Cómo Planck introdujo la constante *h*: una interpretación.

Víctor Romero Rochín
Instituto de Física, UNAM

Clase de IFC
10 de agosto de 2018

MAX PLANCK

(1858 – 1947)

• Nació en Kiel, Alemania.

• Estudio bajo Kirchhoff y Helmholtz.

• Profesor de la Universidad de Berlín.

• Descubre *h* en 1900.

• Premio Nobel 1918 por “el establecimiento y desarrollo de la teoría de los cuantos elementales”.

TERMODINAMICA (1840´s)

... Carnot, Helmholtz, Mayer, Kelvin, Clausius

1ª LEY: Conservación de la energía

$$\Delta E = \underset{\text{Trabajo}}{W} + \underset{\text{Calor}}{Q}$$

$$Q = \underset{\text{Temperatura}}{T} \Delta S$$

S ENTROPIA

2ª LEY: La entropía NO disminuye en ningún proceso de un cuerpo aislado.

¿Qué es la entropía?

Ludwig Boltzmann   1872

$$S = k \ln W$$

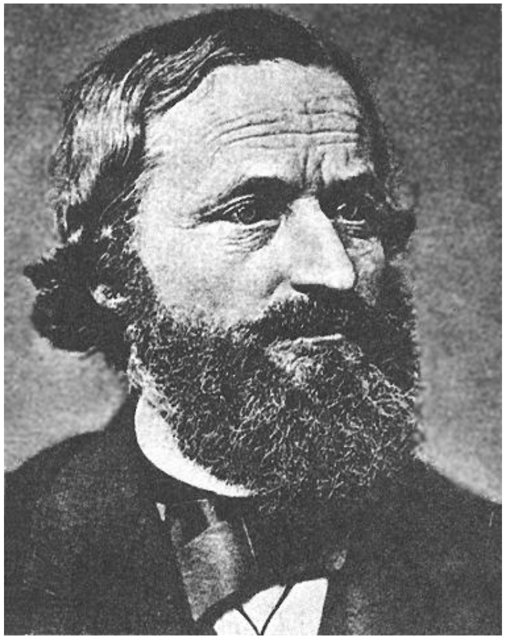
Número de estados "microscópicos" POSIBLES de un estado "macroscópico".

... resultado estadístico!

2ª LEY: *S* (CASI) nunca disminuye ...

... a muchos no les gustó, incluyendo a Planck.

RADIACION DE CUERPO NEGRO



Gustav Kirchhoff 1859

Un cuerpo a temperatura T en equilibrio termodinámico con radiación electromagnética

$$\frac{emisividad}{absorbancia} = \rho(\nu, T)$$

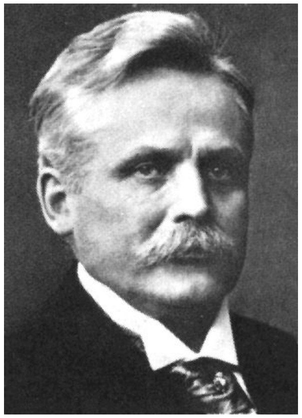
$\rho(\nu, T) =$ cantidad de energía de radiación, por volumen, con frecuencia ν y a temperatura T

¡UNIVERSAL e independiente del material!

CUERPO NEGRO: absorbancia = 1. Toda la radiación que absorbe la emite y es igual a $\rho(\nu, T)$

LA LEY DE WIEN 1893

Wilhelm Wien



Con argumentos puramente de termodinámica y electrodinámica:

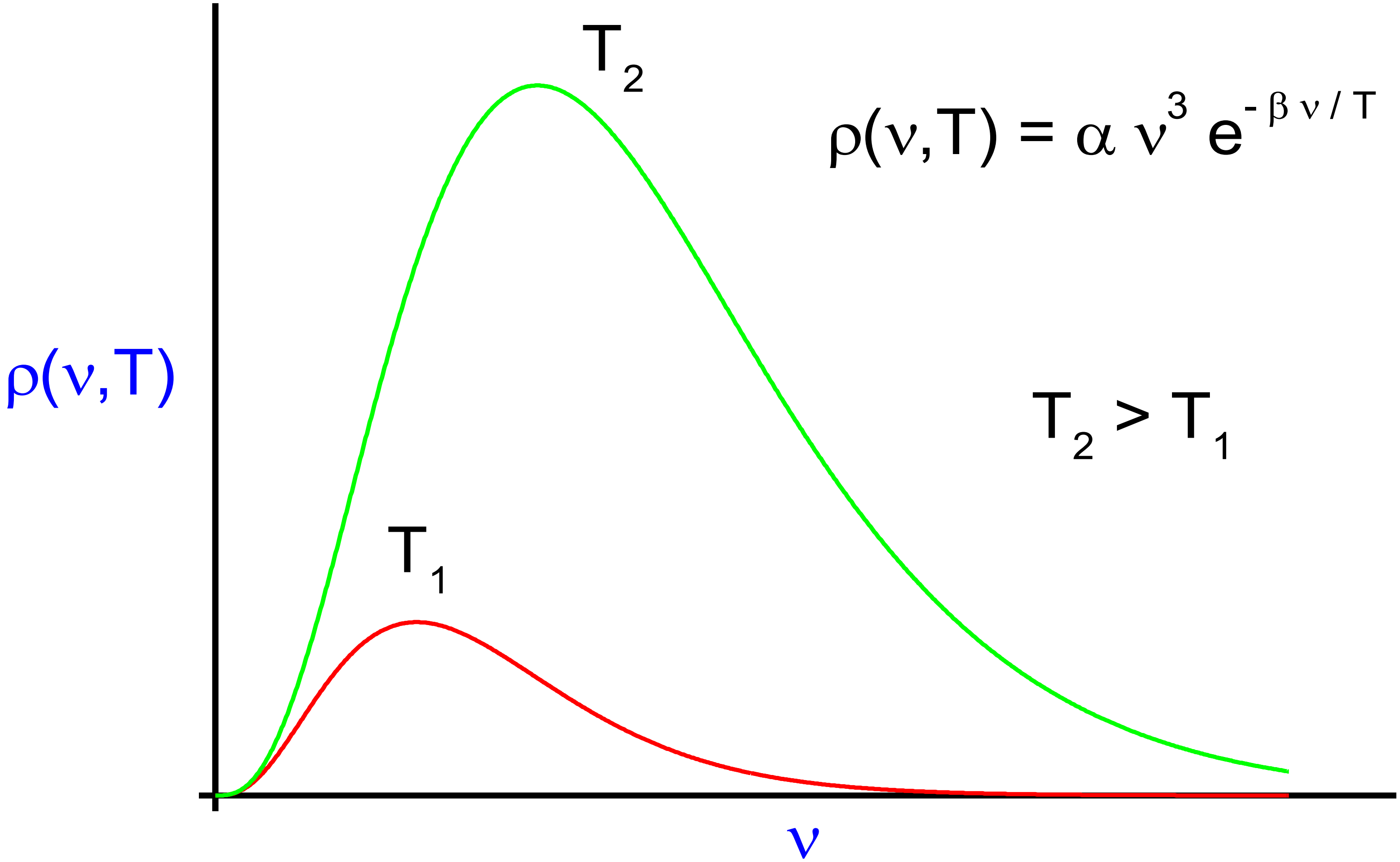
$$\rho(\nu, T) = \nu^3 f(\frac{\nu}{T})$$

... con algunos datos experimentales y con la observación que a mayor temperatura un cuerpo emite a más altas frecuencias

$$\rho(\nu, T) \simeq \alpha \nu^3 e^{-\beta \frac{\nu}{T}}$$

"Ley de desplazamiento" de Wien ... verificada aprox. en 1897

Ley de desplazamiento de Wien



... entra Planck en la escena: Desde 1890 en adelante decide estudiar el problema del cuerpo negro.

Su meta es deducir la irreversibilidad (2ª Ley de la Termo) con el problema del cuerpo negro, usando sólo mecánica y electrodinámica.

Usando el resultado de Kirchhoff de que la emisividad no depende del material que compone al cuerpo, introduce el MODELO en el que supone que el cuerpo está compuesto por osciladores independientes.

Osciladores = “resortitos” de masa *m* y frecuencia ν

... Boltzmann le señala el “error” en su trabajo inicial! (1897)
Insiste que debe hacerse un tratamiento estadístico.

¡La fórmula crucial! Junio de 1899

Siguiendo la sugerencia de que el problema del equilibrio termodinámico entre la radiación y los osciladores del cuerpo negro es estadístico, Planck deduce:

$$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\overline{u(\nu,T)}$$

Energía <u>promedio</u> de un oscilador de frecuencia ν a temperatura *T*

... El "truco" es ahora concentrarse en calcular $\overline{u(\nu,T)}$

y "olvidarse" de la radiación!

PRIMER INTENTO ... Junio de 1899

Planck se propone deducir la fórmula de Wien

$$\rho(\nu,T) \simeq \alpha\nu^3 e^{-\beta\frac{\nu}{T}}$$

Usando la "fórmula crucial" y el resultado termodinámico

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial s}{\partial u}$$

"Postula" (no sabe como deducirlo!): $s = -\frac{u}{\beta\nu}\left[\ln\frac{u}{a\nu} - 1\right]$

... y sale la ley de Wien!

Planck nota lo siguiente: $$\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} = -\frac{1}{u} < 0$$ (2ª LEY)

Apéndice: "Deducción" de la Ley de Wien.

1) De la entropía: $$s = -\frac{u}{\beta\nu}\left[\ln\frac{u}{a\nu} - 1\right]$$

2) Calculamos la temperatura:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial s}{\partial u} = -\frac{1}{\beta\nu}\ln\frac{u}{a\nu} \quad \Longrightarrow \quad u = a\nu e^{-\beta\frac{\nu}{T}}$$

3) Sustituimos en la fórmula crucial: $$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}u$$

$$\Longrightarrow \quad \rho(\nu, T) = \alpha\nu^3 e^{-\beta\frac{\nu}{T}}$$ donde $$\alpha = \frac{8\pi a}{c^3}$$

LOS EXPERIMENTOS ... Octubre de 1900

Lummer y Pringsheim, y Rubens y Kurlbaum realizan experimentos a frecuencias bajas(longitud de onda largas) y hallan que la fórmula de Wien es incorrecta! Su resultado indica

$$\rho(\nu, T) \approx A\nu^2 T$$

... para ν bajas

... El “chisme” es que Rubens se lo platica a Planck en una comida el domingo 7 de octubre, y desde ese mismo día empieza Planck su trabajo hacia la introducción de h.

Aparato de Rubens y Kurlbaum para medir la intensidad de la radiación de cuerpo negro.

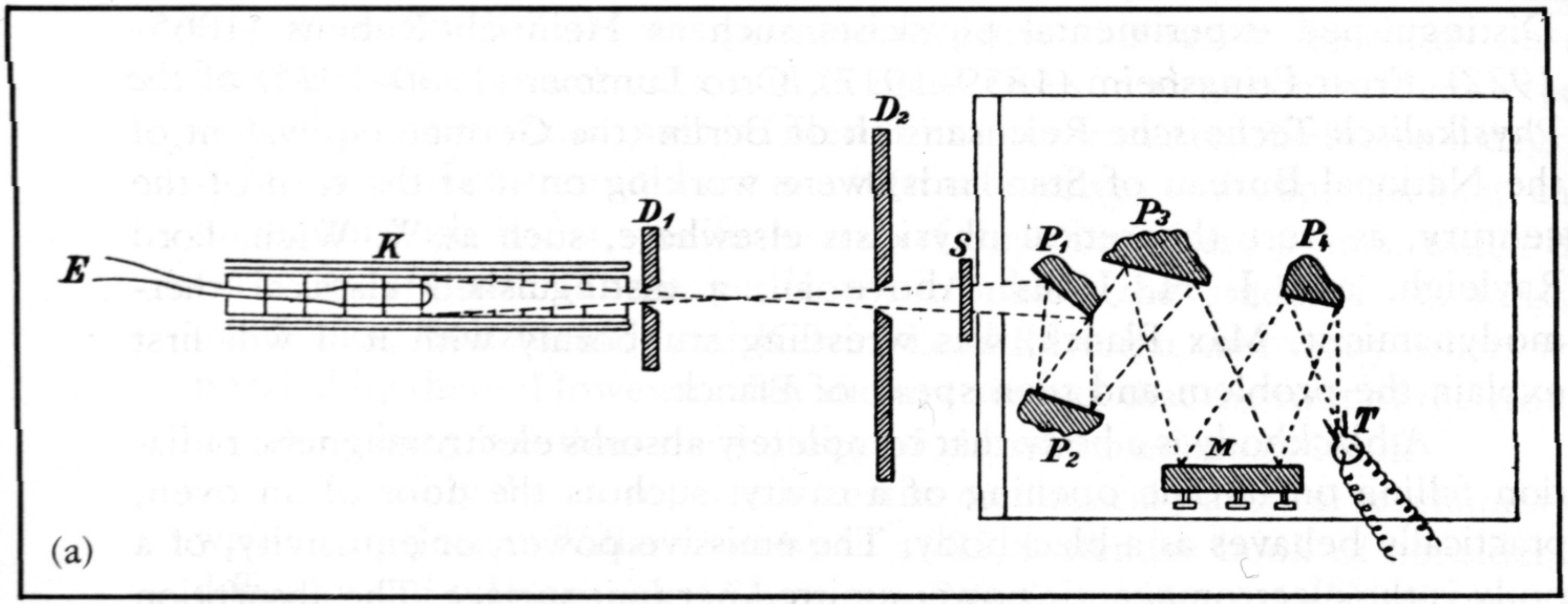


Figure 4.2 (a) Apparatus for measuring the intensity in the infrared of black radiation emitted from the oven K (blackbody). (b) Blackbody emission curves at constant frequency and variable temperature, compared with experimental data. [From H. Rubens and F. Kurlbaum, in *Annalen der Physik 4,* 649 (1901).]

LA INTERPOLACION ... Octubre 19 de 1900

(a) $\rho(\nu,T)=\alpha\nu^3 e^{-\beta\frac{\nu}{T}}$

Wien. Debe ser correcta en algún límite ... frecuencias grandes.

(b) $\rho(\nu,T)\approx A\nu^2 T$

Resultado experimental correcto a frecuencias pequeñas.

Planck nota: $\dfrac{\partial^2 s}{\partial u^2}=-\dfrac{1}{u} \Rightarrow$ (a) $\qquad \dfrac{\partial^2 s}{\partial u^2}=-\dfrac{A}{u^2} \Rightarrow$ (b)

Propone: $\dfrac{\partial^2 s}{\partial u^2}=-\dfrac{\gamma}{u^2+g(\nu)u}$

$g(\nu)\to 0$ si $\nu\to 0$

$g(\nu)\to \infty$ si $\nu\to \infty$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial s}{\partial u}=-\frac{\gamma}{g(\nu)}\ln\frac{u}{u+g(\nu)}=\frac{1}{T}$$

... resolviendo para u

$$u = \frac{g(\nu)}{e^{\frac{g(\nu)}{\gamma T}} - 1}$$

... Usando la "fórmula crucial" $\rho(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} u$

$$\Longrightarrow \quad \rho(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{g(\nu)}{e^{\frac{g(\nu)}{\gamma T}} - 1}$$

... Pero la ley de Wien:

$$\rho(\nu,T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad g(\nu) = a\nu$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\rho(\nu,T) = \frac{8\pi a\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\beta\frac{\nu}{T}} - 1}}$$

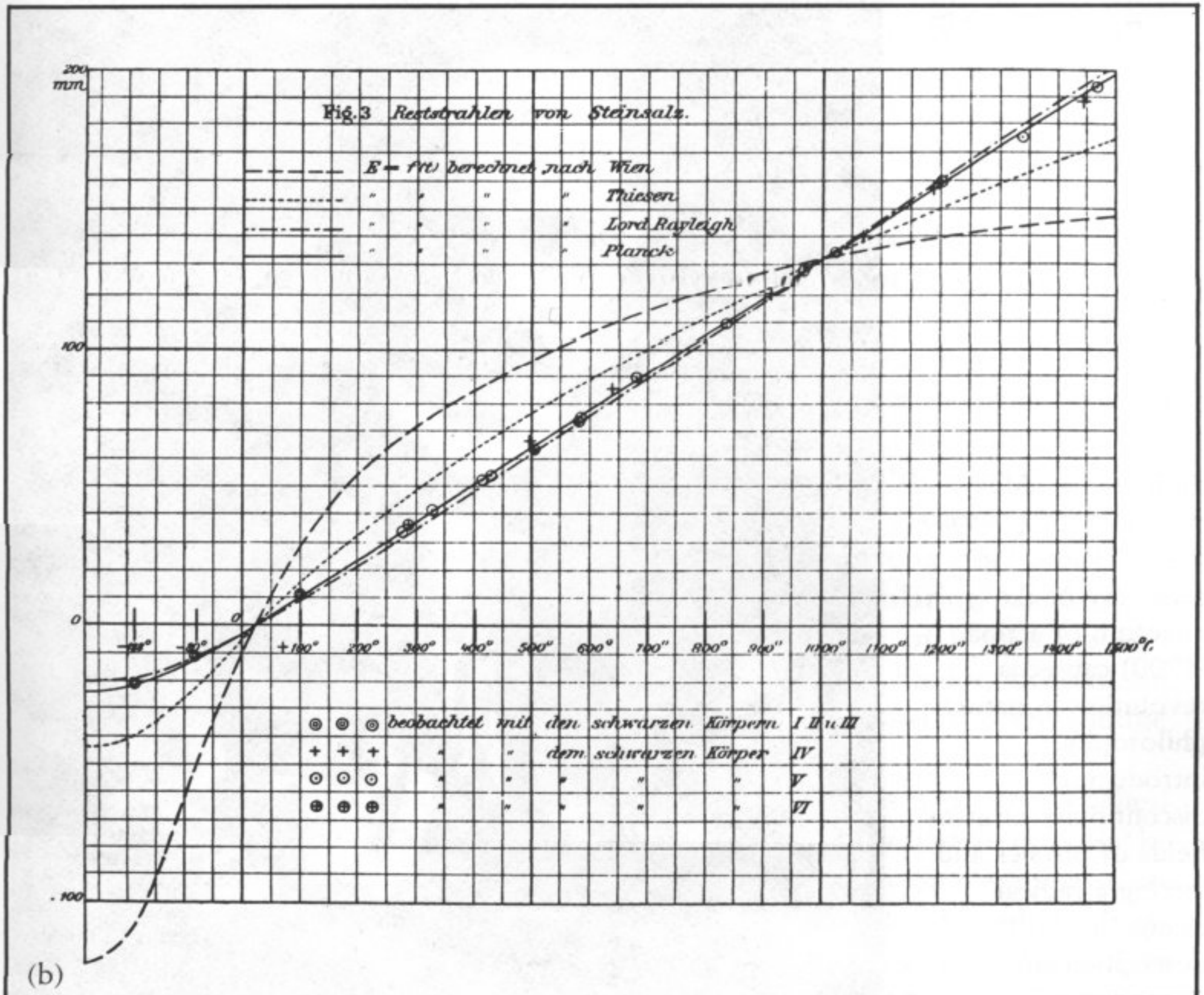
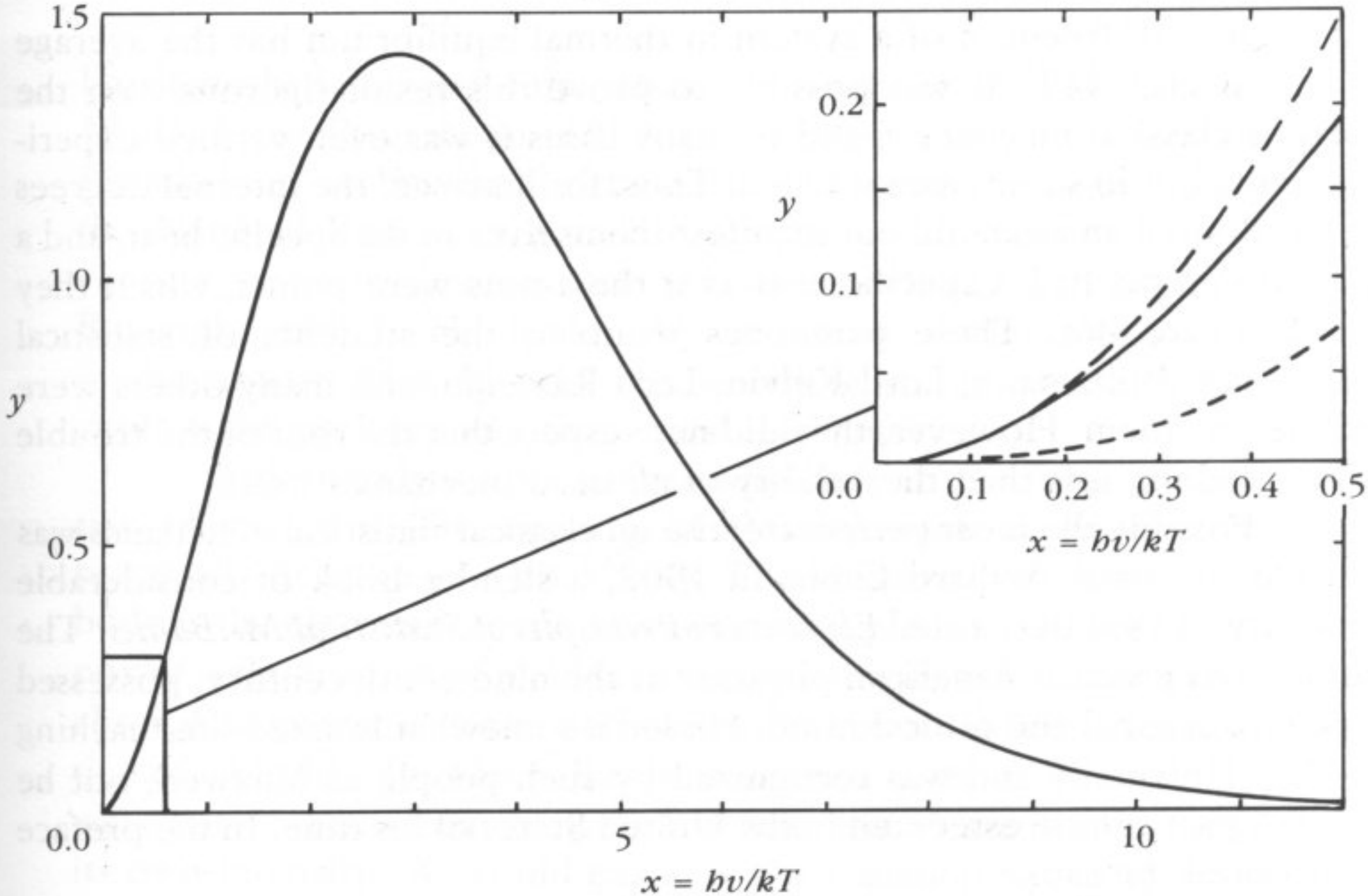


Fig. 3 Reststrahlen von Steinsalz.
E = f(t) berechnet nach Wien
" " " " Thiesen
" " " " Lord Rayleigh
" " " " Planck
200 mm
100
0
-100
+100°
200°
300°
400°
500°
600°
700°
800°
900°
1000°
1100°
1200°
1300°
1400°
1500° C.
beobachtet mit den schwarzen Körpern I II u III
" " dem schwarzen Körper IV
" " " " " V
" " " " " VI

(b)



(b) For blackbody radiation at temperature T the energy density per unit frequency interval $u(\nu,T)$ is plotted. The curve can be used for any temperature, provided the abscissa has a scale such that $x = h\nu/kT$ and the ordinate has a scale such that $y = (h^2c^2/8\pi k^3T^3)u$. The equation of the curve is $y = x^3/(\exp x - 1)$. The limiting forms of Rayleigh and of Wien are shown in the inset, for small x.

El 19 de octubre Planck reporta su resultado ante la Academia Prusiana de Ciencias ... esa misma noche Rubens verifica que la fórmula de Planck ajusta los resultados experimentales mejor que cualquier otra fórmula, y al día siguiente se lo comunica a Planck

Planck inicia lo que luego llamará “el trabajo más extenuante de mi vida” para encontrar una deducción correcta de la entropía de un oscilador que de lugar a su fórmula interpolada.

... Recurre de nuevo a las ideas estadísticas de Boltzmann!

... de nuevo: $\rho(\nu,T) = \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}\overline{u(\nu,T)}$

energía <u>PROMEDIO</u> de un oscilador de frecuencia ν

Considere N osciladores de frecuencia ν y suponga que tienen energía total dada U $\Longrightarrow$ $\overline{u(\nu,T)} = \dfrac{U}{N}$

¿ cómo obtenemos la dependencia en la temperatura T ?

Boltzmann ... $S = k \ln W$ entropía

Número total de estados "microscópicos" de los N osciladores cuya energía total sea igual a U

entonces $\dfrac{1}{T} = \dfrac{\partial S}{\partial U}$ $W = \;?$

LA HIPOTESIS CUANTICA, 14 de diciembre de 1900

La idea es calcular el número de maneras diferentes de repartir la energía U entre los N osciladores. Planck divide la energía total U en P pedacitos iguales (CUANTOS!) de energía ε

$$U = P\varepsilon$$

W = número de maneras de repartir P pedacitos en N osciladores

$$W = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!}$$ ... en $$S = k \ln W$$

$$\Longrightarrow \qquad S = Nk\left[\left(1+\frac{U}{N\varepsilon}\right)\ln\left(1+\frac{U}{N\varepsilon}\right) - \frac{U}{N\varepsilon}\ln\frac{U}{N\varepsilon}\right]$$

(... se usó la fórmula de Stirlings $\ln N! \approx N \ln N - N$ para N grande)

... usamos termodinámica: $$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U}$$

como $$\overline{u(\nu,T)} = \frac{U}{N} \quad \Longrightarrow \quad \overline{u(\nu,T)} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}$$

... en la "fórmula crucial" $$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\overline{u(\nu,T)}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\rho(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}}$$

LA CONSTANTE h

Planck halló: $$\rho(\nu,T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}$$

pero ... la Ley de Wien debe obedecerse $$\rho(\nu,T)=\nu^3 f(\frac{\nu}{T})$$

Por lo tanto $$\boxed{\varepsilon=h\nu} \qquad \Longrightarrow$$

La distribución de Planck: $$\boxed{\rho(\nu,T)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}}$$

"Sobre la teoría de la ley de la distribución de la energía del espectro normal"

9. *Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum;* von *Max Planck.*

(In anderer Form mitgeteilt in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Sitzung vom 19. October und vom 14. December 1900, Verhandlungen **2.** p. 202 und p. 237. 1900.)

Einleitung.

Die neueren Spectralmessungen von O. Lummer und E. Pringsheim[1]) und noch auffälliger diejenigen von H. Rubens und F. Kurlbaum[2]), welche zugleich ein früher von H. Beckmann[3]) erhaltenes Resultat bestätigten, haben gezeigt, dass das zuerst von W. Wien aus molecularkinetischen Betrachtungen und später von mir aus der Theorie der elektromagnetischen Strahlung abgeleitete Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum keine allgemeine Gültigkeit besitzt.

Die Theorie bedarf also in jedem Falle einer Verbesserung, und ich will im Folgenden den Versuch machen, eine solche auf der Grundlage der von mir entwickelten Theorie der elektromagnetischen Strahlung durchzuführen. Dazu wird es vor allem nötig sein, in der Reihe der Schlussfolgerungen, welche zum Wien'schen Energieverteilungsgesetz führten, dasjenige Glied ausfindig zu machen, welches einer Abänderung fähig ist; sodann aber wird es sich darum handeln, dieses Glied aus der Reihe zu entfernen und einen geeigneten Ersatz dafür zu schaffen.

Dass die physikalischen Grundlagen der elektromagnetischen Strahlungstheorie, einschliesslich der Hypothese der „natürlichen Strahlung", auch einer geschärften Kritik gegenüber Stand halten, habe ich in meinem letzten Aufsatz[4]) über diesen

---

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. der Deutsch. Physikal. Gesellsch. **2.** p. 163. 1900.

2) H. Rubens und F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 25. October 1900, p. 929.

3) H. Beckmann, Inaug.-Dissertation, Tübingen 1898. Vgl. auch H. Rubens, Wied. Ann. **69.** p. 582. 1899.

4) M. Planck, Ann. d. Phys. **1.** p. 719. 1900.

Figure 4.4 The title page of the article by Max Planck, published in *Annalen der Physik* [4, 553 (1901)], in which the constant *h* appears for the first time, signaling the birth of quantum physics.

Hierbei sind h und k universelle Constante.

Durch Substitution in (9) erhält man:

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{k}{h\nu} \log\left(1 + \frac{h\nu}{U}\right),$$

(11) $$U = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1}$$

und aus (8) folgt dann das gesuchte Energieverteilungsgesetz:

(12) $$\mathfrak{u} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1}$$

oder auch, wenn man mit den in § 7 angegebenen Substitutionen statt der Schwingungszahl ν wieder die Wellenlänge λ einführt:

(13) $$E = \frac{8\pi c h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{ch}{k\lambda\vartheta}} - 1}.$$

COMENTARIOS FINALES

- ¿Por qué Planck no tomó el límite $\varepsilon \to 0$?

si lo hubiera tomado hubiera hallado la fórmula de frecuencias bajas (seguro lo hizo!), que no ajusta el espectro.

•La expresión a bajas frecuencias es ahora conocida como la fórmula de Rayleigh (1900)-Jeans (1905). No es claro si Planck la conocía, pero si sí, no la quiso usar.

- Planck se aferró a *h* porque estaba de acuerdo al experimento

... esperaba que *h* tuviera un significado en la teoría de la radiación electromagnética clásica. A $h\nu$ le llamó el “cuanto de la energía”.

•Tardó muchos años en “reconocer” que había descubierto la mecánica cuántica y que es irreconciliable con la clásica.

• De cualquier manera, entendió que tanto *h* como *k* (ahora llamada constante de Boltzmann) eran constantes fundamentales:

Hieraus und aus (14) ergeben sich die Werte der Naturconstanten:

(15) $$h = 6{,}55 \, . \, 10^{-27} \, \mathrm{erg} \, . \, \mathrm{sec} \, ,$$

(16) $$k = 1{,}346 \, . \, 10^{-16} \, \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{grad}} \, .$$

Das sind dieselben Zahlen, welche ich in meiner früheren Mitteilung angegeben habe.

---

1) O. Lummer und E. Pringsheim, Verhandl. der Deutschen Physikal. Gesellsch. 2. p. 176. 1900.

(Eingegangen 7. Januar 1901.)

• Con la constante *k*, la constante *R* de los gases, y la constante Faraday *F*:

$$N_0 \approx 6.175 \times 10^{23}$$

$$e \approx 4.69 \times 10^{-10} \ \mathrm{esu}$$

$$k = 1.38 \times 10^{-16} \ \mathrm{erg/K} \qquad h = 6.63 \times 10^{-27} \mathrm{erg.sec}$$

$$N_0 = 6.023 \times 10^{23} \qquad e = 4.80 \times 10^{-10} \ \mathrm{esu}$$

Max Planck: Un revolucionario renuente

30 años después, Planck describió así esos días como “un acto de desesperación ...había luchado con el problema por seis años (desde 1894) sin éxito; sabía que el problema era de importancia fundamental para la física; yo conocía la fórmula que reproducía la distribución de la energía en el espectro normal; una interpretación teórica *tenía* que ser hallada a cualquier costo, por alto que fuera”

Se describe a si mismo capaz de sacrificar todas sus convicciones excepto las dos leyes de la termodinámica ... cuando halló que la hipótesis de los cuantos de la energía eran la salvación, la consideró “una suposición meramente formal, y no le di demasiada atención, excepto por lo siguiente: yo tenía que obtener un resultado positivo, bajo cualquier circunstancia y a cualquier costo”.