T, \theta)/A(\nu)$ es universal. Si consideramos un cuerpo hipotético que absorba radiación con $A(\nu) = 1$ para toda frecuencia ν , entonces su espectro de emisión es precisamente la distribución de energía de la radiación $I(\nu, T)$. Un cuerpo que absorba toda la radiación que reciba no se “vería”, o alternativamente, se vería “negro”. Por lo tanto, a ese material ideal se le llamó *cuerpo negro* (... aunque, después, al reemitir la radiación ¡se vería blanco!). Este fue considerado como uno de los grandes problemas del Siglo XIX y grandes mentes de la época se avocaron a entenderlo. Su estudio culminó en 1900 con el descubrimiento de la mecánica cuántica por Planck y en la introducción del concepto corpuscular de la luz por Einstein en 1905.

Se sigue entonces que, para una cavidad de volumen V dentro de un cuerpo negro a temperatura T , la energía contenida es

$$E(V, T) = V \int_0^{\infty} I(\nu, T) d\nu. \quad (3)$$

El propósito de este Cuaderno es deducir la termodinámica asociada a este fenómeno y, por supuesto, deducir la densidad de energía $I(\nu, T)$, llamada también la distribución de Planck. Nótese que podemos identificar

$$u(T) = \int_0^{\infty} I(\nu, T) d\nu \quad (4)$$

como la energía (total) por unidad de volumen de la cavidad. Es muy importante recalcar que es una función sólo de la temperatura T .

III. EL PUNTO DE VISTA DE LA ELECTRODINÁMICA Y LA TERMODINÁMICA CLÁSICAS

A. Electrodinámica Clásica

Aunque como veremos en la Sección IV el tratamiento completo para obtener la distribución de energía $I(\nu, T)$ requiere del uso de la física estadística cuántica, se pueden obtener esencialmente toda la termodinámica de la radiación usando electrodinámica clásica e ideas generales de la termodinámica. En esta sección realizaremos dicho análisis.

Se espera que dentro de la cavidad se obedecen las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo en el vacío. En unidades cgs son:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}.\end{aligned}\tag{5}$$

Es un ejercicio sencillo mostrar (hágalo!) que estas ecuaciones implican que las siguientes ecuaciones de onda se obedecen al mismo tiempo,

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Es decir, en el vacío existen las ondas electromagnéticas no dispersivas que se propagan con velocidad c . Es también un ejercicio sencillo mostrar que una solución de las ecs. (6) son las ondas planas,

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \hat{\sigma}_1 E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \hat{\sigma}_2 B_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},\end{aligned}\tag{7}$$

si

$$\omega = |\vec{k}| c\tag{8}$$

donde $\omega = 2\pi\nu$ es la frecuencia de la onda, \vec{k} es su vector de propagación, $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$, $\lambda = c/\nu$ con λ la longitud de onda, y $\hat{\sigma}_1$ y $\hat{\sigma}_2$ son vectores unitarios que indican la polarización de

la onda, que es la dirección del campo eléctrico. Usando las ecuaciones de Maxwell (5), se hallan las siguientes relaciones,

$$B_0 = E_0 \quad \text{con } E_0 \text{ complejo}$$

$$\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2 = 0 \quad \hat{\sigma}_1 \times \hat{\sigma}_2 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}, \quad (9)$$

es decir, la onda electromagnética es una onda transversal con los vectores \vec{E} y \vec{B} ortogonales entre si. Debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, el campo electromagnético en cada punto e instante es la suma o superposición de todos los campos correspondientes a las diferentes frecuencias y polarizaciones. Esto quiere decir también que los campos de diferentes frecuencias no *interactúan* entre ellos, es decir, parecería como si la radiación fuera un “gas ideal” de ondas electromagnéticas de diferentes frecuencias. Más adelante, cuando introduzcamos conceptos cuánticos veremos que esto es una realidad, aunque en términos de fotones.

De las ecuaciones de Maxwell también podemos deducir la ley de conservación de energía electromagnética,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0 \quad (10)$$

donde

$$u = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{E}^* + \vec{B} \cdot \vec{B}^*) \quad (11)$$

es la densidad de energía electromagnética (usamos la misma letra “ u ” que en la ec. (4) de manera completamente deliberada) y

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}^* \quad (12)$$

es el vector de Poynting, que describe el flujo de energía electromagnética. La radiación no sólo lleva energía sino también momento o cantidad de movimiento. Se puede mostrar que $\vec{P} = \vec{S}/c$ es la densidad de momento de la radiación. Ello origina que la radiación produzca presión, la llamada *presión de radiación*, al incidir sobre cualquier superficie, ya sea en el seno de la cavidad o en las paredes que la componen.

En las secciones siguientes mostraremos el importantísimo resultado, que se adjudica originalmente a Maxwell, que la presión p producida por una radiación *homogénea e isotrópica* está dada por

$$p = \frac{1}{3}u. \quad (13)$$

Es muy sencillo visualizar que la presión debe ser proporcional a la densidad de energía, lo importante es el factor $1/3$.

B. Energía

Veamos con cuidado el concepto de energía en la cavidad. Consideremos a un cuerpo negro a temperatura T , el cual tiene una cavidad “vacía” en la que se establece equilibrio termodinámico de radiación electromagnética, como se muestra en la figura 1. Una vez en equilibrio, la energía almacenada por la radiación dentro de la cavidad debe ser

$$E = \sum_{\alpha=1}^2 \int d^3k \int_V d^3r \rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T) \quad (14)$$

donde $\rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T)d^3r d^3k$ es la energía de radiación con vector de onda entre \vec{k} y $\vec{k} + d^3k$, en el volumen entre \vec{r} y $\vec{r} + d^3r$ y con polarización α . Note que $\rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T)$ es una densidad tanto en el espacio de coordenadas como en el de vectores de onda.

Debido a que la radiación está en equilibrio termodinámico a temperatura T , debe ser *homogénea, isotrópica y despolarizada*. De lo contrario habría flujo de energía, del cual podríamos obtener trabajo, en contradicción con el enunciado de Kelvin de la segunda ley de la termodinámica. Así,

$$\rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T) = \rho(k, T) \quad (15)$$

es decir, la densidad de energía sólo depende de la magnitud $k = |\vec{k}|$, que es la frecuencia $k = 2\pi\nu/c$, y de la temperatura T .

Sustituyendo en la expresión de la energía, obtenemos,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\alpha=1}^2 \int d^3k \int_V d^3r \rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T) \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \int d^3k \int_V d^3r \rho(k, T) \\ &= 2V \int d\Omega \int_0^\infty \rho(k, T) k^2 dk \\ &= V \int_0^\infty \left[8\pi \left(\frac{2\pi}{c} \right)^3 \rho(\nu, T) \nu^2 \right] d\nu \end{aligned} \quad (16)$$

donde usamos

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 4\pi \quad (17)$$

e hicimos el cambio de variable $k = 2\pi\nu/c$. Definimos

$$I(\nu, T) = 8\pi \left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 \rho(\nu, T)\nu^2 \quad (18)$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} E &= V \int_0^\infty I(\nu, T) d\nu \\ &= Vu(T). \end{aligned} \quad (19)$$

Esto es, $I(\nu, T)d\nu$ es la energía de radiación por unidad de volumen con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$. Por consiguiente

$$u(T) = \int_0^\infty I(\nu, T) d\nu \quad (20)$$

es la energía de radiación por unidad de volumen. Como podemos ver, es función sólo de la temperatura.

C. Presión de radiación

La radiación electromagnética lleva, además de energía, momento o cantidad de movimiento. De las ecuaciones (11) y (12), hallamos que si una onda electromagnética con vector de onda \vec{k} y polarización α tiene energía por unidad de volumen $\rho(\vec{r}, t; \vec{k}, \alpha)$, entonces tiene asociada una densidad de momento (momento por unidad de volumen) dada por $\vec{P} = \rho(\vec{r}, t; \vec{r}, \alpha)\hat{k}/c$. Entonces, dado que la radiación de cuerpo negro tiene un continuo de frecuencias, definimos

$$d\vec{p}_\alpha = \frac{1}{c}\rho(k, T)\hat{k} d^3k \quad (21)$$

como la densidad de momento de la radiación con vector de onda entre \vec{k} y $\vec{k} + d^3k$.

Supongamos que radiación con momento entre \vec{k} y $\vec{k} + d^3k$ incide sobre una diferencial de superficie $\hat{n}\Delta A$ de un cuerpo y es reflejada especularmente, como se muestra en la figura 2. Notamos que la cantidad de energía de radiación con vector \vec{k} y contenida en un volumen $\Delta V = c\Delta t\Delta A \cos\theta$, con $\cos\theta = \hat{k} \cdot \hat{n}$, transferirá en un intervalo de tiempo Δt , la cantidad de movimiento dada por

$$\Delta\vec{P} = 2|d\vec{p}_\alpha| \Delta V \cos\theta\hat{n}. \quad (22)$$

Y por lo tanto, ejercerá una fuerza

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \\ &= 2\rho(k, T)d^3k \Delta A \cos^2\theta\hat{n}. \end{aligned} \quad (23)$$

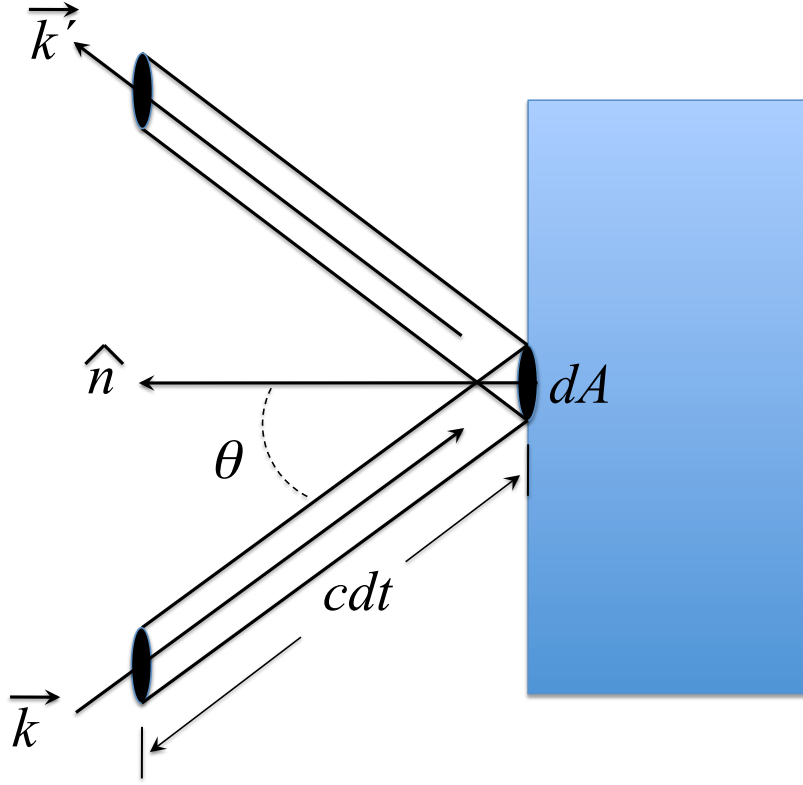


FIG. 2. La radiación incide con vector \vec{k} y es reflejada con vector \vec{k}' , con $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$. Existe una transferencia de momento que da lugar a una fuerza de la radiación sobre la pared y, a su vez, a una presión. Note que el ángulo θ no puede exceder $\pi/2$.

Vemos entonces que la presión total que ejerce la radiación es la integral sobre la fuerza normal en todas las direcciones y polarizaciones *posibles* incidentes, dividida por la superficie ΔA ,

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{\Delta A} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{inc} d\vec{F} \cdot \hat{n} \\
 &= 2 \sum_{\alpha=1}^2 \int_{inc} d^3k \rho(k, T) \cos^2 \theta
 \end{aligned} \tag{24}$$

donde la integral es sobre valores de \vec{k} con direcciones en sólo la media esfera':

$$\int_{inc} d^3k = \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{\infty} k^2 dk. \tag{25}$$

Obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
 p &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^\infty k^2 dk \rho(k, T) \\
 &= 4 \frac{1}{3} 2\pi \left(\frac{2\pi}{c} \right)^3 \int_0^\infty \nu^2 \rho(\nu, T) d\nu.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Usando la definición de $I(\nu, T)$ de la ecuación (18), hallamos

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{3} 8\pi \left(\frac{2\pi}{c} \right)^3 \int_0^\infty \nu^2 \rho(\nu, T) d\nu \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^\infty I(\nu, T) d\nu.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Es decir, encontramos que la presión de radiación es un tercio de la densidad de energía,

$$p = \frac{1}{3} u(T). \tag{28}$$

D. Termodinámica Clásica

Con los resultados anteriores podemos deducir toda la termodinámica de la radiación sin necesidad de conocer la forma de $I(\nu, T)$. Veamos. Notamos primero que el estado termodinámico de la radiación depende sólo de V y T , es decir, no hay dependencia en N , el número ... de qué? La radiación no es materia y no “debería” depender de la variable N que indica la cantidad de “partículas”. Este no es un resultado trivial y volveremos después a analizarlo más abajo. Por lo pronto, aceptamos que sólo V y T definen el estado termodinámico. Esto quiere decir que la energía libre de Helmholtz es función sólo de esas variables,

$$F = F(V, T). \tag{29}$$

Como F es extensiva, debe ser de la forma $F = V f(T)$. De F podemos hallar la entropía S y la presión p ,

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V. \tag{30}$$

De aquí tenemos

$$p = -f(T) \quad S = -V \frac{df(T)}{dT}. \tag{31}$$

Como $p = u(T)/3$, entonces $f(T) = -u(T)/3$. Por otro lado, sabemos que $E = F + TS$ y usando los resultados anteriores hallamos que,

$$u = -\frac{1}{3}u + \frac{T}{3} \frac{du}{dT}. \tag{32}$$

Integrando esta expresión hallamos la dependencia de u en T :

$$u = KT^4. \quad (33)$$

No se tiene un término inhomogéneo (independiente de T) debido a la tercera ley de la termodinámica que requiere que $S \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow 0$. Mostraremos más adelante que $K = 4\sigma/c$ donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann.

Con lo anterior estamos en posibilidades de deducir la ley de Wien (1893), de gran importancia tanto práctica como de carácter histórico, como veremos en la Sección VI. Por sencillez, consideremos radiación electromagnética a temperatura T dentro de una cavidad de forma cúbica de arista L y metálica (esto no es esencial, sólo simplifica el punto principal). En tal caso, las ondas electromagnéticas permitidas tendrán longitud de onda $(2n+1)\lambda = L$ con n un entero (pues el campo eléctrico debe ser cero en las paredes). Supongamos ahora una expansión (o compresión) adiabática de la cavidad a un volumen $V' = \kappa V$ con κ un número real y positivo. El sistema se enfría (o calienta) a una temperatura T' . Notamos que todas las longitudes de onda se reajustan, pues el cambio es adiabático, a $\lambda' = \kappa^{1/3}\lambda$ o equivalentemente las frecuencias $\nu' = \kappa^{-1/3}\nu$. Por otro lado, debe ser cierto que $S(V, T) = S(V', T')$, por ser adiabático el proceso. Mostraremos que estas consideraciones implican que la dependencia de la densidad de energía electromagnética $I(\nu, T)$ debe ser de la siguiente forma,

$$I(\nu, T) = \nu^3 g\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (34)$$

donde $g(\nu/T)$ es todavía una función a determinar. Lo importante es su dependencia en el cociente (ν/T) .

De la termodinámica del cuerpo negro, obtenemos que la entropía está dada por

$$S = \frac{4}{3} \frac{Vu(T)}{T} \quad (35)$$

y, por lo tanto,

$$S = \frac{4}{3} KVT^3. \quad (36)$$

Un proceso adiabático nos da como resultado que $VT^3 = \text{constante}$ y, por lo tanto, debe obedecer $VT^3 = V'T'^3$. Con las deducciones de arriba, esto nos indica que en un cambio adiabático la temperatura cambia como $T' = \kappa^{-1/3}T$. Esto a su vez implica que el cociente $\xi = \nu/T = \nu'/T'$ es un invariante adiabático. Escribiendo de manera explícita la entropía

tenemos,

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{3}V \int_0^\infty \frac{d\nu}{T} I(\nu, T) \\ &= \frac{4}{3}V \int_0^\infty d\xi I(\xi, T) \end{aligned} \quad (37)$$

donde hemos realizado un evidente cambio de variable. Ante una transformación adiabática, se tiene que

$$S = \frac{4}{3}\kappa V \int_0^\infty d\xi I(\xi, \kappa^{-1/3}T). \quad (38)$$

Comparando ambas expresiones para la entropía, se debe cumplir que

$$I(\xi, T) = \kappa I(\xi, \kappa^{-1/3}T) \quad (39)$$

para todo valor de κ real y positivo. La solución a esta ecuación es

$$I(\xi, T) = \nu^3 g(\xi), \quad (40)$$

que es lo mismo que decir $I(\nu, T) = T^3 g(\nu/T)$. Este resultado es rigurosamente correcto. Sin embargo, debido a sus propios experimentos, así como de otros, Wien fue más allá y propuso que la forma de la densidad de energía electromagnética debería ser,

$$I(\nu, T) = a\nu^3 e^{-b\frac{\nu}{T}}, \quad (41)$$

con a y b dos constantes empíricas. Es una ironía histórica que este resultado ajusta bien la “parte cuántica” de la verdadera distribución, como veremos adelante, pero era así pues los experimentos de esa época no tenían acceso a la “parte clásica”! Por otro lado, es muy importante recalcar que la fórmula (41) predice de manera correcta que la frecuencia de emisión más intensa del cuerpo depende de T y que tal pico se corre proporcionalmente a T conforme el cuerpo se calienta o se enfría. Esto fue conocido como la *ley de desplazamiento de Wien*.

Inicialmente, Planck creía que el resultado (41) era correcto y su proyecto era demostrar teóricamente su validez. Después de varios intentos, Planck se “convenció” (y lo publicó!) que su deducción de la ley de Wein era correcta. No fue sino hasta el año 1900 que dos grupos experimentales de Berlín, Pringshtein y Lumen por un lado, y Karlbaum y Rubens por el otro, mostraron que a frecuencias bajas la ley de Wein (41) no era correcta. En vez, un mejor ajuste era $I(\nu, T) \approx A\nu^2 T$ (que veremos adelante en la ec. (73)). Esto alteró la

vida tranquila de Planck y lo llevó, en tres meses de trabajo frenético, a encontrar la forma correcta de la distribución de $I(\nu, T)$ que lleva su nombre:

$$I(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (42)$$

De paso, Planck descubrió la mecánica cuántica e introdujo las constantes h y k , ahora conocidas como las de Planck y de Boltzmann. En la Sección VI mostramos los pasos esenciales de la deducción de Planck. En la siguiente sección presentaremos la deducción “moderna” que ya hace uso directo de la existencia de los fotones y, por supuesto, de la validez de la mecánica cuántica. Caben mencionar, sin embargo, dos aspectos históricos de gran relevancia. Por un lado, existe una creencia que Planck conocía la “validez” del resultado a frecuencias altas, la ley de Wein, y a frecuencias bajas, la ley de Rayleigh-Jeans, y que el construyó la interpolación correcta. Esto es falso. La ley “clásica” de Rayleigh-Jeans fue posterior y se publicó en realidad como una crítica válida al trabajo de Planck pues no había razón para creer en las ideas revolucionarias (cuánticas) de Planck. Se olvida que fue la evidencia experimental la que empujó a Planck a realizar su trabajo. Sin embargo, por el lado puramente teórico, Planck había iniciado sus investigaciones alrededor de 1890 con el propósito de demostrar que Boltzmann estaba equivocado al darle a la segunda ley una interpretación estadística. Planck creía que la segunda ley era una ley rigurosa de carácter determinista. Es muy emotivo observar que Planck, en su desesperación por deducir la forma de $I(\nu, T)$, finalmente concedió y aceptó las ideas de Boltzmann, y en un momento virtuoso las usó para culminar su trabajo.

IV. LA DEDUCCIÓN MODERNA USANDO FÍSICA ESTADÍSTICA

A. Fotones

Curiosamente, como parte de la comprensión del problema del cuerpo negro, Einstein en 1905 introdujo la idea de que la radiación electromagnética podía considerarse como un gas de partículas relativistas sin masa, a las que después se bautizó como “fotones”. Desde un punto de vista muy simplista, podemos considerar al fotón como una partícula de masa cero, con momento \vec{p} y energía $\epsilon = pc$ con $p = |\vec{p}|$. Usando las ideas de de Broglie, podemos además decir que a la partícula fotón le corresponde una onda con longitud $\lambda = h/p$ y una frecuencia $\nu = \epsilon/h$, relacionadas como $\lambda\nu = c$, que corresponde a la relación de dispersión

de las ondas electromagnéticas. Desafortunadamente, tal identificación no es tan sencilla ya que los fotones no obedecen una ecuación de Schrödinger por ser partículas relativistas. En vez, un tratamiento teórico completo requiere de la teoría cuántica de campos. Tal tratamiento arroja que los fotones son partículas fundamentales de espín $s = 1$ y, por lo tanto, son bosones. Notamos, por otro lado, que ciertos estados de un número macroscópico de fotones (llamados estados coherentes) pueden representarse como ondas planas clásicas. Este es realmente el único resultado que necesitamos para darnos una idea de la relación que existe entre una onda electromagnética clásica y los fotones.

El siguiente enunciado es correcto con un alto grado de precisión: una onda electromagnética monocromática de vector de onda \vec{k} , con frecuencia $\nu = kc/2\pi$, con polarización circular derecha e intensidad $|E_0|^2$, representa un número medio $\bar{n}_{(\vec{k}, m_s)}$ de fotones con momento $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, energía $\epsilon_{(\vec{k}, m_s)} = \hbar k/c$ y componente de espín $m_s = +1$, siendo \bar{n} proporcional a $|E_0|^2$. Si la onda está circularmente polarizada izquierda, entonces $m_s = -1$. La componente de spin $m_s = 0$ nunca es ocupada; esto es consecuencia de que los fotones viajan siempre a la velocidad de la luz. Esta correspondencia nos permite enunciar que una superposición arbitraria de ondas electromagnéticas clásicas, con diferentes valores de \vec{k} , de intensidades y polarizaciones m_s , siempre puede pensarse como un estado en el cual, para cada valor de (\vec{k}, m_s) , se tiene un número de fotones $n_{(\vec{k}, m_s)}$ proporcional a la intensidad de la onda correspondiente.

En otras palabras, el fotón es una partícula caracterizada por 4 números cuánticos, (\vec{k}, m_s) . El primero nos da las componentes del momento del fotón y el último su estado de espín. Clásicamente, el primero es el vector de onda y el segundo su componente de polarización. Por lo tanto, una base de los estados cuánticos de la radiación, o del gas de fotones, consiste en especificar los números de ocupación $n_{(\vec{k}, m_s)}$ para *todos* los valores de \vec{k} y m_s . Los valores del espín son $m_s = \pm 1$, mientras que como los fotones son bosones, los valores de los números de ocupación pueden ser $n_{(\vec{k}, m_s)} = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Denotamos pues a cualquier estado de la radiación como un conjunto arbitrario de números de ocupación,

$$\{n\} = \left\{ n_{(\vec{k}, m_s)}, \forall \vec{k}, m_s \right\}. \quad (43)$$

Arriba mencionamos que las paredes del cuerpo que forman la cavidad, siempre emiten y absorben radiación electromagnética. La visión cuántica es que los átomos de las paredes, ahora, están absorbiendo y emitiendo fotones. Una vez en equilibrio, dentro de la cavidad

se tiene un gas de fotones en equilibrio. Por otro lado, la linealidad de las ecuaciones de Maxwell tiene como correspondencia cuántica que los fotones no interactúan entre si, es decir, son un gas *ideal* y, por lo tanto, la energía del estado $\{n\}$ es, si ignoramos la energía del punto cero,

$$E_{\{n\}} = \sum_{m_s} \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} n_{(\vec{k}, m_s)}, \quad (44)$$

donde la frecuencia es $\omega_{\vec{k}} = k/c$. Es decir, cada fotón con momento \vec{k} y espín m_s , contribuye con una energía $\hbar\omega_{\vec{k}}$.

Una pregunta adicional sería inquirir sobre el *número* de fotones en el estado $\{n\}$ de la radiación. Este es simplemente,

$$N_{\{n\}} = \sum_{m_s} \sum_{\vec{k}} n_{(\vec{k}, m_s)}. \quad (45)$$

Hagamos una observación muy importante: el número de fotones dentro de la cavidad *no* es constante. Es decir, cambia en cada emisión y absorción por los átomos de las paredes. A su vez, es claro que una vez que una región con varios átomos absorbe un número dado de fotones, no vuelve necesariamente a emitir el mismo número de átomos. Supongamos que absorbe una cierta cantidad de fotones en un cierto tiempo. Esto aumenta la energía de esa región. La energía puede ciertamente ser “devuelta” a la radiación o puede ser conferida a otra parte del cuerpo por vibraciones o colisiones entre los átomos. A su vez, un grupo de átomos puede recibir energía de otra parte del cuerpo y convertirla en fotones. Lo importante, primero, es que la frecuencia de los fotones absorbidos y emitidos es la misma dentro de un intervalo de frecuencias, y segundo, que en *promedio* la energía por unidad de tiempo que se absorbe sea la misma que se emita; regresaremos a este punto más abajo.

La conclusión es pues que en el estado de equilibrio del gas dentro de la cavidad, el número de fotones no es una constante. Por lo tanto, el estado termodinámico no puede depender de tal cantidad. El número *promedio* de fotones sí es fijo y está determinado por el estado de equilibrio en cuestión. Esto explica porqué sólo la temperatura y el volumen especifican el estado termodinámico. Otra consecuencia es que como N no es una variable independiente, entonces el potencial químico del gas de fotones es cero, lo que implica que la energía libre de Helmholtz es $F = F(T, V)$ y, por tanto,

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T, V} = 0. \quad (46)$$

La creación o aniquilación de un fotón no tiene un costo energético desde el punto de vista termodinámico.

B. Física estadística de un gas de fotones

Estamos en condiciones ya de realizar el cálculo de la física estadística, que consiste en calcular la función de partición en el límite termodinámico:

$$Z(T, V) = \sum_{\{n\}} e^{-\beta E_{\{n\}}} \quad (47)$$

donde $\beta = 1/k_B T$, con k_B la constante de Boltzmann. La suma es sobre *todos* los estados de la radiación. Referimos al lector a cualquier libro de física estadística para la justificación y deducción de la función de partición y su relación con la termodinámica, como se usa más abajo.

El cálculo es muy sencillo. Es fácil mostrar que la suma sobre los estados de la radiación pueden sustituirse por las sumas indicadas a continuación,

$$\begin{aligned} Z(T, V) &= \prod_{\vec{k}} \prod_{m_s} \left(\sum_{n_{(\vec{k}, m_s)}=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega_{\vec{k}} n_{(\vec{k}, m_s)}} \right) \\ &= \prod_{\vec{k}} \prod_{m_s} \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_{\vec{k}}}} \\ &= \left(\prod_{\vec{k}} \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_{\vec{k}}}} \right)^2 \end{aligned} \quad (48)$$

donde el último paso se puede hacer ya que la frecuencia $\omega_{\vec{k}}$ no depende del espín, o de la polarización, m_s .

La teoría de la física estadística nos indica que la energía libre de Helmholtz se calcula usando la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} F(T, V) &= -kT \ln Z(T, V) \\ &= -2kT \sum_{\vec{k}} \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_{\vec{k}}}}. \end{aligned} \quad (49)$$

El límite termodinámico se implementa en la suma de modos al exigir que $V \rightarrow \infty$. Dicha suma, al no depender de la forma del recipiente, se puede calcular considerando a la cavidad como si fuera cúbica $V = L^3$, e imponiendo condiciones periódicas a la frontera en los modos electromagnéticos permitidos en la cavidad. Esto último es válido también pues la radiación

en equilibrio es independiente de los detalles atómicos de la cavidad. En este caso, el vector de onda \vec{k} sólo toma valores discretos dados por

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(l_x, l_y, l_z) \quad (50)$$

donde l_x, l_y y l_z toman valores enteros $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Por lo tanto la suma sobre \vec{k} en (49) es realmente una suma sobre todos los valores posibles de (l_x, l_y, l_z) . Notando que el incremento en la suma, digamos de l_x , es $\Delta l_x = 1$, pero también igual a $\Delta l_x = (L/2\pi)\Delta k_x$, obtenemos, en el límite $L \rightarrow \infty$, con el mismo argumento para l_y y l_z ,

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k. \quad (51)$$

Con este resultado, no sólo la energía libre es manifiestamente extensiva, como debe ser, sino que en este caso obtenemos el resultado que $F = Vf(T)$, a saber,

$$F(T, V) = -2kT \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}}. \quad (52)$$

Si se usa el hecho que $k = 2\pi\nu/c$, transformamos la integral anterior a una sobre frecuencias,

$$F(T, V) = kTV \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 d\nu \ln \left(1 - e^{-\beta h\nu}\right). \quad (53)$$

Mediante una integral por partes, obtenemos el resultado deseado:

$$F(T, V) = -V \frac{8\pi}{3c^3} \int_0^\infty \frac{h\nu^3 d\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}. \quad (54)$$

Usando $dF = -SdT - pdV$ y $E = F + TS$, hallamos las propiedades termodinámicas predichas por los argumentos clásicos, $p = u(T)/3$, $S = 4u(T)/3T$ y $E = Vu(T)$, y el gran logro es que ahora sí conocemos la energía por unidad de volumen,

$$u(T) = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{h\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (55)$$

y de esta expresión leemos la densidad de energía a temperatura T , con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$,

$$I(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (56)$$

Como ya se discutió en la sección anterior, a esta expresión se le conoce como la distribución de Planck. Haciendo un último cambio de variable $x = h\nu/kT$ podemos calcular el valor de $u(T)$ de manera explícita. Veamos,

$$u(T) = 8\pi \left(\frac{1}{hc}\right)^3 (kT)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (57)$$

La integral es igual a $\pi^4/15$ y, por lo tanto,

$$u(T) = \frac{4}{c}\sigma T^4 \quad (58)$$

donde σ es la llamada constante de Stefan-Boltzmann, que discutiremos en la siguiente sección,

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{h^3 c^2}. \quad (59)$$

El análisis de la física estadística nos permite hallar un par de resultados relevantes. Primero, de la ecuación (45) para la energía de los estados de fotones, obtenemos que su promedio es

$$E = \sum_{m_s} \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \bar{n}_{(\vec{k}, m_s)}. \quad (60)$$

Al compararla con la expresión (55) de $E = Vu(T)$, podemos concluir que el número *promedio* de fotones en el estado (\vec{k}, m_s) es

$$\bar{n}_{(\vec{k}, m_s)} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\vec{k}}} - 1} \quad (61)$$

que no es otra cantidad que la distribución de Bose-Einstein para un gas con potencial químico $\mu = 0$. Con este dato podemos calcular una cantidad que no es obvia desde el punto de vista cuántico, y que es el número *promedio* de fotones en la cavidad como función de V y T ,

$$\begin{aligned} N(V, T) &= \sum_{m_s} \sum_{\vec{k}} \bar{n}_{(\vec{k}, m_s)} \\ &= \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\vec{k}}} - 1} \\ &= 8\pi V \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \\ &= 16\pi\zeta(3)V \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \end{aligned} \quad (62)$$

donde $\zeta(3) \approx 1.202$ es la función ζ de Reimann de argumento 3.

V. BALANCE DETALLADO, EL TEOREMA DE KIRCHHOFF Y LA LEY DE STEFAN-BOLTZMANN

Aunque esta sección bien podría haber sido incluida antes, por razones de exposición es mejor dejarla hasta el final y usar lo que ya hemos desarrollado. Un aspecto muy importante

es la forma en la que se establece el equilibrio entre la radiación y el cuerpo que la emite y absorbe. Argüiremos que no es suficiente con tener que en promedio la energía que se absorbe por unidad de tiempo sea igual a la que se emite en el mismo intervalo de tiempo. Veremos que tal balance debe ser en “detalle”. Es sorprendente en retrospectiva la intuición de Kirchhoff de tomar en cuenta este aspecto para enunciar su ley. Este principio es también parte de los requerimientos fundamentales de la validez de la segunda ley. Analicemos, pues, el teorema de Kirchhoff junto con el principio de balance detallado. La ley de Stefan-Boltzmann se sigue como un sencillo corolario.

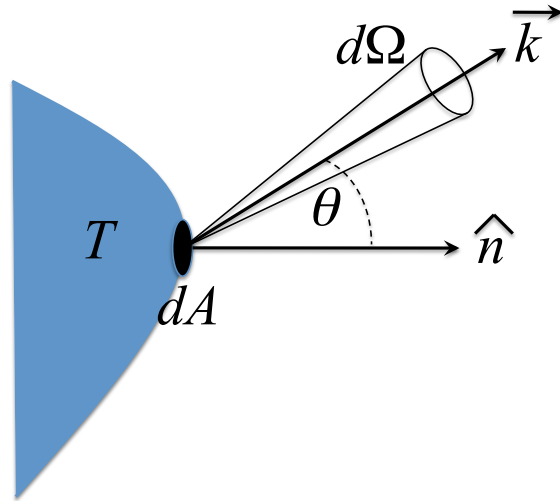


FIG. 3. Radiación emitida por una diferencial de área de un cuerpo negro. Note que no se puede emitir a ángulos mayores a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Por simplicidad, consideremos un cuerpo arbitrario a temperatura T en equilibrio con radiación electromagnética, también a temperatura T . Pongamos atención a un elemento

de área ΔS , infinitesimal en el límite, del cuerpo con normal \hat{n} , vea la figura 3. Este elemento de área absorbe y emite energía en forma de fotones, o radiación electromagnética. Sea $\mathcal{P}(\theta, \nu, m_s)d\nu d\Omega$ la cantidad de energía por unidad de tiempo, o sea la potencia, por unidad de área que el cuerpo recibe en el área ΔS , a un ángulo θ con respecto a la normal dentro de un ángulo sólido $d\Omega$, con polarización m_s y en un intervalo de frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$. Esta cantidad *no* depende del cuerpo, es una propiedad de la radiación en equilibrio. La cantidad equivalente de potencia que el cuerpo absorbe es $A(\nu, \theta)\mathcal{P}(\theta, \nu, m_s)d\nu d\Omega$, donde $A(\nu, \theta)$ es el coeficiente de absorción del cuerpo, para una frecuencia y ángulo dado. A su vez, esa misma área ΔS del cuerpo emite $J(\theta, \nu, m_s)d\nu d\Omega$ dentro de los mismos intervalos de frecuencia y dirección. Esta cantidad *sí* depende del cuerpo en cuestión. Aunque no es un resultado probado con rigor, se espera que para que el equilibrio termodinámico exista, se debe obedecer que

$$J(\theta, \nu, m_s)d\nu d\Omega = A(\nu, \theta)\mathcal{P}(\theta, \nu, m_s)d\nu d\Omega \quad (63)$$

o simplemente,

$$J(\theta, \nu, m_s) = A(\nu, \theta)\mathcal{P}(\theta, \nu, m_s). \quad (64)$$

Este es el teorema de Kirchhoff. A su vez, es un ejemplo del *Principio de Balance Detallado*. Nos dice que para que se establezca el equilibrio no es suficiente que el flujo promedio de energía entre los sistemas en cuestión sea cero, es decir, que se balancee el flujo de energía, sino que además debe ser *en detalle*. En este caso, el equilibrio debe ser frecuencia por frecuencia, dirección por dirección y polarización por polarización.

El estudio de las secciones anteriores nos permite calcular $J(\theta, \nu, m_s)$, la emisión de radiación de un cuerpo a temperatura T . Sea \hat{k} un vector unitario arbitrario con $\hat{k} \cdot \hat{n} = \cos \theta$. En el estado estacionario de equilibrio, el área ΔS recibe radiación, dentro de un intervalo d^3k , en la dirección $-\hat{k}$. Consideremos un intervalo de frecuencias de la radiación entre ν y $\nu + d\nu$. Entonces el número de fotones con momento entre $-\vec{k}$ y $-\vec{k} + d^3k$, con polarización m_s y que inciden sobre el área ΔS por unidad de tiempo es,

$$\bar{n}_{(-\vec{k}, m_s)} c \cos \theta \Delta S \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (65)$$

Cada fotón lleva una energía $\hbar\omega_{(\vec{k}, m_s)}$, por lo que la cantidad de energía por unidad de tiempo y por unidad de área que incide sobre ese elemento es,

$$\mathcal{P}(\theta, \nu, m_s)d\nu d\Omega = \hbar\omega_{(-\vec{k}, m_s)}\bar{n}_{(-\vec{k}, m_s)}c \cos \theta d^3k$$

$$= \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \frac{\nu^2}{c^2} d\nu \cos \theta d\Omega. \quad (66)$$

Por lo tanto, como vimos arriba, la cantidad de radiación que se emite en equilibrio termodinámico es $J(\theta, \nu, m_s) = A(\nu, \theta)\mathcal{P}(\theta, \nu, m_s)$. No podemos ir más allá sin especificar el coeficiente de emisión. Si el cuerpo es “negro” podemos asignar $A(\nu, \theta) \equiv 1$ y obtenemos,

$$J(\theta, \nu, m_s) d\nu d\Omega = \frac{1}{c^2} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \cos \theta d\Omega. \quad (67)$$

Así,

si integramos sobre todas las frecuencias y sobre media esfera, obtendremos la cantidad de energía que el cuerpo emite por unidad de tiempo por unidad de área y para toda polarización:

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{c^2} \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \\ &= \frac{2\pi}{c^2} \int_0^\infty \frac{h\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \\ &= \sigma T^4 \end{aligned} \quad (68)$$

donde usamos las ecuaciones (57)-(59) que definieron a σ , la constante de Stefan-Boltzmann. Como mencionamos al principio de este capítulo, la ley de Stefan-Boltzmann es de gran uso en la astronomía ya que una estrella a temperatura T emite radiación como si fuera un cuerpo negro. Aunque no lo sea, esto puede ajustarse con un coeficiente de corrección a la constante σ , es decir, la dependencia T^4 se mantiene de manera muy precisa.

VI. SOBRE CÓMO PLANCK INTRODUJO LA CONSTANTE h Y OTRAS NOTAS HISTÓRICAS

Dada la trascendencia del descubrimiento de la mecánica cuántica por Max Planck en 1900, la historia detrás de tal descubrimiento no podía no haber estado plasmada de un alto grado de dramatismo. Esta sección está basada esencialmente en dos textos: E. Segrè, *From X-rays to quarks* y L. García Colín, *Sobre la naturaleza estadística de los cuantos*.

Aunque la historia no es lineal, bien podemos iniciarla con el enunciado de Kirchhoff, de alrededor de 1850, sobre el equilibrio entre la radiación emitida por un cuerpo caliente y la radiación recibida, estando ambos a la misma temperatura, y cuya expresión está dada por

la ecuación (2), que aquí repetimos:

$$J(\nu, T, \theta) = \frac{c}{8\pi} A(\nu) I(\nu, T) \cos \theta, \quad (69)$$

donde $J(\nu, T)$ es la potencia radiada a la frecuencia ν por un cuerpo a temperatura T ; $A(\nu)$ es el coeficiente de absorción del cuerpo en cuestión a frecuencia ν , e $I(\nu, T)$ es la energía por unidad de volumen, a frecuencia ν , de la radiación misma, en equilibrio a temperatura T . Kirchhoff inmediatamente señaló que $I(\nu, T)$ era una propiedad exclusiva de la radiación y no del cuerpo que hubiera emitido tal radiación. El problema que Kirchhoff planteó para la posteridad fue el hallar la expresión explícita para $I(\nu, T)$. Nadie hubiera imaginado que tal hallazgo contenía la llave del mundo cuántico.

En los siguientes 30 años hubo relativamente poco progreso, aunque vale la pena resaltar que L. Boltzmann dedujo lo que conocemos como ley de Stefan-Boltzmann, usando solamente argumentos termodinámicos. Esta ley establece que

$$u(T) = \frac{4}{c} \sigma T^4 \quad (70)$$

donde $u(T)$ es la energía por unidad de volumen de la radiación,

$$u(T) = \int_0^\infty I(\nu, T) d\nu, \quad (71)$$

y donde la constante de Stefan-Boltzmann σ es una cantidad medible.

Durante los años 1860 la termodinámica, como la conocemos, fue consolidada por R. Clausius. En particular, Clausius introdujo el concepto de la entropía S de un cuerpo en equilibrio, con la concomitante segunda ley de la termodinámica. Esta ley establece que la entropía de un sistema *cerrado* siempre aumenta, o al menos se queda igual, en cualquier proceso que sufra dicho cuerpo. De manera alterna podemos decir que la entropía de un sistema térmicamente aislado nunca disminuye. Una consecuencia muy profunda es que la segunda ley establece la existencia absoluta de los procesos irreversibles de la Naturaleza.

Tan sólo unos cuantos años después, en los 1870, L. Boltzmann, un convencido atomista que seguía los pasos de J.C. Maxwell, cuestionó fuertemente el resultado de Clausius de que la segunda ley era realmente una “ley” absoluta, es decir, cuestionó la existencia de los procesos irreversibles como procesos fundamentales de la Naturaleza. Basado en el modelo de Maxwell de que la materia estaba compuesta por “átomos”, increíblemente pequeños e increíblemente abundantes en número - aunque tanto Maxwell como Boltzmann ignoraban

qué eran los átomos - su idea era que todos los fenómenos macroscópicos realmente eran un reflejo de lo que ocurría a nivel atómico. En particular, lo macroscópico estaba regido por las colisiones atómicas y estas a su vez debían estar regidas por la mecánica clásica de Newton ... El cuestionamiento era que todos los procesos descritos por la mecánica clásica son *reversibles*. Técnicamente las ecuaciones de Newton no distinguen entre pasado y futuro pues son invariantes ante la inversión temporal. La consecuencia irremediable es que ningún proceso en la Naturaleza puede ser ¡estrictamente irreversible!

La pregunta inmediata es, entonces, ¿cómo podemos reconciliar tal *reversibilidad microscópica* con la patente *irreversibilidad macroscópica*? El mismo Boltzmann respondió la pregunta explicándonos que la segunda ley no es una ley absoluta sino *estadística*. Es decir, el enunciado de que la “entropía nunca disminuye” sólo es correcto por un tiempo largo (¡muy largo!) y puede suceder que de manera rara (¡muy rara!) la entropía aumente. La clave de que la segunda ley aparezca como absoluta es que el número de átomos y moléculas en cualquier cuerpo es verdaderamente enorme, digamos $N \sim 10^{20}$. Boltzmann fue más allá y dedujo que la entropía de un gas diluido podía expresarse como

$$S = \frac{R}{N_0} \ln W(E, V, N) \quad (72)$$

donde R es la constante universal de los gases $R = ...$ y N_0 es el ahora llamado número de Avogadro, que aunque no era conocido de manera precisa en el tiempo de Boltzmann, su relevancia ya había sido identificada. La parte más importante, y la contribución profunda de Boltzmann, es que $W(E, V, N)$ es el número de estados de los N átomos que componen al cuerpo, contenidos en un volumen V , cuando el cuerpo tiene energía E . Como el cuerpo está en equilibrio, $1/W(E, V, N)$ se puede identificar como la *probabilidad* de que el sistema esté en cualquiera de dichos estados. Boltzmann además mostró, con argumentos probabilísticos, basados en el caos molecular, que la entropía sí aumentaba. Todas estas ideas son la base de la física estadística moderna, que usamos en la Sección IV. Cuesta trabajo imaginarse que las ideas de Boltzmann no fueron bien recibidas por un sector muy importante y respetable de la comunidad científica de la época ... y ¡Planck estaba entre los detractores! Planck estaba convencido que la segunda ley era absoluta y que los procesos irreversibles eran fundamentales y, como inspiración, decidió que ese sería su proyecto de investigación cuando fue nombrado profesor de física teórica en la Universidad de Berlín en 1890.

Max Planck había estudiado con Kirchhoff y Helmholtz y conocía muy bien la ter-

modinámica de Clausius. Como muchos otros hallaba muy desagradable que las leyes de la física pudieran ser de carácter estadístico, como había indicado Boltzmann. Como un detalle lateral, cabe la pena recordar que uno de los críticos más acérrimos de Boltzmann fue Zermelo; lo que pocas veces se aclara es que Zermelo había estudiado ¡bajo la supervisión de Planck! Como Planck conocía muy bien el problema del cuerpo negro y el enunciado de Kirchhoff, decidió que iba a demostrar lo fundamental de los procesos irreversibles a través del estudio del establecimiento del equilibrio entre la radiación que absorbe un sistema y la que emite el mismo. Por su sencillez, Planck decidió usar como “sistema” a un oscilador armónico cargado eléctricamente y de frecuencia ν y que, por lo tanto, es capaz de absorber y de emitir radiación. Aunque se sale de la presente discusión notamos que Planck dedujo muchos resultados muy importantes de este sistema, como el amortiguamiento y disipación de tal oscilador, y lo que ahora conocemos como la densidad de estados de la radiación; regresaremos a este último resultado más adelante.

Muy poco después de su contratación, Planck “dedujo” su primer resultado en el que “demostró” que el establecimiento del equilibrio del oscilador con la radiación era “realmente” un proceso irreversible. Inmediatamente, Boltzmann le señaló su error. Este fue el incidente con el que Planck inició su conversión a las ideas estadísticas pues aceptó que el balance en equilibrio debía ser entendido sólo en promedio.

Sin embargo, el hecho más importante de estos años es que se realizaron una gran cantidad de experimentos para caracterizar los espectros de emisión de sólidos a diferentes temperaturas. La razón del incremento de estos experimentos fue el accidente histórico que el gobierno alemán del Kaiser Wilhelm II estaba decidido a hacer de Alemania un país industrialmente poderoso, y en particular, había un gran interés en electrificar las ciudades y, en más detalle, en ¡producir focos eficientes! De estos estudios se logró el establecimiento experimental de la función $I(\nu, T)$ para frecuencias *altas*. Durante esa época, alrededor de 1893, W. Wien dedujo primero, con los argumentos termodinámicos de la Sección III.D, que la distribución normal de la radiación, como era conocida, debía ser de la forma,

$$I(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (73)$$

donde $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ es una función desconocida pero que sólo puede depender de ν/T . Esta expresión es conocida como la Ley de Wien. Sin embargo, Wien no se detuvo allí. Usando los

excelentes resultados experimentales de la época, Wein conjeturó que debía ser de la forma,

$$I(\nu, T) \approx a\nu^3 e^{-b\frac{\nu}{T}} \quad (74)$$

con a y b dos constantes a ser determinadas por el experimento. Esta forma ajustaba muy bien a los resultados experimentales que se tenían y, además, explicó muy bien el resultado empírico de que la frecuencia de emisión más intensa ν_{max} de un cuerpo negro aumentaba de forma lineal con la temperatura T . Vea la Fig. 4. Este resultado es conocido como la ley de desplazamiento de Wien.

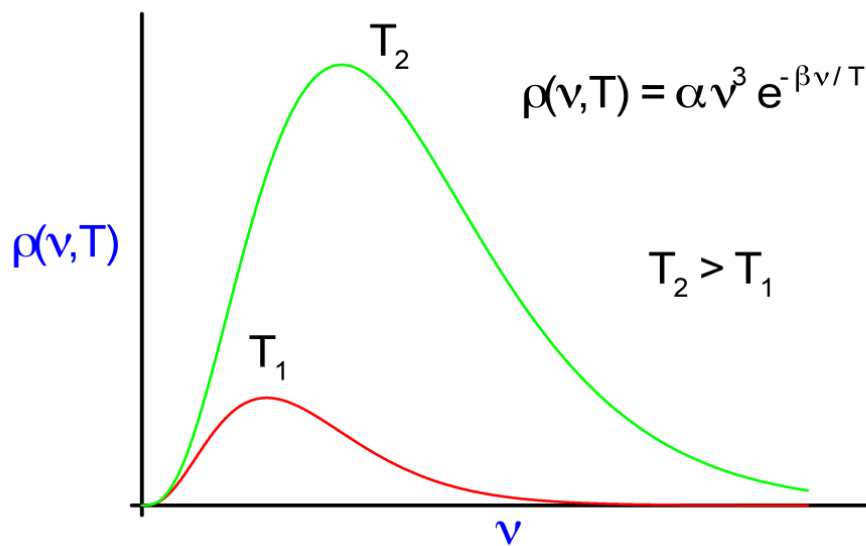


FIG. 4. Ley de desplazamiento de Wien. Usando datos experimentales Wein conjeturó la expresión (73) para la distribución normal de la radiación $I(\nu, T)$. Esta predice que el pico de la distribución se corre linealmente con la temperatura T , un resultado verificable experimentalmente.

Entra Planck en escena. Suponiendo que la distribución dada por la ec. (73), fuera “correcta”, Planck se abocó a “deducirla” de argumentos más generales. El primer paso de gran importancia fue el suponer que la radiación se encontraba en equilibrio dentro de una cavidad de un cuerpo negro hipotético, como el de la Fig. 1. Considerando que la connotación de “cuerpo negro” significa que el coeficiente de absorción es $A(\nu) = 1$ para todas las frecuencias, Planck ideó un modelo de cuerpo negro compuesto de un número muy grande de osciladores cargados, independientes entre sí, cada uno con una frecuencia de oscilación ν definida. Por ejemplo, podemos suponer que el cuerpo tiene N osciladores

de frecuencia ν repartidos uniformemente en la superficie interior de la cavidad, vea la Fig. 1. El conjunto de osciladores tiene temperatura T y energía total U . Suponiendo balance detallado, la radiación electromagnética de frecuencia ν alcanzará el equilibrio con el conjunto de osciladores y también estará a temperatura T . Suponiendo, pues, equilibrio termodinámico entre los osciladores y la radiación, la energía *promedio* de cada oscilador es

$$e(\nu, T) = \frac{U}{N} \quad (75)$$

y el promedio de equilibrio se obtiene porque Planck supone que los osciladores están absorbiendo y emitiendo radiación de forma isotrópica. Es en este trabajo de 1893 donde escribe la relación de equilibrio entre la radiación y un oscilador, fórmula que resulta ser crucial en su desarrollo. Esta es,

$$I(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} e(\nu, T) \quad (76)$$

es decir, la energía por unidad de volumen y frecuencia que contiene la radiación, se balancea con la energía promedio de cada oscilador, multiplicado por el número de modos de frecuencia ν de la radiación. Este último factor “ $8\pi\nu^2/c^3$ ” parece obvio de manera moderna en el contexto del campo electromagnético en términos de fotones. Sin embargo, la deducción de Planck es muy diferente y la obtiene en su estudio inicial de la interacción de osciladores cargados con campo de radiación. Lo más importante de la expresión (76) es que el cálculo de $I(\nu, T)$, que es una propiedad del campo electromagnético en equilibrio termodinámico, se traslada a calcular $e(\nu, T)$ que es una propiedad de un conjunto de osciladores independientes de frecuencia ν . Planck se dio cuenta de esto y su trabajo consistía entonces en calcular ν .

A. Deducción heurística de la fórmula de Wien

Planck se propone deducir la fórmula (74). Primero se da cuenta que si la entropía de N osciladores de frecuencia ν , como función de la energía, *tuviera* la forma,

$$s = -\frac{e}{b\nu} \left[\ln \frac{e}{\alpha\nu} - 1 \right] \quad (77)$$

donde $s = S/N$ es la entropía por oscilador, entonces, de la expresión termodinámica de la temperatura, se obtendría la fórmula de Wien (74). Veamos:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial s}{\partial e} \quad (78)$$

de donde

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{b\nu} \ln \frac{e}{\alpha\nu} \quad (79)$$

lo que nos da

$$e = \alpha\nu e^{-\frac{b\nu}{T}}. \quad (80)$$

Al sustituir esta expresión en la relación (76), obtenemos la fórmula de Wien, identificando $a = 8\pi\alpha/c^3$. Aunque Planck no sabía cómo deducir o justificar la entropía dada por la ec. (77), notó algo adicional de gran importancia que le dio confianza de que la expresión “tenía”. Tomando la segunda derivada de s con respecto a e , se obtiene,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial e^2} = -\frac{1}{b\nu e} < 0, \quad (81)$$

y como por razones experimentales $b > 0$, entonces s es cóncava en e , como lo requiere la segunda ley de la termodinámica.

Como mencionamos arriba, Planck se sentía muy satisfecho con este resultado, aunque bien sabía que no tenía elementos para justificar la expresión (77) de la entropía. La gran sorpresa se la darían los experimentos de finales de 1900.

B. Los experimentos de octubre de 1900 y la interpolación

Este es un detalle que poco se enfatiza en los libros de texto. El cambio de rumbo drástico en la vida tranquila de Planck fueron los experimentos sobre la distribución normal espectral, realizados por dos grupos experimentales en Berlín a finales de 1900. Uno de esos experimentos era el de Lummer y Pringsheim y el otro el de Rubens y Kurlbaum. El avance técnico fue que habían logrado medir la distribución a frecuencias más bajas que el infrarrojo, como se muestra en la Fig. ???. El detalle anecdótico fue que el domingo 7 de octubre de 1900, en una comida, Rubens le platica a Planck que la fórmula de Wien era completamente incorrecta a esas frecuencias. Es decir, que en vez de la expresión (74), un mejor ajuste era

$$I(\nu, T) \approx A\nu^2 T, \quad \text{frecuencias bajas} \quad (82)$$

con A una constante a ser ajustada experimentalmente. Notamos que es la de forma de la ley de Wien, ec. (73), $I(\nu, T) = \nu^3 f(\nu/T)$, pero que es imposible que sea un límite de la fórmula (74) válida a frecuencias altas, que repetimos a continuación,

$$I(\nu, T) \approx a\nu^3 e^{-\frac{b\nu}{T}}, \quad \text{frecuencias altas.} \quad (83)$$

Ese mismo día, Planck inició su jornada que lo llevaría al descubrimiento de la constante h .

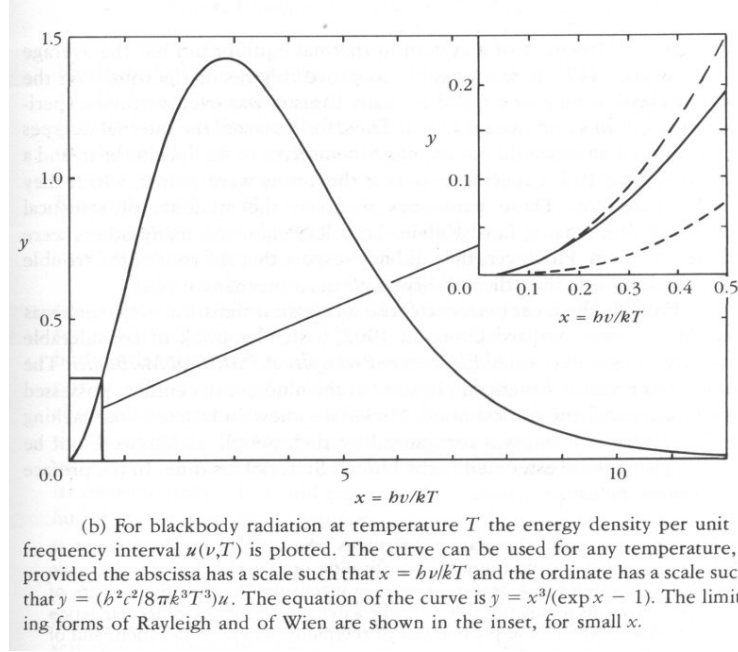


FIG. 5. Aparato de Kurlbaum y Rubens para medir la intensidad de la radiación de cuerpo negro a frecuencias en el infrarrojo.

Lo primero que hizo Planck fue proceder de manera heurística buscando una expresión para la entropía que, por un lado, fuera cóncava en la energía y, por el otro, diera los valores correctos tanto para frecuencias altas como para frecuencias bajas. Planck notó lo siguiente: si la concavidad de s , para frecuencias altas, es

$$\frac{\partial^2 s}{\partial e^2} \approx -\frac{1}{b\nu e} < 0 \quad \text{frecuencias altas} \quad (84)$$

entonces, después de una integración e igualando a $1/T$, se obtiene la fórmula de Wien (83), mientras que si proponemos, para frecuencias bajas,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial e^2} \approx -\frac{A}{e^2} < 0 \quad \text{frecuencias bajas}, \quad (85)$$

de nuevo, integrando e igualando a $1/T$, se obtiene la fórmula experimental de frecuencias bajas, dada por la ec. (82). Por lo tanto, Planck propuso la siguiente interpolación,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial e^2} = -\frac{A}{e^2 + g(\nu)e} < 0 \quad (86)$$

con $g(\nu)$ una función a determinarse, pero monotónica en ν y con las propiedades,

$$\begin{aligned} g(\nu) &\rightarrow 0 & \text{si } \nu &\rightarrow 0 \\ g(\nu) &\rightarrow \infty & \text{si } \nu &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (87)$$

Así, en los límites apropiados, obtenemos los resultados experimentales (84) y (85). Este trabajo de “interpolación” es confundido en muchos textos por el trabajo fundamental que discutiremos más adelante.

El siguiente paso es integrar una vez la expresión de la concavidad (86), igualarla a $1/T$, y resolverla para la energía por oscilador e . Se obtiene,

$$e = \frac{g(\nu)}{e^{\frac{g(\nu)}{AT}} - 1}. \quad (88)$$

Sustituyendo ahora en la crucial fórmula para el equilibrio entre la radiación y los osciladores, ecuación (76), se obtiene la expresión para la distribución espectral de la energía de la radiación,

$$I(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{g(\nu)}{e^{\frac{g(\nu)}{AT}} - 1}. \quad (89)$$

Sin embargo, la ley de Wein $I(\nu, T) = \nu^3 f(\nu/T)$, correcta rigurosamente por un argumento termodinámico, debe obedecerse, por lo que la función desconocida $g(\nu)$ debe ser una función lineal de ν ,

$$g(\nu) = B\nu, \quad (90)$$

con B otra constante. El resultado es,

$$I(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{B\nu^3}{e^{\frac{B\nu}{AT}} - 1}, \quad (91)$$

de nuevo, en términos de dos constantes desconocidas, A y B .

El 19 de octubre de 1900, en un seminario de la Academia Prusiana de Ciencias, Planck presenta esta deducción y la historia es que esa misma noche, su colega Rubens, verifica que la fórmula de Planck ajusta perfectamente los datos experimentales en todo los intervalos medidos. Al otro día se lo comunica a Planck, y éste inicia lo que luego calificaría como el “trabajo más extenuante de mi vida” en su búsqueda por una deducción correcta de la entropía de N osciladores independientes.

C. La hipótesis cuántica, 14 de diciembre de 1900.

Como mencionamos arriba, Planck sabía que la clave estaba en la expresión de la entropía S de N osciladores independientes, con una energía total U dada, es decir $S = S(U, N)$. En su desesperación, Planck finalmente concede y hace a un lado su rechazo a las ideas estadísticas de Boltzmann y, como consecuencia, decide usar la fórmula que este ltimo había usado para calcular la entropía de un gas ideal; vea la ecuación (72), que repetimos aquí:

$$S = \frac{R}{N_0} \ln W(U, V, N). \quad (92)$$

Este es un paso muy valiente pues, por un lado, Planck no había querido aceptar esta expresión por muchísimos años, y por otro lado, más académico, no había ninguna razón para que la fórmula fuera aplicable a los osciladores del cuerpo negro hipotético de Planck. Aún así, Planck la consideró como válida y el problema ahora era cómo calcular $W(U, N)$, el número de *estados* posibles de N osciladores de frecuencia ν cuya energía total es U .

El problema anterior es muy sutil ya que si un oscilador puede tomar un continuo de valores de energía, entonces, se obtendría un número infinito de configuraciones W de los N osciladores con diferentes energías, pero cuya suma fuera igual a U . Por lo tanto, para poder calcular tal número W de estados y obtener un número finito, Planck realizó la hipótesis más atrevida. Supuso que la energía total U podía dividirse en “pedacitos” de energía iguales ε , tal que

$$U = P\varepsilon \quad (93)$$

con $P \gg 1$ un número entero de tales pedazos para sumar U . El siguiente paso es relativamente sencillo ahora, aunque en tiempos de Planck no era un cálculo cotidiano de la estadística. Dado que los pedacitos de energía son *indistinguibles* pero los osciladores no, por estar cada uno en algún lugar fijo de las paredes del cuerpo negro, entonces $W(U, N)$ es igual a:

$$W(U, N) = \text{el número de maneras de repartir } P \text{ pedazos indistinguibles de energía } \varepsilon \\ \text{en } N \text{ osciladores distinguibles.} \quad (94)$$

Se deja al lector demostrar que este resultado es el mismo que el de repartir P pelotas iguales en N cajas diferentes, con la posibilidad de ocupación múltiple; es decir, podemos incluir el

caso que $N > P$. El resultado es,

$$W(U, N) = \frac{(N + P - 1)!}{(N - 1)!P!}. \quad (95)$$

Como nota adicional histórica, este mismo cálculo fue esencialmente el que hizo N. Bose en 1924 para recalculer la distribución de Planck, pero ahora suponiendo que los fotones eran partículas indistinguibles; en otras palabras, este cálculo de Planck tiene ya la esencia de la distribución de Bose-Einstein.

Sustituyendo en la expresión de la entropía de Boltzmann, ec. (72), y usando la aproximación de Stirling

$$\ln M! \approx M \ln M - M \quad (96)$$

válida para $M \gg 1$, se obtiene la expresión de la entropía largamente buscada por Planck,

$$S(U, N) = \frac{R}{N_0} N \left[\left(1 + \frac{U}{N\varepsilon}\right) \ln \left(1 + \frac{U}{N\varepsilon}\right) - \frac{U}{N\varepsilon} \ln \frac{U}{N\varepsilon} \right]. \quad (97)$$

Usando de nuevo que,

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} \quad (98)$$

se obtiene la energía promedio por oscilador,

$$\frac{U}{N} = \frac{\varepsilon}{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} \quad (99)$$

donde Planck identificó

$$k = \frac{R}{N_0} \quad (100)$$

como una constante a ser determinada en el experimento, ahora llamada constante de Boltzmann. Si luego se usa la expresión del balance de energía entre los osciladores y la radiación, ecuación (76), se llega a

$$I(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon}{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}. \quad (101)$$

Una vez más apelando a la ley de Wein, $I(\nu, T) = \nu^3 f(\nu/T)$, debe entonces ser cierto que,

$$\varepsilon = h\nu \quad (102)$$

donde h es la segunda constante a ser determinada experimentalmente, y que ahora se conoce como la constante de Planck. El resultado final es la bien conocida distribución de Planck que dedujimos en la Sección IV,

$$I(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{-\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (103)$$

Esta deducción la presentó Planck en el seminario de la Academia Prusiana de Ciencias el 14 de diciembre de 1900. Hay muchísimas aristas que afinar de la distribución de Planck. Primero, comentaremos lo que Planck en persona dedujo. De los resultados experimentales, Planck ajustó los siguientes valores para h y k ,

$$h = 6.55 \times 10^{-27} \text{ erg seg} \quad k = 1.346 \times 10^{-16} \text{ erg/K.} \quad (104)$$

Estos valores son increíblemente cercanos a los actuales, $h = 6.626 \times 10^{-27} \text{ erg seg}$ y $k = 1.381 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$, lo cual atestigua la alta precisión de los experimentos de la época. Con respecto a la constante de Boltzmann, Planck notó que debería ser igual a R/N_0 , y dado que se conocía la constante universal de los gases $R = 8.31 \times 10^7 \text{ erg/K mol}$, Planck obtuvo el número de Avogadro,

$$N_0 = 6.175 \times 10^{23} \quad (105)$$

que también es muy cercano al actual $N_0 = 6.022 \times 10^{23}$. ¡Es de notarse que este número es muchísimo mejor que el que obtuvo J. Perrin en 1909! Planck fue más allá. Como la constante de Faraday es $F = N_0 e$, con e la carga del electrón, obtuvo $e = 4.69 \times 10^{-10} \text{ esu}$, que es mucho más cercano al actual $4.80 \times 10^{-10} \text{ esu}$, que el que se usó todavía por mucho tiempo. Por ejemplo, Rutherford obtuvo 11 años después el valor $e = 4.65 \times 10^{-10} \text{ esu}$.

Así pues, la constante k tenía una “explicación” y/o justificación. —‘No así la nueva constante h ! Planck al inicio creía que tal constante tenía un origen puramente electromagnético dado que era parte del espectro normal de la radiación en equilibrio térmico. Planck tardó más de 30 años en aceptar que había descubierto una constante fundamental de la Naturaleza.

Existe mucho debate sobre si Planck conocía o no un trabajo previo de Rayleigh donde éste dedujo la fórmula de la radiación a “bajas frecuencias” dada por la ecuación (82). Rayleigh la obtuvo usando ideas rudimentarias del principio de equipartición de la energía, conocido desde los tiempos de Boltzmann y Maxwell. En este principio se le asigna un factor lineal en la temperatura T a la energía de cada grado de libertad en equilibrio. Dado que se sabía ya que el número de modos electromagnéticos se escala como ν^2 , entonces se podía deducir que la energía de la radiación debería ser $I = A\nu^2 T$, con A constante. Sin embargo, Rayleigh bien sabía que este resultado no podía ser válido a toda frecuencia, por lo que especuló que podría ser,

$$I(\nu, T) \approx A\nu^2 T e^{-b\frac{\nu}{T}}. \quad \text{Rayleigh} \quad (106)$$

La Fig. 6 muestra un ajuste de los datos experimentales con diferentes teorías, incluida la de Thiesen, otra forma empírica de la época.

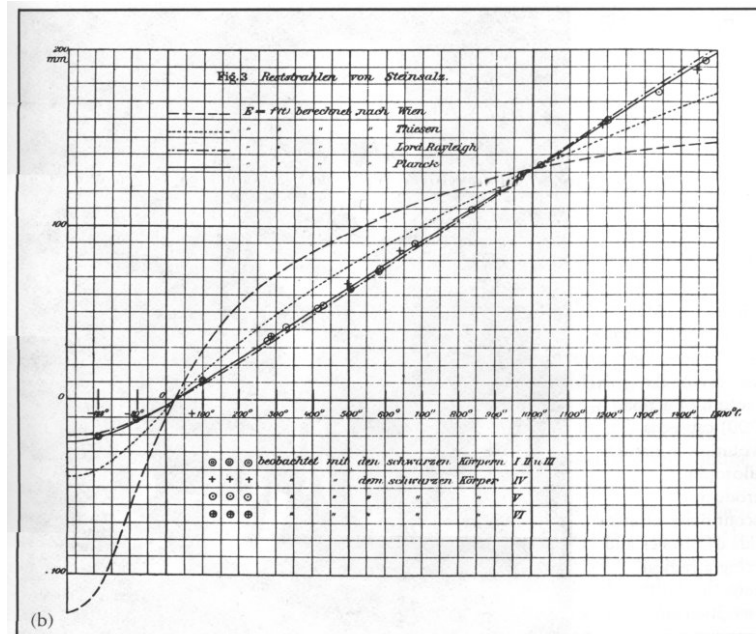


FIG. 6. Comparación de diferentes ajustes a los datos experimentales. El ajuste de Thiesen corresponde a una ley $I = A\nu^2 T(b\nu/T)^{1/2} \exp -b\nu/T$.

Los historiadores se inclinan a creer que Planck sí conocía el trabajo de Rayleigh. Sin embargo, recordemos que Planck no era todavía un creyente consumado de las ideas estadísticas y probablemente no le dio la importancia apropiada. Por otro lado, es evidente que el resultado a bajas a frecuencias puede ser “exacto” sólo en el límite $h \rightarrow 0$. Sin embargo, tal límite es inaceptable para recuperar el acuerdo experimental de la distribución completa. —‘Es claro que Planck entendió perfectamente que la constante h no podía ignorarse! ... En algunos textos se cita que si el resultado de frecuencias bajas (82) fuera correcto para toda frecuencia, se tendría una divergencia al integrarlo en todos los valores posibles, causando una “catástrofe ultravioleta”. Es de interés histórico que tal calificativo fue inventado 11 años después por P. Ehrenfest, en una monografía para explicar el trabajo de Planck.

Aun con sus dudas, Planck notó inmediatamente que la hipótesis sobre los pedacitos de la energía que el usó primero como un artefacto matemático para poder “contar” estados,

daba lugar de manera obligatoria a postular que su valor tenía forzosamente que ser $\varepsilon = h\nu$. Esto a su vez indicaba algo muy extraño y ajeno a la física conocida, y es que los osciladores sólo podían absorber y emitir energía en múltiplos de ese *cuanto*. De nuevo, Planck creía que esto debería ser explicable en términos de propiedades de la radiación. No fue sino hasta 1905 que A. Einstein, abordando de nuevo el problema del cuerpo negro, esencialmente dedujo este resultado (y en 1906 le dió todo el crédito a Planck) y le llevó a concluir que tal proceso “cuántico” estaba en completa contradicción con la física conocida ya que esta no condicionaba a los cuerpos a radiar en forma discreta sino que podía ser de forma continua. Por lo tanto, algo tenía que haber en el proceso de equilibrio absorción-emisión que no se estaba comprendiendo. Es muy interesante que estas ideas termodinámicas llevaron a Einstein a pensar que la parte “discreta” estaba en la radiación misma y que, por lo tanto, la radiación podía pensarse como compuesta por “partículas”. Este primer ejemplo de la dualidad onda-partícula le permitió a Einstein explicar el efecto fotoeléctrico.

Estas ideas y discusiones fueron claves para el desarrollo de la mecánica cuántica. En particular, N. Bohr, en 1911, usó la idea básica de que la radiación se emite en cuantos de energía $h\nu$ para formular su modelo del átomo. Es curioso notar que Bohr, como otros, tampoco adjudicó a la radiación su aspecto corpuscular por este medio, simplemente lo tomó como la forma en que la luz se emitía en las transiciones atómicas. Es una ironía histórica que lo único que quedó como cierto del modelo de Bohr es la forma en la que se emiten los fotones.