

Termodinámica de sistemas magnéticos.

Víctor Romero Rochín

15 de mayo de 2014

Estas son unas notas breves para complementar el estudio de la termodinámica de los sistemas magnéticos vistos en clase.

1. Introducción

Cualquier sistema macroscópico, por estar formado de átomos y moléculas tiene propiedades magnéticas y eléctricas. Es decir, pueden magnetizarse y/o polarizarse en presencia de campos magnéticos y eléctricos externos, y en algunos casos, aún en ausencia de dichos campos externos. Tales características se exhiben a través de propiedades macroscópicas (extensivas) llamadas *magnetización* \vec{M} y *polarización* \vec{P} , que son cantidades vectoriales.

Repasemos brevemente el electromagnetismo en medios materiales. Las ecuaciones de Maxwell en un material son (unidades cgs):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1}$$

donde ρ y \vec{j} son la densidad de carga libre (carga por unidad de volumen) y la densidad de corriente libre (carga por unidad de tiempo por unidad de área que cruza un área en la dirección paralela a \vec{j}). Los vectores \vec{D} (desplazamiento), \vec{E} (campo eléctrico), \vec{B} (inducción magnética) y \vec{H} (campo magnético) no son independientes, dependen del material en el que estén presentes los campos. La dependencia es la siguiente:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{\mathcal{P}}\tag{2}$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{\mathcal{M}}\tag{3}$$

donde $\vec{\mathcal{P}}$ y $\vec{\mathcal{M}}$ son la densidad de polarización y de magnetización del material. La polarización \vec{P} y la magnetización \vec{M} son cantidades extensivas definidas como

$$\vec{P} = \int_V \vec{\mathcal{P}} d^3r\tag{4}$$

$$\vec{M} = \int_V \vec{\mathcal{M}} d^3r \quad (5)$$

donde la integral es sobre todo el volumen del material. La forma particular de las densidades de polarización y magnetización de un material dependen de los campos externos eléctricos y magnéticos en general, es decir,

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}(\vec{H}, \vec{E}, T, N/V) \quad (6)$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{H}, \vec{E}, T, N/V). \quad (7)$$

Esta dependencia puede ser muy complicada en los campos \vec{E} y \vec{H} , puede ser no-local espacialmente, con memoria temporal (aunque causal) y, sobre todo, puede ser no lineal y anisotrópica. Insistimos, depende del material en cuestión. Sin embargo, hemos indicado que también puede depender de la temperatura T del material y de su densidad N/V . Es decir, las densidades de polarización y magnetización son *propiedades termodinámicas* del material.

Decimos que un material es “magnético” si la dependencia de $\vec{\mathcal{M}}$ es mucho más fuerte en \vec{H} que en \vec{E} y que su polarización $\vec{\mathcal{P}}$ es casi despreciable. De manera análoga para un material “eléctrico”... aunque, recalamos, siempre y cuando los campos externos no sean muy intensos. Es decir, reconocemos que todos los materiales son magnéticos y eléctricos ante campos arbitrariamente intensos.

Nuestro interés en esta sección es en materiales “magnéticos”. En particular, porque muestran una transición de fase de segundo orden entre los estados macroscópicos llamados *paramagnetos* y *ferromagnetos*, como discutiremos más adelante. Es decir, estamos interesados en materiales que cumplen que,

$$\vec{\mathcal{P}} \approx 0 \quad \text{y} \quad \vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{H}). \quad (8)$$

Además, por sencillez de presentación, haremos la suposición adicional que \vec{H} es un vector uniforme $\vec{H} = H\hat{e}$ con H una constante, y que $\vec{\mathcal{M}}$ es paralelo a \vec{H} . Suponemos que el material no tiene cargas libres, $\rho = 0$, y las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (9)$$

2. Trabajo Magnético

Reconociendo que un material magnético es un sistema termodinámico, podemos afirmar que la energía interna del material, en equilibrio y para ser una relación fundamental, debe depender de todas las variables extensivas relevantes al sistema, es decir,

$$E = E(S, V, N, M) \quad (10)$$

donde ya supusimos que $\vec{M} = M\hat{e}$, con M constante en todo el cuerpo y \hat{e} una dirección arbitraria. A su vez, esto nos dice que en un proceso reversible debe obedecerse, por Primera Ley,

$$dE = TdS - pdV + \mu dN + dW_M \quad (11)$$

donde hemos incluido el *trabajo magnético* dW_M . El propósito de esta sección es hallar una expresión para tal trabajo. Usaremos un modelo muy sencillo para obtenerlo. Cabe resaltar que hemos identificado el cambio de energía asociado a la parte magnética como un *trabajo*, es decir, que puede calcularse de manera precisa y macroscópica (es decir, “mecánica”) y que no forma parte del calor. Esto no es trivial pues debe ser consistente con la Segunda Ley, y lo es, por supuesto.

Por simplicidad supondremos que todos los procesos son a $N = \text{constante}$ y que el material es un sólido de tal manera que también podemos considerar que $V \approx \text{constante}$. Esto nos deja sólo procesos del tipo,

$$dE = TdS + dW_M. \quad (12)$$

Hallemos una expresión para el trabajo magnético. Considere un material magnético de forma cilíndrica de longitud L y área transversal A , rodeado en su totalidad por un solenoide de \mathcal{N} vueltas, hecho de un cable que obedece la ley de Ohm, pero del que podemos despreciar su disipación de energía en forma de calor de Joule. Es decir, el cable lleva sólo corriente i proporcionada por una batería. Vea la figura.

Usamos la ecuación de Ampere en condiciones estacionarias, es decir,

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (13)$$

Integramos esta ecuación sobre el área denotada por el circuito rectangular de líneas punteadas, con la normal \hat{n} del área saliendo del plano del dibujo,

$$\int \nabla \times \vec{H} \cdot \hat{n} dA = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} \cdot \hat{n} dA. \quad (14)$$

Primero notamos que la integral del lado derecho es igual a $\mathcal{N}i$, es decir, cada espira contribuye con una corriente i . En el lado izquierdo usamos el teorema de Stokes,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi\mathcal{N}}{c} i, \quad (15)$$

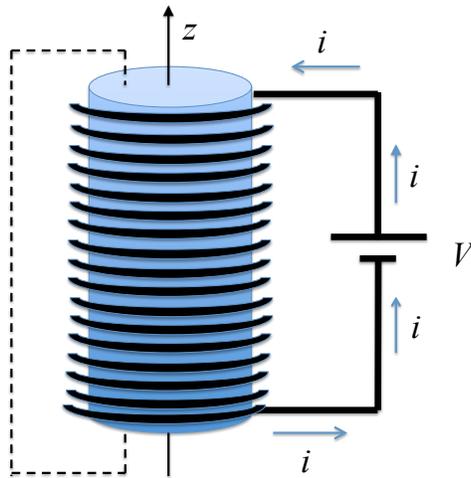


Figura 1: Material magnético de largo L , área A , rodeado de un solenoide de \mathcal{N} vueltas y con corriente i .

donde la integral es sobre la línea punteada. Si la longitud L material es muy larga, podemos argüir que por simetría $\vec{H} = 0$ fuera del material y $\vec{H} = H\hat{z}$, con H constante. La ecuación anterior nos da,

$$HL = \frac{4\pi\mathcal{N}}{c}i \quad (16)$$

es decir, la magnitud de campo magnético H es

$$H = \frac{4\pi}{Lc}\mathcal{N}i. \quad (17)$$

Suponemos que el materia es isotrópico, de tal manera que podemos afirmar que el material se magnetiza en la misma dirección que \vec{M} , es decir, afirmamos que $\vec{M} = \mathcal{M}\hat{z}$. Además podemos asegurar que $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H, T, N/V)$, es decir, debe ser función de H , T y N/V , pero cuidado! no podemos dar tal dependencia en general! ... depende del material en cuestión. Dicho sea de paso, la relación $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H, T, N/V)$ es la ecuación de estado del material y sólo la podemos saber haciendo experimentos y/o haciendo un modelo del material. Regresaremos a este punto después ... Notamos también que existe un campo de inducción magnética en el material dado por $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\mathcal{M}$.

Ahora lo que queremos es calcular el trabajo que se realiza en el material (i.e. su cambio de energía) al variar ligeramente la corriente i de manera externa. Es decir, si suponemos que $i = q/\Delta t$ donde q es la carga que pasa por el cable en un intervalo de tiempo Δt , ahora suponemos que hacemos un cambio $\Delta q \approx dq$ de la carga en un tiempo dado (largo! para que sea cuasiestático) y queremos hallar el cambio de la energía en el material ... Veamos. Si la corriente cambia en el tiempo, $di/dt \neq 0$, esto genera un cambio en el tiempo en \vec{H} , y a su vez en \vec{B} , es decir $\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$, y por tanto un cambio de flujo de inducción en el material. A su vez, por la ecuación de Faraday,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \quad (18)$$

se genera un campo eléctrico en el alambre que se *opone* al cambio, es decir, una fuerza electromotriz \mathcal{E} contra la que el incremento de carga dq hace trabajo. Calculemos dicho campo eléctrico y la fuerza electromotriz asociada.

Primero, suponemos que como la carga por unidad de tiempo que atraviesa los alambres cambia, esto produce un cambio en la inducción \vec{B} . Esto induce un campo eléctrico \vec{E} en el material. Entonces, integremos la ecuación de Faraday sobre una superficie de área A , cuyo borde sea igual a una espira de alambre, y cuya normal apunte en la dirección \hat{z} ,

$$\begin{aligned} \int_A \nabla \times \vec{E} \cdot \hat{z} dA &= -\frac{1}{c} \int_A \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot \hat{z} dA \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{1}{c} A \frac{dB}{dt} \end{aligned} \quad (19)$$

donde en el lado izquierdo usamos la ley de Stokes y en el derecho que $\vec{B} = B(t)\hat{z}$, es decir, dependiente del tiempo pero uniforme dentro del material. El

resultado anterior es para una vuelta del solenoide, y el lado izquierdo es la fuerza electromotriz en tal vuelta. Por lo tanto, la fuerza electromotriz inducida en todo el solenoide es

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{\mathcal{N}}{c} A \frac{dB}{dt}. \quad (20)$$

Notamos que la batería externa (o el agente externo), para poder lograr el incremento en la carga dq en el alambre tiene que generar una fuerza electromotriz $\mathcal{E} = -\mathcal{E}_{ind}$, es decir, igual pero en sentido contrario a la inducida.

Ahora recordamos un resultado muy importante: dado un campo eléctrico \vec{E} , el trabajo mecánico que hace dicho campo sobre una carga Δq para moverla de un punto 1 a otro 2 en el espacio, es

$$\begin{aligned} \Delta W_{ext} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \Delta q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \Delta q \mathcal{V} \end{aligned} \quad (21)$$

donde \mathcal{V} es la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2.

Por lo tanto, el trabajo que tiene que hacer el agente externo para incrementar la carga en el alambre por dq es,

$$\begin{aligned} dW &= \mathcal{E} dq \\ &= \frac{\mathcal{N}}{c} A \frac{dB}{dt} dq \\ &= \frac{\mathcal{N}}{c} A \frac{dB}{dt} \frac{dq}{dt} dt \\ &= \frac{\mathcal{N}}{c} A i dB \end{aligned} \quad (22)$$

donde en la última línea hemos identificado a la corriente $i = dq/dt$. Note que esta corriente la podemos evaluar con aquella *antes* del cambio de la carga. Es decir, si incluimos tal cambio, daría una corrección de orden superior a dB . Por lo tanto, podemos usar la ecuación (17) para expresar i en términos de H . Sustituyendo en la expresión para el trabajo, obtenemos,

$$dW = \frac{LA}{4\pi} H dB. \quad (23)$$

Notamos que $LA = V$ es el volumen del material. Notamos también que la expresión anterior es el trabajo magnético *total*, es decir, usando

$$dB = dH + 4\pi d\mathcal{M} \quad (24)$$

podemos escribir

$$dW = \frac{V}{4\pi} H dH + V H d\mathcal{M}. \quad (25)$$

En la expresión anterior, el primer término es el trabajo sobre el campo externo, exista material o no, mientras que el segundo es el trabajo magnético hecho sobre el material; usando $M = V\mathcal{M}$ ya que \mathcal{M} es uniforme, hallamos finalmente una expresión para el trabajo magnético hecho *sobre* un material,

$$dW_M = H dM. \quad (26)$$

Si esta cantidad es positiva, afirmamos que el agente externo hace trabajo magnético sobre el material, si es negativo el material hace trabajo sobre sus alrededores.

La Primera Ley para procesos reversibles de materiales magnéticos es, finalmente,

$$dE = T dS + H dM. \quad (27)$$

Es decir, $E = E(S, M)$, para N y V constantes. O sea,

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_M = T \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial E}{\partial M}\right)_S = H. \quad (28)$$

3. Potenciales Termodinámicos

La relación fundamental $E = E(S, M)$ nos dice que si la conocemos, toda la termodinámica del material magnético está determinada (a N y V constantes). Siguiendo la Segunda Ley, podemos mostrar que $E(S, M)$ es una función *convexa* de sus dos variables y que la relación de Euler es,

$$E = TS + HM - pV + \mu N. \quad (29)$$

Podemos definir, igual que para los fluidos, la energía libre de Helmholtz como

$$F = E - TS \quad (30)$$

con

$$dF = -S dT + H dM. \quad (31)$$

Y por tanto, $F = F(T, M)$, convexa en M , cóncava en T , y

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_M = -S \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial M}\right)_T = H. \quad (32)$$

Sin embargo, por razones empíricas, porque en el laboratorio lo que se puede controlar más fácilmente son la temperatura T y el campo magnético externo H , podemos usar otro potencial termodinámico, análogo a la energía libre de Gibbs, de la siguiente forma,

$$\mathcal{F} = E - TS - HM \quad (33)$$

con

$$d\mathcal{F} = -S dT - M dH \quad (34)$$

o sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}(T, H)$, cóncava en ambas, y

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_H = -S \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H}\right)_T = -M. \quad (35)$$

En muchos textos a \mathcal{F} se le identifica como la “energía libre de Helmholtz”, pero es un error. Esta es realmente una “energía libre de Gibbs magnética”... la nomenclatura es lo de menos, lo importante es entender la diferencia entre ambos potenciales termodinámicos.

Notamos que si (T, H) son las variables naturales, entonces obtendríamos la magnetización del material M como función de (T, H) , es decir, $M = M(T, H)$. Como mencionamos antes, esta es la ecuación de estado del material, lo que se mide en la vida real y de lo que se hacen modelos teóricos. Una cantidad asociada es la *susceptibilidad magnética* (que es el análogo de la compresibilidad isotérmica de un fluido). Esta se define como

$$\chi_M(H, T) = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T. \quad (36)$$

Esta cantidad es muy importante pues nos indica qué tanto se magnetiza un sistema ante un campo magnético dado, a temperatura constante. La Segunda Ley nos indica que $\chi_M(H, T) > 0$. Esto es fácil de verificar pues $F(T, M)$ es convexa en M , es decir

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial M^2}\right)_T > 0, \quad (37)$$

lo que da,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial M}\right)_T > 0 \quad (38)$$

que es igual a χ_M^{-1} .

En la siguiente sección discutiremos la Teoría de Landau de la transición paramagnetismo-ferromagnetismo, que es una transición de fase tanto de Primero como de Segundo Orden. Como veremos, la Teoría de Landau es (más que) el análogo magnético de la Teoría de van der Waals de la transición líquido-vapor. La relación en la vecindad del punto crítico es muy profunda.

4. Paramagnetismo y Ferromagnetismo. Teoría de Landau.

Uno de los fenómenos más fascinantes de la materia es el magnetismo “permanente”, como el de los imanes comunes, más propiamente dicho, el *ferromagnetismo*. Típicos materiales son el Hierro, el Nickel y el muy reciente y poderoso, el de Neodimio (que realmente no es puro, es el compuesto $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$, desarrollado apenas en 1982 por *General Motors*).

Lo que no es obvio es que el ferromagnetismo es una fase de la materia, así como lo es la fase líquida, sólida o gaseosa de un material. Es decir, el ferromagnetismo es una fase que depende de la temperatura: existe una temperatura crítica T_c (también llamada de Curie), tal que arriba de ella, $T > T_c$, el material es *paramagneto* y por abajo, $T \leq T_c$ el material es ferromagneto.

Para ser precisos, el *paramagnetismo* es una fase en la cuál, en ausencia de un campo magnético externo, $H = 0$, la magnetización del material es cero, $M = 0$. Sólo que el campo magnético sea diferente cero, $H \neq 0$, entonces la magnetización no es cero $M \neq 0$. Decimos que $M = M(H, T)$, función tanto de H como de T , tal que $M \neq 0$ si y sólo si $H \neq 0$. Por supuesto, si $H \neq 0$ también se tiene que $M \neq 0$.

El ferromagnetismo es una fase en la que el material se magnetiza espontáneamente en ausencia de campo externo, es decir $M \neq 0$ aún con $H = 0$. Esto ocurre sólo si la temperatura del materia está por debajo de la temperatura de Curie (propia del material), $T < T_c$.

La teoría de Landau es un modelo de un material que presenta la transición paramagnetismo-ferromagnetismo de una manera sencilla. Adelantamos que es muy similar a la transición líquido-vapor del modelo de van der Waals; discutiremos el por qué. La teoría de Landau es la semilla de teorías más sofisticadas que dieron lugar a una comprensión profunda de las transiciones críticas y del concepto del *rompimiento espontáneo de la simetría*.

Landau propuso lo siguiente. Supongamos por el momento que conocemos la energía libre de Helmholtz del material, es decir $F = F(M, T)$. En dado caso, el campo magnético es,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial M}\right)_T = H, \quad (39)$$

y sabemos que F es convexa en M , es decir,

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial M^2}\right)_T > 0. \quad (40)$$

Ahora supongamos que, de manera *externa*, tanto el campo magnético H como la temperatura T están fijos. La pregunta es, cuál es el valor de la magnetización para esos valores? Sea \bar{M} tal magnetización, es decir $\bar{M} = M(H, T)$, donde $M(H, T)$ es la solución a la ecuación (39).

La idea es similar a lo que se hizo con el modelo de van der Waals: definimos a una función $\mathcal{G} = \mathcal{G}(M; H, T)$, que es función de M para H y T fijos, de la siguiente manera:

$$\mathcal{G}(M) = F(T, M) - MH. \quad (41)$$

Note que *no* es la función \mathcal{F} de la sección anterior! Repetimos, es una función sólo de M , dados los parámetros T y H . Esta función tiene la siguiente propiedades. Notamos primero que si la derivamos con respecto a M obtenemos,

$$\frac{d\mathcal{G}}{dM} = \left(\frac{\partial F}{\partial M}\right)_T - H. \quad (42)$$

Entonces, si a esta derivada la evaluamos en \bar{M} , obtenemos

$$\left. \frac{d\mathcal{G}}{dM} \right|_{\bar{M}} = 0. \quad (43)$$

Ahora, si derivamos otra vez y evaluamos en \bar{M} nos da,

$$\left. \frac{d^2\mathcal{G}}{dM^2} \right|_{\bar{M}} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial M^2} \right)_T > 0. \quad (44)$$

Es decir, hallamos que la función \mathcal{G} , como función de M para T y H fijos, tiene un mínimo en la magnetización del sistema $\bar{M} = M(H, T)$ para esos valores de T y H . Note que $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\bar{M}, H, T)$, es decir evaluada en el mínimo, ahora sí es la energía libre \mathcal{F} , i.e. $\mathcal{F} = \mathcal{G}(\bar{M}, H, T)$. Asegúrese de entender este punto ... El proceso anterior parece un argumento circular, y lo es, sólo que nos permite *proponer un modelo* para la energía libre de Helmholtz $F = F(M, T)$, y luego, por un proceso de minimización obtener el valor de la magnetización del sistema. Esto fue lo que hizo Landau.

Recordemos que para $T > T_c$ la magnetización es cero, $M = 0$ si el campo magnético es cero $H = 0$; y para $T < T_c$ la magnetización es diferente de cero $M \neq 0$. Landau razonó que en la vecindad de T_c , se podría hacer un desarrollo de Taylor en la magnetización y la temperatura. Landau propuso que la energía libre debería tener la siguiente forma, para T cerca de T_c

$$F(M, T) \approx F_0(T) + \frac{1}{2}\bar{a}(T)M^2 + \frac{1}{4}\bar{b}(T)M^4 \quad (45)$$

Primero, notamos que se proponen sólo potencias pares de M . Esto es porque, en principio, M es un vector y F es un escalar, sin embargo, como no existe ninguna dirección preferencial, la energía libre debe ser invariante ante la orientación de los ejes coordenados del laboratorio. Por lo tanto, para cada valor posible de la magnitud $M = |\vec{M}|$, existe un número infinito de soluciones vectoriales \vec{M} apuntando en cualquier dirección. Decimos que F sólo puede depender del invariante $M^2 = \vec{M} \cdot \vec{M}$ de la magnetización.

Debido a la suposición de que $F(M, T)$ es analítica cerca de T_c , los coeficientes dependientes de la temperatura deben poderse escribirse como series de Taylor alrededor de T_c :

$$F_0(T) = F_0(T_c) + \frac{dF_0(T_c)}{dT}(T - T_c) + \dots \quad (46)$$

$$\bar{a}(T) = a + a_0(T - T_c) + \dots \quad (47)$$

$$\bar{b}(T) = b + b_0(T - T_c) + \dots \quad (48)$$

Primero, notamos que $\bar{b}(T)$ no puede cambiar de signo porque F no daría lugar a un mínimo estable. Por lo tanto, el término a orden cero debe ser positivo, $b > 0$ y podemos despreciar las correcciones cerca de T_c , es decir, podemos escribir $\bar{b}(T) = b > 0$. Segundo, la idea es que el modelo lleve a que $M = 0$ si

$T > T_c$ y $M \neq 0$ para $T < T_c$. Como veremos adelante, esto requiere que $\bar{a}(T)$ cambie de signo en $T = T_c$ y sea cero en T_c . Por lo tanto, $a = 0$ y podemos escribir $\bar{a}(T) = a_0(T - T_c)$ con $a_0 > 0$. Como el término $F_0(T)$ no determina la magnetización podemos aproximar $F_0(T) = F_0(T_c)$, una constante.

El modelo de Landau queda como,

$$F(M, T) \approx F_0(T_c) + \frac{1}{2}a_0(T - T_c) M^2 + \frac{1}{4}bM^4 \quad (49)$$

El mínimo de \mathcal{G} , que determina la magnetización está dado por $d\mathcal{G}/dM = 0$, dando la ecuación

$$a_0(T - T_c)M + bM^3 - H = 0. \quad (50)$$

Estudiemos primero $T > T_c$. Si $H = 0$, como $a_0(T - T_c) > 0$, entonces la única solución es $M = 0$. Es decir, el sistema es paramagnético. Si $H \neq 0$, pero no muy grande, y T es muy cercano a T_c , es claro que $M \neq 0$ pero es una magnetización muy pequeña. En este caso podemos desprestigiar el término M^3 con respecto a M y obtenemos,

$$M(H, T) \approx \frac{1}{a_0(T - T_c)} H \quad (51)$$

que no es otro resultado que la llamada Ley de Curie-Weiss del paramagnetismo ... se deja a lector que realice una gráfica de \mathcal{G} para $T > T_c$ tanto para $H = 0$ como para $H \neq 0$.

Ahora analizamos el caso $T < T_c$. De la ecuación (50) hallamos que, como $a_0(T - T_c) < 0$ siempre existen soluciones reales con $M \neq 0$, tanto para $H = 0$ como para $H \neq 0$. Para $H > 0$, haciendo una gráfica de \mathcal{G} vs M , podemos verificar que existen tres soluciones de (50), una que es un máximo de \mathcal{G} y dos mínimos. Un mínimo es más estable que el otro, dando una magnetización $M > 0$. Dejamos al lector verificar este resultado.

Para $T < T_c$, el caso más interesante es para $H = 0$, que es la solución ferromagnética. Si hacemos $H = 0$ en (50), encontramos 3 soluciones, $M = 0$ y

$$M = \pm \sqrt{\frac{a_0(T_c - T)}{b}}. \quad (52)$$

Haciendo una gráfica de \mathcal{G} vs M podemos verificar que la solución $M = 0$ es un máximo, y por lo tanto inestable, mientras que las soluciones (52) son igualmente estables: nos indican que existen dos fases posibles, una con magnetización positiva y otra de igual magnitud pero negativa. En un experimento, el sistema sólo tomará una de ellas, no sabemos cuál, pero se magnetizará en una dirección. A este fenómeno se le llama *rompimiento espontáneo de la simetría*. Se llama así porque para $H = 0$, tanto F como \mathcal{G} tienen la simetría de que sólo dependen de la magnitud de la magnetización, mientras que la magnetización en el experimento toma un valor dado en una dirección arbitraria, "rompiendo" la simetría de la energía libre.

5. Comportamiento crítico

Cerca del punto crítico T_c y $H = 0$, podemos estudiar el comportamiento de varias cantidades relevantes que, como veremos, tienen un comportamiento *universal*, es decir, igual que el gas de van der Waals. Veámos.

En los sistemas magnéticos, el *parámetro de orden* es la magnetización M , que es cero para $H = 0$ y $T > T_c$, pero $M \neq 0$ para $T < T_c$. Se espera que sea,

$$M \sim (T_c - T)^\beta \quad (53)$$

El valor del exponente crítico β lo obtenemos directamente de la solución (52), vemos que, salvo constantes,

$$M \sim (T_c - T)^{1/2} \quad (54)$$

es decir,

$$\beta = \frac{1}{2}. \quad (55)$$

Comparando con el parámetro de orden del fluido de van der Waals, observamos que $\Delta v \sim (T_c - T)^{1/2}$.

Ahora analizamos la susceptibilidad magnética, dada por (vea ec. (36)),

$$\chi_M(H, T) = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T. \quad (56)$$

Se espera que para $H = 0$ y cerca de T_c ,

$$\chi_M \sim |T - T_c|^{-\gamma} \quad (57)$$

con $\gamma > 0$, es decir, la susceptibilidad magnética diverge conforme la temperatura se aproxima a la crítica, a campo cero $H = 0$.

De la ecuación (50), derivando ambos lados con respecto a H a $T = \text{constante}$, se obtiene,

$$a_0(T - T_c) \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T + 3bM^2 \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T = 1, \quad (58)$$

que da,

$$\left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T = \frac{1}{a_0(T - T_c) + 3bM^2(H, T)}. \quad (59)$$

Ahora evaluamos en $H = 0$. Si $T > T_c$, sabemos que la magnetización es cero, y hallamos que la susceptibilidad es

$$\left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T = \frac{1}{a_0(T - T_c)}. \quad (60)$$

Para $T < T_c$, la magnetización está dada por (52), es decir $M^2 = a_0(T_c - T)/b$, y la susceptibilidad es ahora,

$$\left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T = \frac{1}{2a_0(T_c - T)}. \quad (61)$$

Juntando los dos resultados, hallamos que podemos escribir

$$\chi_T \sim |T - T_c|^{-1} \quad (62)$$

e identificamos el exponente crítico $\gamma = 1$. Recordamos que el exponente γ de la compresibilidad isotérmica de un fluido es también igual a 1.

Finalmente podemos calcular la forma de la isoterma crítica $H \sim M^\delta$, para $T = T_c$. De nuevo, de la ecuación (50), si ponemos $T = T_c$, hallamos que

$$H = bM^3. \quad (63)$$

Es decir, el exponente crítico es $\delta = 3$. Una vez más, comparando con el comportamiento $p - p_c \sim (v - v_c)^\delta$, para un fluido de van der Waals a $T = T_c$, hallamos que δ tiene el mismo valor.

Las conclusiones de esta sección es que el modelo de Landau muestra comportamiento crítico de la transición paramagnetismo-ferromagnetismo, de acuerdo a las observaciones experimentales, lo que lo hace un buen modelo. La segunda observación es que los exponentes críticos no están de acuerdo con lo que se mide experimentalmente, de la misma manera que ocurre con los exponentes críticos de la transición líquido-vapor. La razón, muy sutil, es la suposición de que la energía libre de Helmholtz es analítica alrededor del punto crítico.