Radiación de Cuerpo Negro - Gas de fotones

Víctor Romero Rochín

Instituto de Física. Universidad Nacional Autónoma de México.

Apartado Postal 20-364, 01000 México, D.F., Mexico

(Dated: May 6, 2014)

Notas sobre la termodinámica y la física estadística de la radiación de cuerpo negro.

I. INTRODUCCIÓN, HISTORIA, RELEVANCIA

Es una observación experimental y empírica que todos los cuerpos reflejan, absorben y emiten radiación electromagn?etica. La emisión es más evidente mientras mayor sea la temperatura del cuerpo. Los ejemplos más comunes son el fuego, los focos, las estrellas, es decir, cuerpos que están calientes. Los humanos emitimos radiación infrarroja que no podemos ver, pero ahora con las tecnolog?as modernas sabemos que es así. El ejemplo más claro de absorción lo vemos ahora en los hornos de microondas: el agua absorbe fuertemente esas ondas y se calienta. Por qué los cuerpos emiten y absorben radiación tiene su explicación última en el hecho que la materia está compuesta de átomos y moléculas. Estos son los que absorben y emiten la radiacińń por medio de un proceso que es la esencia de la mecánica cuántica. Discutiremos este hecho más adelante.

Tres aspectos de gran importancia: 1) problema importante en el Siglo XIX, teorema de Kirchhoff, Ley de Stefan-Boltzmann. Planck lo usa como ejemplo para "demostrar" que la Segunda Ley de la Termodinámica es exacta. Fracasa en tal intento pero descubre la Mecánica Cuántica. 2) El gas de fotones es uno de los pocos ejemplos de "gas ideal" que es exacto. 3) Tiene enorme relevancia en estudios actuales de Astronomía y Cosmología: la radiación de fondo del Universo obedece de manera espectacular la distribución de Planck a una temperatura de $T = 2.725$ K.

II. UNA CAVIDAD "VACÍA" ...

La manera más sencilla de iniciar este estudio es considerar un sólido a temperatura T al cuál se le hace una cavidad de geometría arbitraria, vea la figura 1. Es decir, suponemos que la cavidad está "vacía" pues no tiene materia. Veremos que realmente no está vacía sino que dentro de ella se forma un "gas" de radiación electromagnética, o de fotones, en equilibrio termodinámico a la misma temperatura T del cuerpo.

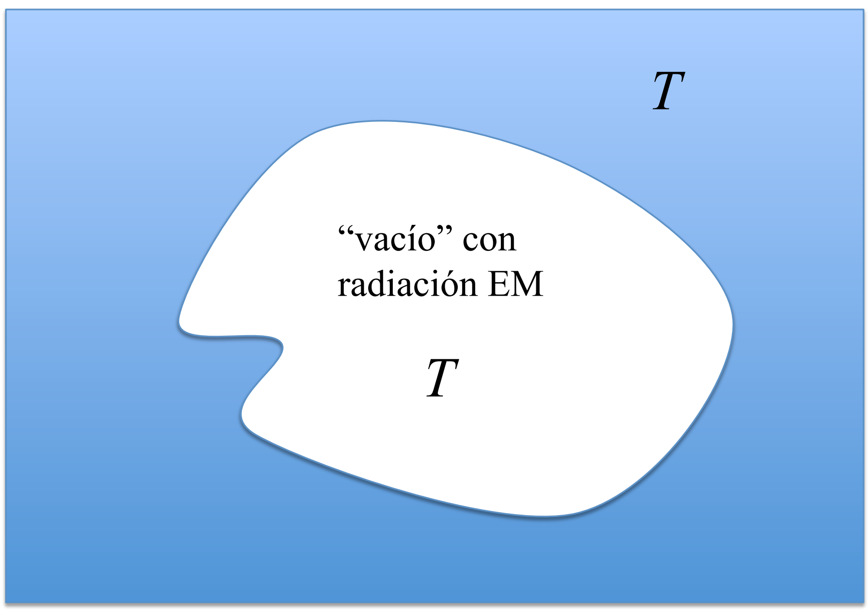

FIG. 1: Cuerpo negro en equilibrio con radiación en cavidad

Estando a temperatura T los átomos y/o moléculas del cuerpo se excitan y desexcitan (típicamente por colisiones con sus átomos vecinos) y como parte de este proceso emiten radiación electromagnética, o de manera "moderna", emiten fotones. Esta radiación entra a la cavidad y al alcanzar las paredes opuestas ocurre que, o es reflejada o es absorbida por los átomos de la pared opuesta. Tales átomos, tarde o temprano vuelven a emitir parte o toda esa energía absorbida de nuevo a la cavidad y, una vez mas, ese proceso se repite. Esto no era claro a mediados del Siglo XIX, sin embargo, es ahora bien explicado por la Mecánica Cuántica y lo consideraremos como un hecho. Es importante recalcar que la emisión de radiación, por ser espontánea, es altamente isotrópica. Es evidente que eventualmente se alcanza un balance, o estado de equilibrio, entre la radiación emitida y absorbida por las paredes. De la misma manera, y en cada momento, la radiación misma se encuentra en equilibrio termodinámico con las paredes y, por tanto, tiene la misma temperatura T.

El estado de equilibrio es tal que la radiación en cada elemento de volumen de la cavidad es *homogéneo*, *isotrópico* e independiente de la polarización. Es decir la cantidad de energía electromagnética en cada elemento de volumen es la misma; el flujo de energía en cualquier dirección es también la misma; y, en promedio, la polarización es cero en cualquier dirección. Si no fuera así, entonces podríamos hallar la manera de producir algún flujo de energía en alguna dirección u orientación. Con este flujo podríamos transportar energía y producir algún tipo de trabajo. Lograr esto es equivalente a violar la Segunda Ley de la Termodinámica (enunciado de Kelvin).

Es claro que debido a las características del cuerpo, esto es, de cuál material esté hecho, las frecuencias de la radiación serán sólo aquellas en las que el cuerpo emite y absorbe. Sea ν una de estas frecuencias presentes. La pregunta fundamental es, cuál es la cantidad de energía de energía electromagnética $I(\nu, T)$, por unidad de volumen en el cuerpo, con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$ a temperatura T? Por el enunciado del párrafo anterior, $I(\nu, T)$ no puede depender ni de la posición $\vec{r}$ del elemento de volumen considerado, ni de la dirección $\vec{k}$ de la radiación, ni de la polarización σ de la misma. Una vez que la densidad de energía electromagnética es conocida, el problema está esencialmente resuelto y los diferentes resultados sobre las características de la radiación en equilibrio, pueden ser deducidas. Note que desde el punto de vista cuántico, $I(\nu, T)$ es la densidad de energía de un gas de fotones de frecuencia ν a temperatura T.

Las consideraciones anteriores indican que si el cuerpo puede absorber y emitir en un cierto intervalo de frecuencias $\Delta(\nu_0)$, alrededor de alguna frecuencia ν_0, la energía contenida en la cavidad puede escribirse como,

$$E(V, T) = V \int_{\Delta(\nu_0)} I(\nu, T) d\nu, \tag{1}$$

donde V es el volumen de la cavidad. Cabe mencionar brevemente en este momento el

Teorema de Kirchhoff, a reserva de discutirlo más fondo después. Desde los 1850's era entendido que si un cuerpo recibía radiación de frecuencia ν, esta podía ser reflejada o absorbida. En el último caso, se sabía también que de una cantidad dada de radiación sólo una fracción es absorbida. Sea $A(\nu)$ el llamado coeficiente de absorción del cuerpo con respecto a radiación de frecuencia ν. Esta cantidad es adimensional varía de cero a uno, $0 \leq A(\nu) \leq 1$, dependiendo del cuerpo. Un cuerpo que absorbe radiación de frecuencia ν también emite radiación de la misma frecuencia. Kirchhoff mostró que si un cuerpo se encuentra en equilibrio termodinámico con radiación electromagnética de frecuencia ν, entonces la cantidad de energía $J(\nu)$ que emite por unidad de tiempo y por unidad de área del cuerpo en el intervalo de frecuencias ν y $\nu + d\nu$ es,

$$J(\nu, T) = cA(\nu)I(\nu, T), \tag{2}$$

donde c es la velocidad de la luz. Debido a que $I(\nu, T)$ es una propiedad exclusiva de la radiación, entonces, la razón $J(\nu, T)/A(\nu)$ es universal. Si consideramos un cuerpo hipotético que absorba radiación con $A(\nu) = 1$ para toda frecuencia ν, entonces su espectro de emisión es precisamente la distribución de energía de la radiación $I(\nu, T)$. Un cuerpo que absorba toda la radiación que reciba no se "vería", o alternativamente, se vería "negro". Por lo tanto, a ese material ideal se le llamó *cuerpo negro*[1]. Este fue considerado como uno de los grandes problemas del Siglo XIX y grandes mentes de la época se avocaron a entenderlo. Su estudio culminó en 1900 con el descubrimiento de la Mecánica Cuántica por Planck y en la introducción del concepto corpuscular de la luz por Einstein en 1905.

Entonces, para una cavidad de volumen V dentro de un cuerpo negro a temperatura T, la energía contenida es

$$E(V, T) = V \int_0^\infty I(\nu, T) d\nu. \tag{3}$$

El propósito de este capítulo es deducir la termodinámica asociada a este fenómeno y, por supuesto, deducir la densidad de energía $I(\nu, T)$. Nótese que podemos identificar

$$u(T) = \int_0^\infty I(\nu, T) d\nu \tag{4}$$

como la energía (total) por unidad de volumen de la cavidad. Es muy importante recalcar que es una función sólo de la temperatura T.

III. EL PUNTO DE VISTA DE LA ELECTRODINÁMICA Y LA TERMODINÁMICA CLÁSICAS

A. Electrodinámica Clásica

Dentro de la cavidad, las ecuaciones de Maxwell en el vacío deben ser obedecidas (en cgs):

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{E} &= 0 \\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0 \\ \nabla\times\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla\times\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}. \end{aligned} \tag{5}$$

Es un ejercicio sencillo mostrar (hágalo!) que estas ecuaciones implican que las siguientes ecuaciones de onda son simultáneamente obedecidas,

$$\begin{aligned} \nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} &= 0 \\ \nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Es decir, existen las ondas electromagnéticas no dispersivas y con velocidad c de propagación. Es también un ejercicio sencillo mostrar que una solución son las ondas planas,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \hat{\sigma}_1 E_0\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \hat{\sigma}_2 B_0\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}, \end{aligned} \tag{7}$$

si

$$\omega = \left|\vec{k}\right| c \tag{8}$$

donde $\omega = 2\pi\nu$ es la frecuencia de la onda, $\vec{k}$ es el vector de propagación de la onda, $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$, $\lambda = c/\nu$ con λ la longitud de onda, y $\hat{\sigma}_1$ y $\hat{\sigma}_2$ son vectores unitarios indicando la dirección de la onda. Usando las ecuaciones de Mawell (5), se hallan las siguientes relaciones,

$$\begin{gathered} B_0 = E_0 \quad \text{con } E_0 \text{ complejo} \\ \hat{\sigma}_1\cdot\hat{\sigma}_2 = 0 \qquad \hat{\sigma}_1\times\hat{\sigma}_2 = \frac{\vec{k}}{\left|\vec{k}\right|} \end{gathered} \tag{9}$$

es decir, la onda electromagnética es una onda transversal con los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ ortogonales entre sí. Debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, el campo electromagnético en cada punto e instante, es la suma o superposición de todas los campos correspondientes a las diferentes frecuencias. Esto quiere decir también que los campos de diferentes frecuencias no *interactúan* entre ellos, es decir, aparecería como si la radiación fuera un "gas ideal" de ondas electromagnéticas de diferentes frecuencias. Más adelante cuando introduzcamos conceptos cuánticos veremos que esto es una realidad, aunque en términos de fotones.

De la ecuaciones de Maxwell también podemos deducir la ley de conservación de energía (electromagnética),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0 \tag{10}$$

donde

$$u = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{E}^* + \vec{B}\cdot\vec{B}^*\right) \tag{11}$$

es la densidad de energía electromagnética (usamos la misma letra "u" que antes de manera completamente deliberada), y

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}^* \tag{12}$$

es el vector de Poynting, que describe el flujo de energía electromagnética. La radiación no sólo lleva energía sino también momento (cantidad de movimiento). Se puede mostrar que $\vec{\mathcal{P}} = \vec{S}/c$ es la densidad de momento de la radiación. Esto origina que la radiación produzca presión, la llamada *presión de radiación*, al incidir sobre cualquier superficie, ya sea en el seno de la cavidad o en la paredes que la componen.

En las secciones siguientes mostraremos el importantísimo resultado, que se adjudica originalmente a Maxwell, que la presión p producida por radiación *homogénea* e *isotrópica* está dada por

$$p = \frac{1}{3}u. \tag{13}$$

Es muy sencillo visualizar que la presión debe ser proporcional a la densidad de energía, lo importante es el factor $1/3$.

B. Energía

Veamos con cuidado el concepto de energía en la cavidad. Consideremos a un cuerpo negro a temperatura T, el cual tiene una cavidad "vacía" en la que se establece equilibrio termodinámico de radiación electromagnética, vea la figura 1. Una vez en equilibrio, la energía almacenada por la radiación dentro de la cavidad debe ser

$$E = \sum_{\alpha=1}^{2} \int d^3k \int_V d^3r \; \rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T) \tag{14}$$

donde $\rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T) d^3r d^3k$ es la energía de radiación con vector de onda entre $\vec{k}$ y $\vec{k} + d^3k$, en el volumen entre $\vec{r}$ y $\vec{r} + d^3r$ y con polarización α. Note que $\rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T)$ es una densidad tanto en el espacio de coordenadas como en el de vectores de onda.

Debido a que la radiación está en equilibrio termodinámico a temperatura T, debe ser *homogénea*, *isotrópica* y *despolarizada*. De lo contrario habría flujo de energía, del cual podríamos obtener trabajo, en contradicción con el enunciado de Kelvin de la Segunda Ley. Así,

$$\rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T) = \rho(k, T) \tag{15}$$

es decir, la densidad de energía sólo depende de la magnitud $k = |\vec{k}|$, que es la frecuencia $k = 2\pi\nu/c$, y de la temperatura T.

Sustituyendo en la expresión de la energía, obtenemos,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\alpha=1}^{2} \int d^3k \int_V d^3r \; \rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{2} \int d^3k \int_V d^3r \; \rho(k, T) \\ &= 2V \int d\Omega \int_0^\infty \rho(k, T) \, k^2 dk \\ &= V \int_0^\infty \left(8\pi \left(\frac{2\pi}{c} \right)^3 \rho(\nu, T) \nu^2 \right) d\nu \end{aligned} \tag{16}$$

donde usamos

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi \tag{17}$$

e hicimos el cambio de variable $k = 2\pi\nu/c$. Definimos

$$I(\nu, T) = 8\pi \left(\frac{2\pi}{c} \right)^3 \rho(\nu, T) \nu^2 \tag{18}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} E &= V \int_0^\infty I(\nu, T) \, d\nu \\ &= V u(T). \end{aligned} \tag{19}$$

Esto es, $I(\nu,T)d\nu$ es la energía de radiación, por unidad de volumen, con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$. Por consiguiente

$$u(T) = \int_0^\infty I(\nu,T)\, d\nu \tag{20}$$

es la energía de radiación por unidad de volumen. Es función sólo de la temperatura.

C. Presión de radiación

La radiación electromagnética lleva, además de energía, momento o cantidad de movimiento. De las ecuaciones (11) y (12), hallamos que si una onda electromagnética con vector de onda $\vec{k}$ y polarización α tiene energía por unidad de volumen $e(\vec{r},t;\vec{k},\alpha)$, entonces tiene asociada un tiene asociada una densidad de momento (momento por unidad de volumen) dada por $\vec{\mathcal{P}} = e(\vec{r},t;\vec{r},\alpha)\hat{k}/c$. Entonces, dado que la radiación de cuerpo negro tiene un continuo de frecuencias, definimos

$$d\vec{\mathbf{p}}_\alpha = \frac{1}{c}\rho(k,T)\hat{k}\, d^3k \tag{21}$$

como la densidad de momento de la radiación con vector de onda entre $\vec{k}$ y $\vec{k} + d^3k$.

Supongamos que radiación con momento entre $\vec{k}$ y $\vec{k}+d^3k$ incide sobre una diferencial de superficie $\hat{n}\Delta A$ de un cuerpo y es reflejada especularmente, vea la figura 2. Notamos que la cantidad de energía de radiación con vector $\vec{k}$ y contenida en un volumen $\Delta V = c\Delta t \Delta A \cos\theta$, con $\cos\theta = \hat{k}\cdot\hat{n}$, transferirá en un intervalo de tiempo Δt, la cantidad de movimiento dada por

$$\Delta\vec{P} = 2\,|d\vec{\mathbf{p}}_\alpha|\,\Delta V \cos\theta \hat{n}. \tag{22}$$

Y, por lo tanto, ejercerá una fuerza

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \\ &= 2\rho(k,T)d^3k\, \Delta A \cos^2\theta \hat{n}. \end{aligned} \tag{23}$$

Vemos entonces que la presión total que ejerce la radiación es la integral sobre la fuerza normal en todas la direcciones y polarizaciones *posibles* incidentes, dividida por la superficie ΔA,

$$p = \frac{1}{\Delta A}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{inc} d\vec{F}\cdot\hat{n}$$

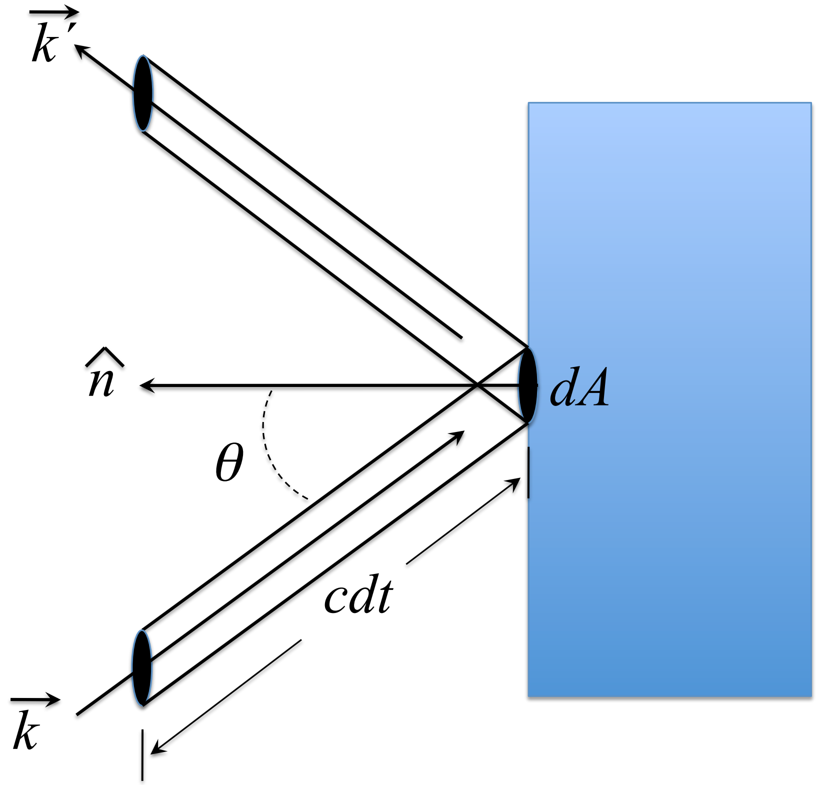

FIG. 2: Radiación incide con vector $\vec{k}$ y es reflejada con vector $\vec{k}'$, con $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$. Existe una transferencia de momento que da lugar a una fuerza de la radiación sobre la pared, y a su vez, a una presión. Note que el ángulo θ no puede exceder $\pi/2$.

$$= \; 2\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{inc} d^3k \; \rho(k,T) \; \cos^2\theta \tag{24}$$

donde la integral es sobre valores de $\vec{k}$ con direcciones en sólo "media esfera"

$$\int_{inc} d^3k = \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{\infty} k^2 dk. \tag{25}$$

Obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} p \; &= \; 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{\infty} k^2 dk \; \rho(k,T) \\ &= \; 4\frac{1}{3}2\pi\left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 \int_0^{\infty} \nu^2 \rho(\nu,T) d\nu. \end{aligned} \tag{26}$$

Usando la definición de $I(\nu, T)$, vea la ecuación (18), hallamos

$$p = \frac{1}{3} 8\pi \left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 \int_0^\infty \nu^2 \rho(\nu, T) d\nu$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^\infty I(\nu, T)\, d\nu. \quad (27)$$

Es decir, hallamos que la presión de radiación es un tercio de la densidad de energía,

$$p = \frac{1}{3} u(T). \quad (28)$$

D. Termodinámica Clásica

Con estos resultados podemos deducir toda la termodinámica de la radiación sin necesidad de conocer la forma de $I(\nu, T)$. Veámos. Notamos primero que el estado termodinámico de la radiación depende sólo de V y T, es decir, no hay dependencia en N, el número ... de qué? la radiación no es materia y no "debería" de depender de la variable N que indica la cantidad de "partículas". Este no es un resultado trivial y volveremos después a analizarlo más abajo. Por lo pronto, aceptamos que sólo V y T definen el estado termodinámico. Esto quiere decir que la energía libre de Helmholtz sólo es función de esas variables,

$$F = F(V, T). \quad (29)$$

Como F es extensiva, debe ser de la forma $F = V f(T)$. De F podemos hallar la entropía S y la presión p,

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \qquad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \quad (30)$$

de aqui tenemos

$$p = -f(T) \qquad S = -V \frac{df(T)}{dT}. \quad (31)$$

Como $p = u(T)/3$, entonces $f(T) = -u(T)/3$. Por otro lado, sabemos que $E = F + TS$ y usando los resultados anteriores hallamos que,

$$u = -\frac{1}{3} u + \frac{T}{3} \frac{du}{dT}. \quad (32)$$

Integrando esta expresión hallamos la dependencia de u en T:

$$u = K T^4. \quad (33)$$

No se tiene un término inhomogéneo (independiente de T) debido a la Tercera Ley de la Termodinámica que requiere que $S \to 0$ cuando $T \to 0$. Mostraremos más adelante que $K = 4\sigma/c$ donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann.

Con lo anterior estamos en posibilidades de deducir la Ley de Wein (1893). Por sencillez, consideremos radiación electromagnética a temperatura T dentro de una cavidad de forma cúbica, de arista L, y metálica (esto no es esencial, sólo simplifica el punto principal). En tal caso, las ondas electromagnéticas permitidas tendrán longitud de onda $(2n+1)\lambda = L$ con n un entero. Supongamos ahora una expansión (o compresión) adiabática de la cavidad a un volumen $V' = \kappa V$ con κ un número real y positivo. El sistema se enfría (o calienta) a una temperatura T'. Notamos que todas las longitudes de onda se reajustan (por ser el cambio adiabático) a $\lambda' = \kappa^{1/3}\lambda$ o equivalentemente las frecuencias $\nu' = \kappa^{-1/3}\nu$. Por otro lado, debe ser cierto que $S(V,T) = S(V',T')$. Mostraremos que estas consideraciones implican que la dependencia de la densidad de energía electromagnética $I(\nu,T)$ debe ser de la siguiente forma,

$$I(\nu,T) = T^3 g\left(\frac{\nu}{T}\right) \tag{34}$$

donde $g(\nu/T)$ es todavía una función a determinar. Lo importante es la dependencia en (ν/T).

De la termodinámica del cuerpo negro, obtenemos que la entropía está dada por

$$S = \frac{4}{3}\frac{Vu(T)}{T} \tag{35}$$

y, por lo tanto,

$$S = \frac{4}{3}KVT^3. \tag{36}$$

Un proceso adiabático nos da como resultado que $VT^3 =$ constante y, por lo tanto, debe obedecer $VT^3 = V'T'^3$. Con las deducciones de arriba, esto nos indica que en un cambio adiabático la temperatura cambia como $T' = \kappa^{-1/3}T$. Esto a su vez implica que el cociente $\xi = \nu/T$ es también un invariante adiabático. Escribiendo de manera explícita la entropía tenemos,

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{3}V\int_0^\infty \frac{d\nu}{T} I(\nu,T) \\ &= \frac{4}{3}V\int_0^\infty d\xi I(\xi,T) \end{aligned} \tag{37}$$

donde hemos realizado un evidente cambio de variable. Ante una transformación adiabática, se tiene que

$$S = \frac{4}{3}\kappa V \int_0^\infty d\xi I(\xi, \kappa^{-1/3}T). \tag{38}$$

Comparando ambas expresiones para la entropía, se debe cumplir que

$$I(\xi, T) = \kappa I(\xi, \kappa^{-1/3}T) \tag{39}$$

para todo valor de κ real y positivo. La solución es

$$I(\xi, T) = T^3 g(\xi), \tag{40}$$

que es lo mismo que decir $I(\nu, T) = T^3 g(\nu/T)$. Este resultado es rigurosamente correcto. Sin embargo, debido a sus propios experimentos, asi como de otros, Wein fue más allá y propuso que la forma de la densidad de energía electromagnática debería ser,

$$I(\nu, T) = a\nu^3\, e^{-b\frac{\nu}{T}}, \tag{41}$$

con a y b dos constantes empíricas. Es una ironía histórica que este resultado ajusta bien la "parte cuántica" de la verdadera distribución, como veremos adelante, pero era así pues los experimentos de esa época no tenía acceso a la "parte clásica"! Por otro lado es muy importante recalcar que la fórmula (41) predice de manera correcta que la frecuencia de emisión más intensa del cuerpo depende de T y que tal pico se corre proporcionalmente a T conforme el cuerpo se calienta o se enfría. Esto fue conocido como la *Ley de desplazamiento de Wein*. Inicialmente, Planck creía que el resultado (41) era correcto y su proyecto era demostrar teóricamente su validez. Después de varios intentos, Planck se "convenció" (y lo publicó!) que su deducción de la ley de Wein era correcta. No fue sino hasta el año 1900 que dos grupos experimentales de Berlín, Pringshtein y Lumen por un lado, y Karlbaum y Rubens por el otro, mostraron que a frecuencias bajas la ley de Wein (41) no era correcta. En vez, un mejor ajuste era $I(\nu, T) \approx A\nu^2 T$ (que es de la forma (40)). Esto alteró la vida tranquila de Planck y lo llevó, en tres meses de trabajo frenético, a encontrar la forma correcta de la distribución de $I(\nu, T)$ que lleva su nombre:

$$I(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}. \tag{42}$$

De paso, descubrió la Mecánica Cuántica e introdujo las constantes h y k, ahora conocidas como las de Planck y Boltzmann. En el Apéndice mostramos los pasos esenciales de la deducción de Planck. En la siguiente sección presentaremos la deducción "moderna" que ya hace uso directo de la existencia de los fotones y, por supuesto, de la validez de la Mecánica Cuántica. Caben mencionar, sin embargo, dos aspectos históricos de gran relevancia. Por un lado, existe una creencia que Planck conocía la "validez" del resultado a frecuencias altas, la ley de Wein, y a frecuencias bajas la ley de Rayleigh-Jeans, y que el construyó la interpolación correcta. Esto es falso. La ley "clásica" de Rayleigh-Jeans fue posterior y se publicó en realidad como una crítica válida al trabajo de Planck pues no había razón para creer en las ideas revolucionarias (cuánticas) de Planck. Se olvida que fue la evidencia experimental la que empujo a Planck a realizar su trabajo. Sin embargo, por el lado puramente teórico, Planck había iniciado sus investigaciones alrededor de 1890 con el propósito de demostrar que Boltzmann estaba equivocado al darle a la Segunda Ley una interpretación estadística. Planck creía que la Segunda Ley era una rigurosa de carácter determinista. Es muy emotivo observar que Planck, en su desesperación por deducir la forma de $I(\nu, T)$, finalmente concedió y aceptó las ideas de Boltzmann, y en un momento virtuoso las usó para culminar su trabajo.

IV. LA DEDUCCIÓN MODERNA USANDO FÍSICA ESTADÍSTICA

A. Fotones

Curiosamente, como parte de la comprensión del problema del cuerpo negro, Einstein en 1905 introdujo la idea de que la radiación electromagnética podía considerarse como un gas de partículas relativistas sin masa, a las que después se bautizó como "fotones". Desde un punto de vista muy simplista, podemos considerar al fotón como una partícula de masa cero, con momento $\vec{p}$ y energía $\epsilon = pc$ con $p = |\vec{p}|$. Usando las ideas de de Broglie, podemos además decir que a la partícula fotón le corresponde una onda con longitud $\lambda = h/p$ y una frecuencia $\nu = \epsilon/h$, relacionadas como $\lambda\nu = c$, que corresponde a la relación de dispersión de las ondas electromagnéticas. Desafortunadamente, tal identificación no es tan sencilla ya que los fotones no obedecen una ecuación de Schrödinger por ser una partícula relativista. En vez, un tratamiento teórico completo requiere de la teoría cuántica de campos. Tal tratamiento arroja que los fotones son partículas fundamentales de spin $s = 1$, y por lo tanto son bosones, tal que ciertos estados de un número macroscópico de fotones (llamados estados coherentes) pueden representarse como ondas planas clásicas. Este es realmente el único resultado que necesitamos para darnos una idea de la relación que existe entre una onda electromagnética clásica y los fotones.

El siguiente enunciado es correcto con un alto grado de precisión: una onda electromagnética monocromática de vector de onda $\vec{k}$ (frecuencia $\nu = kc/2\pi$), con polarización circular derecha, e intensidad $|E_0|^2$, representa un número $n_{(\vec{k},m_s)}$ de fotones, con n proporcional a $|E_0|^2$, con momento $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, energía $\epsilon_{(\vec{k},m_s)} = \hbar k/c$ y componente de spin $m_s = +1$. Si la onda está circularmente polarizada izquierda, entonces $m_s = -1$. La componente de spin $m_s = 0$ nunca es ocupada por el spin del fotón; esto es consecuencia de que los fotones viajan siempre a la velocidad de la luz[2]. Esta correspondencia nos permite enunciar que una superposición arbitraria de ondas electromagnéticas clásicas, con diferentes valores de $\vec{k}$, de intensidades y polarizaciones m_s, siempre puede pensarse como un estado en el cuál, para cada valor de $(\vec{k}, m_s)$ se tiene un número de fotones $n_{(\vec{k},m_s)}$ proporcional a la intensidad de la onda correspondiente.

En otras palabras, el fotón es una partícula caracterizada por 4 números cuánticos, $(\vec{k}, m_s)$, el primero nos da las componentes del momento del fotón, y el último su estado de spin. Clásicamente, el primero es el vector de onda y el segundo su componente de polarización. Por lo tanto, una base de los estados cuánticos de la radiación, o del gas de fotones, consiste en especificar los números de ocupación $n_{(\vec{k},m_s)}$ para *todos* los valores de $\vec{k}$ y m_s. Los valores del spin son $m_s = \pm 1$, mientras que como los fotones son bosones, los valores de los números de ocupación son $n_{(\vec{k},m_s)} = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Denotamos pues a cualquier estado de la radiación como un conjunto arbitrario de números de ocupación,

$$\{n\} = \left\{ n_{(\vec{k},m_s)}, \forall \vec{k}, m_s \right\}. \tag{43}$$

Arriba mencionamos que las paredes del cuerpo que forman la cavidad, permanentemente están absorbiendo y emitiendo radiación electromagnética. La visión cuántica es que los átomos de las paredes, ahora, están absorbiendo y emitiendo fotones. Una vez en equilibrio, dentro de la cavidad se tiene un gas de fotones en equilibrio. Por otro lado, la linealidad de las ecuaciones de Maxwell tiene como correspondencia cuántica que los fotones no interactúan entre sí, es decir son un gas *ideal*, y por lo tanto, la energía del estado $\{n\}$ es[3]

$$E_{\{n\}} = \sum_{m_s} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} n_{(\vec{k},m_s)}, \tag{44}$$

donde la frecuencia es $\omega_{\vec{k}} = k/c$. Una pregunta adicional es inquirir sobre el *número* de fotones en el estado $\{n\}$,

$$N_{\{n\}} = \sum_{m_s} \sum_{\vec{k}} n_{(\vec{k},m_s)}. \tag{45}$$

Hagamos una observación muy importante: el número de fotones dentro de la cavidad *no* es constante. Es decir, cambia en cada emisión y absorción por los átomos de las paredes. A su vez, es claro que una vez que una región con varios átomos absorbe un número dado de fotones, no vuelve necesariamente a emitir el mismo número de átomos. Supongamos que absorbe una cierta cantidad de fotones en un cierto tiempo. Esto aumenta la energía de esa región. Esta energía puede ciertamente ser "devuelta" a la radiación o puede ser conferida a otra parte del cuerpo por vibraciones o colisiones entre los átomos. A su vez, un grupo de átomos puede recibir energía de otra parte del cuerpo y convertirla en fotones. Lo importante, primero, es que la frecuencia de los fotones absorbidos y emitidos es la misma (dentro de un intervalo), y segundo, que en *promedio* la energía por unidad de tiempo que se absorbe sea la misma que se emita (regresaremos a este punto más abajo). La conclusión es pues que en el estado de equilibrio del gas dentro de la cavidad, el número de fotones no es una constante. Por lo tanto, el estado termodinámico no puede depender de tal cantidad. El número *promedio* de fotones sí es fijo y, por lo tanto, este está determinado por el estado de equilibrio en cuestión. Esto explica por qué sólo la temperatura y el volumen especifican el estado termodinámico. Otra consecuencia es que como N no es una variable independiente, entonces el potencial químico del gas de fotones es cero, es decir, la energía libre de Helmholtz $F = F(T,V)$ y, por lo tanto,

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = 0. \tag{46}$$

B. Física estadística de un gas de fotones

Estamos en condiciones ya de realizar el cálculo de la física estadística, que consiste en calcular la función de partición en el límite termodinámico:

$$Z(T,V) = \sum_{\{n\}} e^{-\beta E_{\{n\}}} \tag{47}$$

donde la suma es sobre *todos* los estados de la radiación. El cálculo es muy sencillo

$$Z(T,V) = \prod_{\vec{k}} \prod_{m_s} \left(\sum_{n_{(\vec{k},m_s)}=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}} n_{(\vec{k},m_s)}} \right)$$

$$= \prod_{\vec{k}} \prod_{m_s} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}}$$

$$= \left(\prod_{\vec{k}} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}} \right)^2 \tag{48}$$

donde el último paso se puede hacer ya que la frecuencia $\omega_{\vec{k}}$ no depende del spin (o de la polarización) m_s.

La energía libre de Helmholtz también se calcula de manera sencilla,

$$\begin{aligned} F(T,V) &= -kT \ln Z(T,V) \\ &= -2kT \sum_{\vec{k}} \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}}. \end{aligned} \tag{49}$$

El límite termodinámico se implementa en la suma de modos al exigir que $V \to \infty$. De manera análoga a la discusión en el caso de los gases no-relativistas, podemos considerar a la cavidad como si fuera cúbica $V = L^3$, e imponer condiciones periódicas a la frontera en los modos electromganéticos permitidos en la cavidad. Siguiendo pues el mismo procedimiento para el cálculo de la densidad de estados de las partículas no-relativistas (ver Capítulo X), obtenemos que en el límite termodinámico la siguiente substitución es válida,

$$\sum_{\vec{k}} \to \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k. \tag{50}$$

Con este resultado no sólo la energía libre es manifiestamente extensiva, como debe ser, sino que en este caso obtenemos el resultado que $F = Vf(T)$, a saber,

$$F(T,V) = -2kT \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}}. \tag{51}$$

Usando el hecho que $k = 2\pi\nu/c$, transformamos la integral anterior a una sobre frecuencias,

$$F(T,V) = kTV \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 d\nu \ln \left(1 - e^{-\beta h\nu}\right). \tag{52}$$

Realizando una integral por partes, obtenemos el resultado deseado,

$$F(T,V) = -V \frac{8\pi}{3c^3} \int_0^\infty \frac{h\nu^3 d\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}. \tag{53}$$

Usando $dF = -SdT - pdV$ y $E = F + TS$, hallamos las propiedades termodinámicas predichas por los argumentos clásicos, $p = u(T)/3$, $S = 4u(T)/3T$ y $E = Vu(T)$, y el gran logro es que ahora sí conocemos la energía por unidad de volumen,

$$u(T) = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{h\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \tag{54}$$

y de esta expresión leemos la densidad de energía a temperatura T, con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$,

$$I(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}. \tag{55}$$

Como ya se discutió en la sección anterior, a esta expresión se le conoce como la distribución de Planck. Haciendo un último cambio de variable $x = h\nu/kT$ podemos calcular el valor de $u(T)$ de manera explícita, veámos,

$$u(T) = 8\pi \left(\frac{1}{hc}\right)^3 (kT)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \tag{56}$$

La integral es igual a $\pi^4/15$ y, por lo tanto,

$$u(T) = \frac{4}{c} \sigma T^4 \tag{57}$$

donde σ es la llamada constante de Stefan-Boltzmann, que discutiremos en la siguiente sección,

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{h^3 c^2}. \tag{58}$$

El análisis de la física estadística nos permite hallar un par de resultados relevantes. Primero, de la ecuación (45) de la energía de los estados de fotones, obtenemos que su promedio es

$$E = \sum_{m_s} \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \overline{n}_{(\vec{k}, m_s)}, \tag{59}$$

que, al compararla con la expresión (54) de $E = Vu(T)$, podemos concluir que el número *promedio* de fotones en el estado $(\vec{k}, m_s)$ es

$$\overline{n}_{(\vec{k}, m_s)} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\vec{k}}} - 1} \tag{60}$$

que no es otra cantidad que la distribución de Bose-Einstein para un gas con potencial químico $\mu = 0$, como ya habíamos discutido antes. Con este dato podemos calcular una cantidad que no es obvia desde el punto de vista cuántico, y que es el número *promedio* de fotones en la cavidad como función de V y T,

$$\begin{aligned}
N(V, T) &= \sum_{m_s} \sum_{\vec{k}} \overline{n}_{(\vec{k}, m_s)} \\
&= \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\vec{k}}} - 1} \\
&= 8\pi V \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \\
&= 16\pi\zeta(3) V \left(\frac{kT}{hc}\right)^3
\end{aligned} \tag{61}$$

donde $\zeta(3) \approx 1.202$ es la función ζ de Reimann de argumento 3.

V. BALANCE DETALLADO, EL TEOREMA DE KIRCHHOFF Y LA LEY DE STEFAN-BOLTZMANN

Aunque esta sección bien podría haber sido incluida antes, por razones de exposición es mejor dejarla hasta el final y usar lo que hemos desarrollado antes.

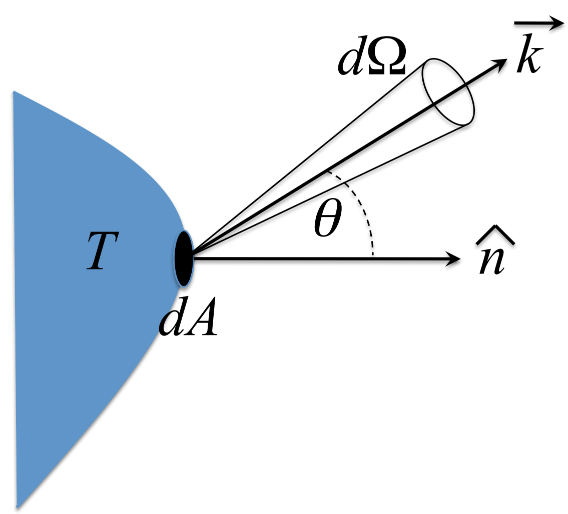

FIG. 3: Radiación emitida por una diferencial de área de un cuerpo negro. Note que no puede emitir a ángulos mayores a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Por simplicidad, consideremos un cuerpo arbitrario a temperatura T en equilibrio con radiación electromagnética, también a temperatura T. Pongamos atención a un elemento de área ΔS (infinitesimal en el límite) del cuerpo con normal $\hat{n}$, vea la figura 3. Este elemento de área absorbe y emite energía en forma de fotones (o radiación electromagnética). Sea $\mathcal{P}(\theta, \nu, m_s) d\nu d\Omega$ la cantidad de energía por unidad de tiempo (potencia) por unidad de área que el cuerpo recibe en el área ΔS, a un ángulo θ con respecto a la normal dentro de un ángulo sólido $d\Omega$, con polarización m_s y en un intervalo de frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$. Esta cantidad *no* depende del cuerpo, es una propiedad de la radiación en equilibrio. La cantidad equivalente que el cuerpo absorbe es $A(\nu, \theta)\mathcal{P}(\theta, \nu, m_s) d\nu d\Omega$, donde $A(\nu, \theta)$ es el coeficiente de absorción del cuerpo, para una frecuencia y ángulo dado. A su vez, esa misma área ΔS del cuerpo emite $J(\theta, \nu, m_s) d\nu d\Omega$ dentro de los mismos intervalos de frecuencia y dirección. Esta cantidad *sí* depende del cuerpo en cuestión. Aunque no es un resultado probado con rigor, se espera que para que el equilibro termodinámico exista, se debe obedecer que

$$J(\theta, \nu, m_s) d\nu d\Omega = A(\nu, \theta)\mathcal{P}(\theta, \nu, m_s) d\nu d\Omega \tag{62}$$

o simplemente,

$$J(\theta, \nu, m_s) = A(\nu, \theta)\mathcal{P}(\theta, \nu, m_s). \tag{63}$$

Este es el teorema de Kirchhoff. A su vez, es un ejemplo del *Principio de Balance Detallado.* Nos dice que para que se establezca el equilibrio no es suficiente que el flujo promedio de energía entre los sistemas en cuestión sea cero (es decir, que se balancee el flujo de energía), sino que además debe ser *en detalle.* En este caso, el equilibrio debe ser frecuencia por frecuencia, dirección por dirección y polarización por polarización.

El estudio de las secciones anteriores nos permite calcular $J(\theta, \nu, m_s)$, la emisión de radiación de un cuerpo a temperatura T. Sea $\hat{k}$ un vector unitario arbitrario con $\hat{k} \cdot \hat{n} = \cos\theta$. En el estado estacionario de equilibrio, el área ΔS recibe radiación, dentro de un intervalo d^3k, en la dirección $-\hat{k}$. Consideremos un intervalo de frecuencias de la radiación entre ν y $\nu + d\nu$. Entonces el número de fotones con momento entre $-\vec{k}$ y $-\vec{k} + d^3k$ ($|\vec{k}| = 2\pi\nu/c$) con polarización m_s, y que inciden sobre el área ΔS por unidad de tiempo es,

$$\overline{n}_{(-\vec{k}, m_s)} c \cos\theta \Delta S \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{64}$$

Cada fotón lleva una energía $\hbar\omega_{(\vec{k}, m_s)}$, por lo que la cantidad de energía por unidad de tiempo por unidad de área que incide sobre ese elemento es,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\theta, \nu, m_s) d\nu d\Omega &= \hbar\omega_{(-\vec{k}, m_s)} \overline{n}_{(-\vec{k}, m_s)} c \cos\theta d^3k \\ &= \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \frac{\nu^2}{c^2} d\nu \cos\theta d\Omega. \end{aligned} \tag{65}$$

Por lo tanto, como vimos arriba, la cantidad de radiación que se emite en equilibrio termodinámico es $J(\theta, \nu, m_s) = A(\nu, \theta)\mathcal{P}(\theta, \nu, m_s)$. No podemos ir más allá sin especificar el coeficiente de emisión. Si el cuerpo es "negro" podemos asignar $A(\nu, \theta) \equiv 1$ y obtenemos,

$$J(\theta, \nu, m_s) d\nu d\Omega = \frac{1}{c^2} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \cos\theta d\Omega. \tag{66}$$

Asi, si integramos sobre todas las frecuencias y sobre media esfera, obtendremos la cantidad de energía que el cuerpo emite por unidad de tiempo, por unidad de área, y para toda polarización:

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{c^2} \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \\ &= \frac{2\pi}{c^2} \int_0^\infty \frac{h\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \\ &= \sigma T^4 \end{aligned} \tag{67}$$

donde usamos las ecuaciones (56)-(58) que definieron a σ la constante de Stefan-Boltzmann. Como mencionamos al principio de este capítulo, la ley de Stefan-Boltzmann es de gran uso en la Astronomía ya que una estrella a temperatura T emite radiación esencialmente como un cuerpo negro. Aunque no lo sea, esto puede ajustarse con un coeficiente de corrección a la constante σ, es decir, la dependencia T^4 se mantiene de manera muy precisa.

---

[1] ... aunque, después, al reemitir la radiación ser vería blanco!

[2] zitterbewuegeng

[3] en la expresión de la energía hemos ignorado la energía de punto cero que, aunque estrictamente infinita, no participa en la termodinámica de la radiación. Es una energía de "fondo", a partir de la cuál se miden todas las energías.