Termodinámica.

Tarea 7

A entregar: Viernes 15 de diciembre de 2017.

Termodinámica de una liga

Los siguientes son unos problemas sencillos, sobre la termodinámica de un cilindro delgado elástico, o mejor dicho, de una liga. Análogo al caso de un gas o de un sistema magnético, la dificultad ahora es la expresión del trabajo. Es casi obvio (o no?) que el trabajo (adiabático) en estirar dicho material está dado por

$$dW = \mathcal{T} dL$$

donde $\mathcal{T}$ es la tensión de la liga y dL es el incremento en la longitud de la misma. Es decir, tiene la característica de ser "fuerza por distancia", literalmente. Notamos que el trabajo es positivo si el agente externo estira la liga ($dL > 0$), mientras que es negativo si la liga se contrae ($dL < 0$); en este caso, la liga hace trabajo sobre el agente externo.

Asi, la energía interna del material es $E = E(S, L)$ y la primera Ley se escribe:

$$dE = TdS + \mathcal{T} dL.$$

El ecuación de estado ideal de dicho sistema es:

$$\mathcal{T}(T, L) = KT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right),$$

donde K es una constante y $L_0 = L_0(T)$ es la longitud del alambre o liga a tensión cero y sólo depende de la temperatura.

Problema 40

Muestre que el módulo de Young isotérmico está dado por:

$$Y = \frac{KT}{A}\left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^2}\right),$$

donde Y está definido como

$$Y = \frac{L}{A}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial L}\right)_T,$$

con A la sección transversal del alambre, supuesta constante. Esta cantidad es la susceptibilidad análoga a la compresibilidad isotérmica.

Problema 41

Calcule el trabajo necesario para comprimir al alambre isotérmica y quasi-estáticamente de L_0 a $L_0/2$.

Problema 42

Suponiendo que el alambre se estira reversible e isotérmicamente de $L = L_0$ a $L = 2L_0$, (a) muestre que el calor transferido es

$$Q = -KTL_0(1 - \frac{5}{2}\alpha_0 T)$$

y (b) que el cambio de energía interna está dado por

$$\Delta E = \frac{5}{2}KT^2 L_0 \alpha_0$$

donde α_0 es la expansividad lineal a tensión cero dada por

$$\alpha_0 = \frac{1}{L_0}\frac{dL_0}{dT}.$$

Problema 43

(a) Muestre que

$$\left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)_T = AY\alpha_0 T.$$

(b) Muestre que

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \mathcal{T}}\right)_T = L\alpha_0 T.$$

Problema 44

Cuando una liga este se estira adiabáticamente, ocurre un cambio de temperatura (i.e. se calienta: póngase una liga en la boca y estírela lentamente para corroborar este efecto). Esto se llama el efecto elastocalórico. La magnitud de este efecto está dada por la cantidad $(\partial T/\partial L)_S$. Muestre que

$$\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S = \frac{KT}{C_L}\left[\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right) - \alpha_0 T\left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^2}\right)\right]$$

donde C_L es la capacidad calorífica a longitud constante.

Problemas de Magnetismo

Considere un material paramagnético que obedece la Ley de Curie,

$$M = \frac{C_c}{T}H$$

donde C_c es una constante, y cuya capacidad calorífica a magnetización constante es

$$\begin{aligned} C_M &= T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M \\ &= \frac{A}{T^2}, \end{aligned}$$

con A constante también.

Resuelva los siguientes problemas relativos a dicho material paramagnético:

Problema 45

Muestre que trabajo realizado durante un cambio isotérmico es:

$$\begin{aligned} W &= \frac{T}{2C_c}\left(M_f^2 - M_i^2\right) \\ &= \frac{C_c}{2T}\left(H_f^2 - H_i^2\right) \end{aligned}$$

donde los subíndices i y f se refieren a los estados inicial y final respectivamente.

Problema 46

Muestre que la entropía como función de T y M está dada por,

$$S = \frac{1}{2}\frac{A}{T^3} - \frac{M^2}{2C_c} + Constante.$$

Problema 47

Muestre que la capacidad calorífica a campo constante H está dada por,

$$C_H - C_M = C_c\frac{H^2}{T^2}$$

Problema 48

Suponiendo que además de obedecer la ley de Curie, se cumple también que $C_M = A/T^2$, con A constante, muestre

$$\left(\frac{\partial C_H}{\partial H}\right)_T = \frac{2C_cH}{T^2}$$

Problema 49

Suponga que se realize un ciclo de Carnot usando al sólido paramagnético como material de trabajo (i.e. como el gas ideal en el caso usual). Muestre que

$$\frac{|Q_{in}|}{|Q_{out}|} = \frac{T_{alta}}{T_{baja}}$$

con obvia notación.

Problema 50. Un gas paramagnético.

Considere ahora un *gas* paramagnético. Esto es, un gas que tiene las propiedades usuales de presión, volumen, etc. y que además es paramagnético. La entropía puede expresarse como función de $S = S(N, V, T, M)$

(a) Para $N =$ constante, muestre que:

$$TdS = C_{V,M}dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,M} dV - T\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{V,M} dM$$

donde

$$C_{V,M} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,M}$$

(b) Si el gas es ideal y obedece la Ley de Curie, muestre que

$$TdS = C_{V,M}dT + \frac{NkT}{V}dV - \frac{T}{C_c}MdM$$

(c) Haga un bosquejo de la *superficie* adiabática en un diagrama TVM, suponiendo que que $C_{V,M}$ es constante.