

# Introducción a la Física Cuántica

Víctor Romero Rochín

26 de agosto de 2018

## 1. Ondas esféricas

Una onda esférica es aquella que sus frentes de onda son esferas, es decir, que en cada esfera el valor de la onda es el mismo, para un tiempo dado.

De la clase, recordemos que hemos considerado dos tipos de ondas (lineales)  $\psi(\vec{r}, t)$ : *No dispersivas* si obedecen la ecuación

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (1)$$

con  $v$  la velocidad constante de todas las ondas y, *dispersivas* si, por ejemplo, obedecen una ecuación del tipo,

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + ia \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2)$$

con  $a$  una constante.

Una onda esférica es resultado de que en un punto, digamos  $\vec{r} = 0$ , el origen, una *fente puntual* emite la onda. Buscamos entonces soluciones a las ecuaciones anteriores, tales que

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(r, t) \quad (3)$$

donde  $r = |\vec{r}|$  es la magnitud del vector  $\vec{r}$ . Es decir, buscamos una onda que sólo dependa de la coordenada  $r$  y no de los ángulos. Por lo tanto, para todo valor  $r$  y  $t$  dados, la onda  $\psi(r, t)$  es la misma. Como  $r = \text{cte}$  es una esfera, la onda entonces tiene dicha simetría. Esto sugiere, evidentemente, que consideremos coordenadas esféricas para describir dicha onda.

Recuerde primero que, en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , el Laplaciano está dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (4)$$

Ahora considere la siguiente forma de la onda,

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (5)$$

con  $A$  una constante compleja. Si el vector de onda lo suponemos  $\vec{k} = k\hat{r}$ , con  $\hat{r} = \vec{r}/r$  el vector unitario radial, entonces

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}, \quad (6)$$

que es una onda que viaja radialmente del punto donde se genera la onda a cualquier punto  $r$ . Muestre que la forma anterior de la onda es solución a ambas ecuaciones de onda, no dispersiva o dispersiva, si en la primera  $\omega = kv$  y si en la segunda  $\omega = k^2/a$ . Note el factor  $1/r$  en la onda; sin ese factor no puede ser solución a las ecuaciones. Si ahora calculamos la intensidad de la onda, obtenemos,

$$\begin{aligned} I(\vec{r}, t) &= \psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t) \\ &= \frac{|A|^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Notamos, pues, que la intensidad se va haciendo menor conforme nos alejamos de la fuente. Si integramos la onda en una esfera de radio  $r$ , obtenemos,

$$\begin{aligned} \int I(\vec{r}, t) dS &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta r^2 I(\vec{r}, t) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta r^2 \frac{|A|^2}{r^2} \\ &= 4\pi|A|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Esto nos muestra que, a pesar de que la amplitud de la onda va decayendo conforme  $r$  crece, la *integral* de la intensidad en cada esfera  $r$  se mantiene constante. **NOTA:** En la integral usamos que la diferencial de superficie, en coordenadas esféricas, es  $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ .

## 2. Interferencia: el experimento de Young de las dos rendijas.

Este es un experimento clásico que Thomas Young realizó en 1801 para demostrar que la luz era una onda. Consiste en suponer que una onda plana incide normalmente sobre una placa delgada con dos rendijas (o agujeros), tales que estas sirven de “fuentes puntuales” de dos ondas esféricas que emanan (en fase) de cada rendija o agujero. Vea la figura. Este experimento evidencia el fenómeno de interferencia y, como veremos adelante, evidencia también la esencia de la Mecánica Cuántica.

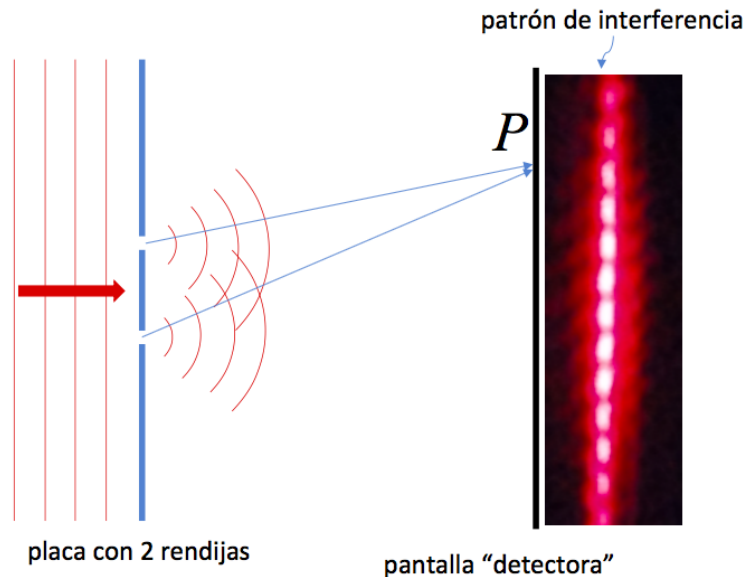


Figura 1: Experimento de Young de las dos rendijas. El patrón de interferencia de la derecha del diagrama es lo que se observa sobre la pantalla, en ese caso, con un láser rojo y unas rendijas caseras.

Para estudiar el problema, colocamos el origen de las coordenadas en el punto medio entre las rendijas. La coordenada  $z$  va a lo largo de la placa con las rendijas,  $x$  es perpendicular a dicha placa y el dibujo está en el plano  $y = 0$ . Denotamos por  $d$  la distancia entre las rendijas y consideramos que la pantalla donde se realiza la observación, está a una distancia  $L$  de las rendijas. Por simplicidad, supondremos que  $L \gg d$ .

El papel de la onda plana incidente jugará un papel importante en la discusión posterior sobre aspectos cuánticos. En este momento, es sólo una manera práctica de realizar que, de cada una de las rendijas, emana una onda esférica y que no sólo ambas tienen la misma frecuencia  $\omega$  y la misma longitud de onda  $\lambda$ , sino que están en *fase*. Es decir, que cuando emanan de las rendijas tienen el mismo valor. Esto nos permite concluir que la onda resultante, evaluada en un punto arbitrario del espacio, digamos un punto  $P$  de la

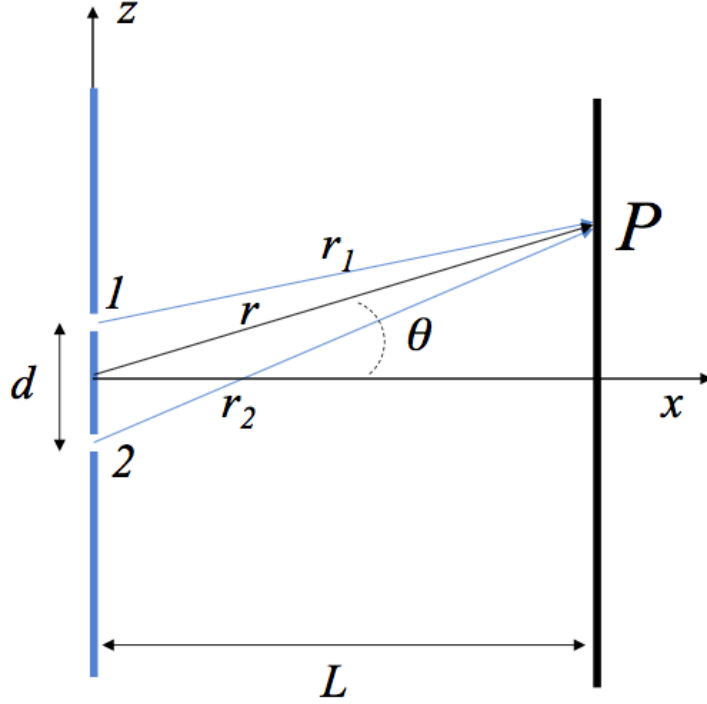


Figura 2: Diagrama del experimento de Young de las dos rendijas. El origen de las coordenadas se coloca en el punto medio entre las rendijas. La coordenada  $z$  va a lo largo de la placa con las rendijas,  $x$  es perpendicular a dicha placa y el dibujo está en el plano  $y = 0$ . En el texto se describen las demás variables.

La intensidad en la pantalla como se muestra en la Figura 2, se puede escribir como la suma de dos ondas esféricas que emanan cada una de las rendijas:

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}, t) &= \Psi_1(\vec{r}, t) + \Psi_2(\vec{r}, t) \\ &= \frac{A}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} + \frac{A}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)}\end{aligned}\quad (9)$$

donde  $A$  es una constante compleja en general,  $k = 2\pi/\lambda$  es el número de onda, y  $r_1$  y  $r_2$  son las distancias de las rendijas al punto de observación, como se muestra en la Figura 2. Expresamos ahora las distancias  $r_1$  y  $r_2$  en términos del vector de posición  $\vec{r}$  o, equivalentemente, en términos de  $r$  la distancia del origen a  $P$  y  $\theta$  el ángulo entre  $\vec{r}$  y el eje  $x$ :

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \frac{d}{2}\hat{z} \quad \vec{r}_2 = \vec{r} + \frac{d}{2}\hat{z} \quad (10)$$

lo que nos da,

$$r_1 = \sqrt{r^2 - rd \sin \theta + \frac{d^2}{4}} \quad r_2 = \sqrt{r^2 + rd \sin \theta + \frac{d^2}{4}}. \quad (11)$$

Como hemos supuesto que  $L \gg d$  y dado que  $r$  es evaluado sobre la pantalla en  $y = 0$ , tenemos que  $r = \sqrt{z^2 + L^2}$ . Por lo tanto, es cierto que  $r \gg d$ . Esto implica que a primer orden en  $d/r$ ,  $r_1$  y  $r_2$  pueden escribirse como,

$$r_1 \approx r - \frac{d}{2} \sin \theta \quad r_2 \approx r + \frac{d}{2} \sin \theta. \quad (12)$$

Sustituimos estas aproximaciones en la onda  $\psi(\vec{r}, t)$ , Ec. (9), y obtenemos,

$$\psi(\vec{r}, t) \approx \frac{A}{r - \frac{d}{2} \sin \theta} e^{i(k(r - \frac{d}{2} \sin \theta) - \omega t)} + \frac{A}{r + \frac{d}{2} \sin \theta} e^{i(k(r + \frac{d}{2} \sin \theta) - \omega t)}. \quad (13)$$

Notamos que mientras la corrección  $(d/2) \sin \theta$  puede ser despreciada en los denominadores, debido a que sólo modificaría ligeramente la evaluación de las distancias no es así en las fases de las exponenciales. Esto se debe a que la función exponencial compleja es armónica (periódica) y es sensible a pequeños cambios. Esto nos permite aproximar función  $\psi$ , obteniendo,

$$\psi(\vec{r}, t) \approx \frac{A}{r} e^{i(k(r - \frac{d}{2} \sin \theta) - \omega t)} + \frac{A}{r} e^{i(k(r + \frac{d}{2} \sin \theta) - \omega t)}. \quad (14)$$

Esta expresión puede finalmente escribirse como,

$$\psi(\vec{r}, t) \approx \frac{2A}{r} \cos\left(\frac{kd}{2} \sin \theta\right) e^{i(kr - \omega t)}. \quad (15)$$

Esta expresión corresponde, aproximadamente, a una onda que emana del origen, pero con una amplitud que depende del ángulo  $\theta$  debido a la interferencia de las dos ondas. Analicemos ahora la intensidad de la onda resultante,

$$\begin{aligned} I(r, \theta) &= \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) \\ &= \frac{4|A|^2}{r^2} \cos^2\left(\frac{kd}{2} \sin \theta\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Recordando que  $k = 2\pi/\lambda$ , podemos escribir la expresión anterior como,

$$I(r, \theta) = \frac{4|A|^2}{r^2} \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right) \quad (17)$$

y, otra forma también útil se puede hallar usando la identidad  $\cos^2 \alpha = (1/2)(1 + \cos 2\alpha)$ ,

$$I(r, \theta) = \frac{|A|^2}{r^2} + \frac{|A|^2}{r^2} + \frac{2|A|^2}{r^2} \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta\right). \quad (18)$$

En esta última expresión notamos que  $|A|^2/r^2$  es la intensidad de una sola onda, en  $r$ , cuando la otra no está presente.

Tanto de la expresión (17) como de (18), observamos que la intensidad  $I(r, \theta)$  tiene *máximos* cuando:

$$I(r, \theta) = \frac{4|A|^2}{r^2} \quad \text{si} \quad \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{constructiva} \quad (19)$$

y en este caso decimos que existe *interferencia constructiva*. Note que el valor máximo de la intensidad es 4 veces la intensidad si sólo estuviera presente una de las ondas (en ese punto  $(r, \theta)$ ). Por el contrario, la intensidad es cero (o *mínima*), si

$$I(r, \theta) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta = \frac{2n + 1}{2}\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{destruktiva} \quad (20)$$

y la llamamos *interferencia destruktiva*.

Una forma más sugerente es reescribir las condiciones anteriores son

$$d \sin \theta = n\lambda \quad \text{constructiva}; \quad d \sin \theta = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{destruktiva}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (21)$$

Esto nos dice que la cantidad  $d \sin \theta$  juega un papel esencial en determinar la interferencia. Veamos.

La interferencia constructiva, que es cuando la onda alcanza valores máximos, se debe a que la crestas (o valles) de las ondas llegan en fase, es decir llegan las dos crestas o los dos valles al mismo punto de manera simultánea. Como se indica en la Figura 3, esto sólo puede ocurrir si la diferencia de las distancias  $|r_1 - r_2|$ , al punto de observación, es igual a un número entero de longitudes ( $n\lambda$ ). Por el contrario, si la diferencia  $|r_1 - r_2|$  es igual a un número impar de medias longitudes de onda ( $(2n + 1)\lambda/2$ ), entonces las ondas llegarán una en una cresta y la otra en un valle y se cancelarán dando lugar a la interferencia destruktiva. A la distancia  $\Delta = |r_1 - r_2|$  se le llama la *diferencia de camino óptico* de la ondas. Podemos entonces, en general, establecer la regla de las interferencias en términos de la diferencia de camino óptico:

$$\Delta = n\lambda \quad \text{constructiva}; \quad \Delta = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{destruktiva}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (22)$$

Tanto de la Figura 3, como de la aproximaciones dadas por Eqs.(12), concluimos que la diferencia de camino óptico  $\Delta$  es, aproximadamente,  $d \sin \theta$ ,

$$\begin{aligned} \Delta &= |r_1 - r_2| \\ &\approx \left| \left( r - \frac{d}{2} \right) - \left( r + \frac{d}{2} \right) \right| \\ &= d \sin \theta. \end{aligned} \quad (23)$$

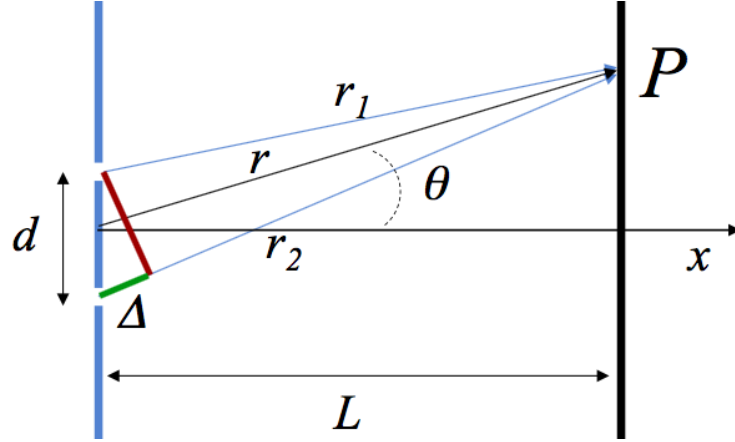


Figura 3: Diferencia de camino óptico. La diferencia entre las distancias  $r_1$  y  $r_2$ , al punto de observación  $P$ , se define como  $\Delta = |r_1 - r_2|$ . De la figura observamos que dicha distancia es aproximadamente  $\Delta \approx d \sin \theta$  si  $L \gg d$ , ya que en este caso las rectas  $r_1$  y  $r_2$  son casi paralelas cerca de las rendijas. La cantidad  $\Delta$  determina el carácter de la interferencia, vea el texto.

Ahora analicemos los diferentes patrones de interferencia que podemos obtener dependiendo del valor relativo entre  $d$ , la separación de las rendijas, y  $\lambda$ , la longitud de onda. Recordamos que siempre consideramos que la pantalla está “lejos” de las rendijas, es decir,  $L \gg d$ . Los diferentes casos se ejemplifican en la Figura 4. En la figura, el valor de la intensidad  $I_0$  es,

$$I_0 = \frac{4|A|^2}{L^2} \quad (24)$$

que es el valor en el centro de la pantalla,  $z = 0$ ,  $x = L$  y  $y = 0$ .

**Caso A:**  $d \gtrsim 2\lambda$ .

En este caso la distancia  $d$  es ligeramente *mayor* que  $2\lambda$ , es decir,  $\lambda/d \lesssim 1/2$ . Por lo tanto, escribiendo la la condición de interferencia destructiva como,

$$\sin \theta = \frac{2n + 1}{2} \frac{\lambda}{d} \quad (25)$$

observamos que el primer cero de interferencia destructiva cuando cuando el ángulo  $\theta$  obedece  $\sin \theta = \pm \lambda/2d$ , es decir, el ángulo existe pues  $\sin \theta < 1$ . Este caso se ilustra en la Figura 4 (A) para  $d = 5\lambda$  y se observan varios mínimos y máximos. Note que si  $n$  se incrementa lo suficientemente grande, entonces  $|(2n + 1)\lambda/2d| > 1$  y ya no hay solución a la ecuación 25. Este es el caso más eficiente para observar con claridad al patrón de interferencia.

**Caso B:**  $2d < \lambda$ .

Ahora  $d$  es *menor* que  $\lambda/2$ . En esta situación ya no es posible tener ceros de interferencia destructiva, pues  $|(2n + 1)\lambda/2d| > 1$  siempre, para toda  $n$ , es decir, la ecuación (25) no

tiene soluciones. Esto se ejemplifica en la Figura 4 (B). Note, sin embargo, que sí hay interferencia. De hecho, lo que ocurre es que el pico central del patrón de interferencia se hace muy ancho, más si  $d$  se hace mucho menor que  $\lambda$ .

**Casos C y D :**  $d \gg \lambda$ . Este es un caso muy interesante e importante. Se tiene que la distancia  $d$  es muchísimo mayor que la longitud de onda. Es similar al caso (A) en el sentido que existen ceros de interferencia, pero difieren desde la perspectiva que son *muchos* ceros. Considere el caso  $n = 0$  en la expresión (25), que corresponde al primer cero en la dirección positiva de  $z$ :

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2d} \ll 1 \quad (26)$$

Esto indica que el ángulo  $\theta$  también es muy pequeño. Es decir  $\theta \approx \lambda/2d \ll 1$  y, evidentemente, existe un número enorme de máximos y mínimos, más mientras mas grande sea  $d$  comparada con  $\lambda$ . La Figura 4 (C) muestra el caso  $d = 10000\lambda$ . La gráfica se observa casi como continua, es decir, *no* se observan las oscilaciones debido a que el grosor de la línea azul del patrón es mas grueso que la resolución necesaria para observar las oscilaciones del patrón. En la vida real, esto es más contundente ya que cualquier detector de la intensidad de una onda tiene una mínima resolución. Es decir, existe un tamaño *mínimo* del detector, abajo del cual ya no puede resolver las oscilaciones y, como consecuencia, *promedia* lo que detecta.

En la Figura 4 (D) tenemos 2 curvas, una continuaa y otra de puntos con una pequeña irregularidad. Para obtener esta última se tomó el patrón de la Figura 4 (C) y, en el eje  $z$ , se consideraron 100 intervalos (o cajitas) del mismo tamaño, y se promedió el valor de  $I(r, \theta)$  en cada intervalo. El resultado es la gráfica de puntos. Otra manera de hacer este promedio es usando la ecuación (18) y promediándola directamente:

$$\begin{aligned} \overline{I(r, \theta)} &= \frac{|A|^2}{r^2} + \frac{|A|^2}{r^2} + \frac{2|A|^2}{r^2} \overline{\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)} \\ &= \frac{|A|^2}{r^2} + \frac{|A|^2}{r^2} \end{aligned} \quad (27)$$

debido a que el promedio de un coseno es cero (lo mismo se obtiene usando la ecuación (17) y recordando que  $\overline{\cos^2 \alpha} = 1/2$ ). La curva continua de la Figura 4 (D) es este promedio. El resultado es muy profundo: Hallamos que el promedio es equivalente a *cancelar* el término de interferencia, dando como resultado que la intensidad es tan sólo la suma de las intensidades de las ondas por separado. Decimos entonces que, si  $d \gg \lambda$ , no existe interferencia ... las ondas se vuelven rayos ... la ondas se vuelven partículas.



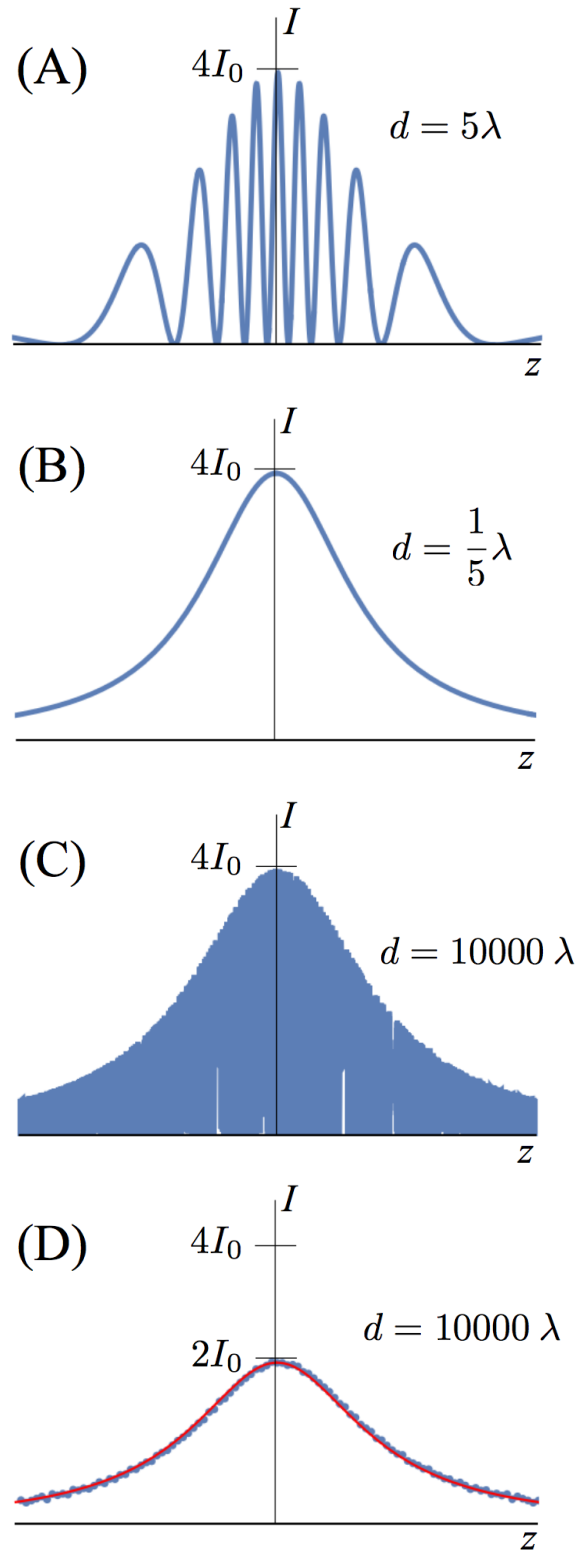


Figura 4: Patrones de interferencia.