EL TENSOR DE PRESIONES

La discusión siguiente se centra en el tensor de presiones; sin embargo, los conceptos matemáticos pueden ser extendidos a otras clases de tensores.

El tensor de presiones es un objeto matématico que nos representa las fuerzas que el resto de un medio continuo (sólido o fluido) ejerce *sobre* un elemento diferencial de área dado del fluido en un punto espacial $\vec{r}$. Las unidades del tensor son *fuerza/área*. A los elementos P_{ij} con $i = j$ les llamamos presiones normales y a aquellos con $i \neq j$, presiones de corte.

El tensor de presiones tiene las siguientes componentes

$$\tilde{P}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} P_{xx}(\vec{r}) & P_{xy}(\vec{r}) & P_{xz}(\vec{r}) \\ P_{xy}(\vec{r}) & P_{yy}(\vec{r}) & P_{yz}(\vec{r}) \\ P_{xz}(\vec{r}) & P_{yz}(\vec{r}) & P_{zz}(\vec{r}) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Tambien lo podemos representar como $P_{ij}(\vec{r})$ con i y j tomando los valores x, y ó z. Note que en la representación dada por la ec.(1) ya hemos supuesto que el tensor es simétrico, es decir, $P_{ij} = P_{ji}$.

Considere una diferencial de área en el punto $\vec{r}$,

$$d\vec{S} = dS\,\hat{n}(\vec{r}) \tag{2}$$

donde dS es el valor de la diferencial de área y $\hat{n}(\vec{r})$ es un vector normal a la superficie en $\vec{r}$. Por ejemplo, si el vector normal de la superficie es $\hat{x}$, i.e. el vector normal en la dirección positiva de la coordenada x, entonces la diferencial de área es $dS = dydz$. En general, un vector normal arbitrario tiene componentes $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ con la restricción $\hat{n} \cdot \hat{n} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, por ser unitario.

El significado físico del tensor de presiones es el siguiente: la *fuerza* $d\vec{F}(\vec{r})$ que el resto del fluido ejerce sobre la diferencial de área $d\vec{S}$, localizada en el punto $\vec{r}$, es

$$\begin{aligned} d\vec{F}(\vec{r}) &= -\tilde{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \\ &= -\tilde{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\,dS \quad . \end{aligned} \tag{3}$$

Más abajo discutiremos el significado matemático de la expresión $\tilde{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})dS$ y nos convenceremos de que es un vector. Vemos que es claro que a dicha fuerza la consideremos de tamaño diferencial $d\vec{F}$ porque actúa sobre una diferencial de área dS. Así, si tenemos una superficie cerrada, inmersa en un fluido y cuyas normales apuntan hacia "afuera" de la superficie, la fuerza total que el fluido ejerce sobre dicha superficie es

$$\vec{F} = -\int_S \tilde{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\,dS \tag{4}$$

donde la integral es sobre toda la superficie, vea la Fig.1.

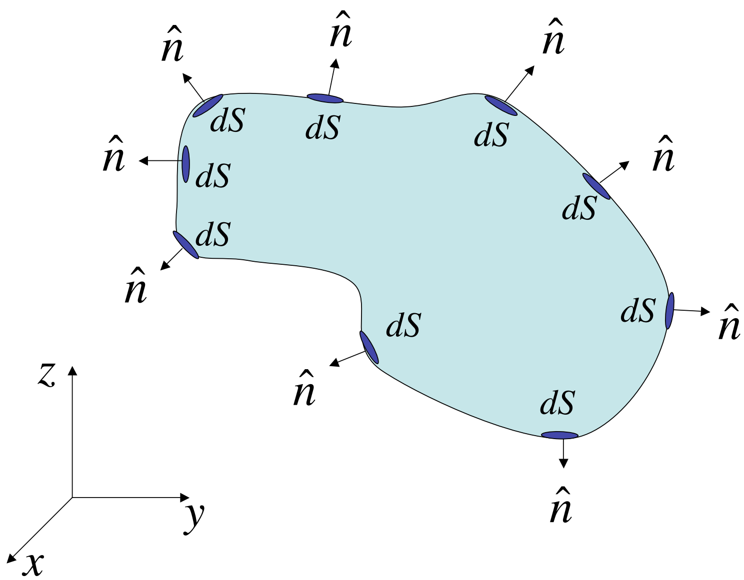

Figura 1: Cuerpo de forma arbitraria inmerso en un fluido o sólido con tensor de presiones dado $\tilde{P}(\vec{r})$. Se muestran unas cuantas diferenciales de área y sus normales correspondientes.

Significado matemático de la expresión $\tilde{P}(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r})dS$. Esta cantidad es un vector: el producto "punto" de un tensor por un vector, es un vector. Para entenderlo, hagamos un paréntesis sobre *representaciones*. La ec.(1) es en realidad una representación del tensor. Es decir, un tensor (de rango 2) es un objeto de 9 números con ciertas propiedades que podemos representar como la matriz 3×3 de la ec.(1). De la misma manera, un vector $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ lo podemos representar como una matriz 1×3, i.e. como un vector "columna",

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{5}$$

En particular, los vectores unitarios $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ están dados por,

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Ahora definimos el vector *transpuesto* $\vec{a}^T$ como la matriz 3×1,

$$\vec{a}^T = (a_x \ \ a_y \ \ a_z) \tag{7}$$

es decir, como el vector "renglón" de $\vec{a}$. Así, el producto "punto" de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se representa como

$$\begin{aligned} \vec{b}^T\cdot\vec{a} &= (b_x \ \ b_y \ \ b_z)\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned} \tag{8}$$

donde hemos usado las propiedades de multiplicación de matrices "renglones por columnas".

Sea $\tilde{A}$ un tensor que puede representarse como una matriz 3×3,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Podemos realizar dos tipos de producto punto con $\vec{a}$ y con $\vec{a}^T$. El primero es el tensor por el vector columna

$$\begin{aligned} \tilde{A}\cdot\vec{a} &= \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{xx}a_x + A_{xy}a_y + A_{xz}a_z \\ A_{yx}a_x + A_{yy}a_y + A_{yz}a_z \\ A_{zx}a_x + A_{zy}a_y + A_{zz}a_z \end{pmatrix} \\ &= \vec{c} \end{aligned} \tag{10}$$

y vemos que nos da como resultado un vector columna. El otro producto punto es un vector renglón por un tensor, que da un vector renglón,

$$\begin{aligned} \vec{a}^T \cdot \tilde{A} &= (a_x \;\; a_y \;\; a_z) \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \\ &= (a_x A_{xx} + a_y A_{yx} + a_z A_{zx} \;,\; a_x A_{xy} + a_y A_{yy} + a_z A_{zy} \;,\; a_x A_{xz} + a_y A_{yz} + a_z A_{zz}) \\ &= \vec{d}^T \end{aligned} \quad (11)$$

Importante: Note que las componentes de $\vec{c}$ y $\vec{d}^T$ no son las mismas ... a menos que el tensor sea simétrico, i.e. si $A_{ij} = A_{ji}$, entonces los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son iguales.

La notación anterior es realmente engorrosa! ... se puede facilitar usando la convención de Einstein (una de las grandes aportaciones del Maestro, que introdujo cuando realizó la Teoría General de la Relatividad). Denotamos a los vectores $\vec{a}$ como a_i, donde $i = x$, y, ó z, y a los tensores $\tilde{A}$ como A_{ij}. El producto punto de dos vectores es simplemente,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i \quad (12)$$

y la *convención de Einstein* es "cuando aparezcan índices repetidos, súmese sobre sus posibles valores":

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \; . \quad (13)$$

Ahora los productos con los tensores,

$$\vec{c} = \tilde{A} \cdot \vec{a} \quad (14)$$

se escribe

$$c_i = A_{ij} a_j \quad (15)$$

compare con la ecuación (10), es la misma! Verifíquelo: ponga $i = x$ y luego haga la suma sobre los valores repetidos de j, le dará el valor de la primera componente de $\vec{c}$ en la ec.(10), hágalo por favor.

El otro producto,

$$\vec{d}^T = \vec{a}^T \cdot \tilde{A} \quad (16)$$

se escribe

$$d_i = a_j A_{ji} \quad (17)$$

compare con la ec(11) y verifique que es lo mismo ... Note que con esta representación ya no es necesario distinguir entre vectores columna y vectores renglón.

De lo anterior, hallamos que efectivamente,

$$d\vec{F}(\vec{r}) = -\tilde{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) dS \quad (18)$$

es un vector. En notación abreviada,

$$dF_i(\vec{r}) = -P_{ij}(\vec{r}) n_j(\vec{r}) dS \quad (19)$$

es la componente i de la diferencial de fuerza total que el fluido ejerce sobre la diferencial de superficie dS en el punto $\vec{r}$ cuya normal es $\hat{n}$.

Con la expresión anterior podemos entender mejor el significado del tensor P_{ij}. Por ejemplo, $-P_{xy}$ es la fuerza por unidad de área a largo de la dirección $\hat{y}$ sobre una diferencial de área cuya normal es $\hat{x}$:

$$\begin{aligned} -\tilde{P}(\vec{r}) \cdot \hat{x}\, dydz &= -\begin{pmatrix} P_{xx}(\vec{r}) & P_{xy}(\vec{r}) & P_{xz}(\vec{r}) \\ P_{xy}(\vec{r}) & P_{yy}(\vec{r}) & P_{yz}(\vec{r}) \\ P_{xz}(\vec{r}) & P_{yz}(\vec{r}) & P_{zz}(\vec{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dydz \\ &= -\begin{pmatrix} P_{xx}(\vec{r}) \\ P_{xy}(\vec{r}) \\ P_{xz}(\vec{r}) \end{pmatrix} dydz. \end{aligned} \tag{20}$$

Con esta interpretación, debería (?) ser claro la connotación de presiones normales y de corte para $i = j$ y $i \neq j$, respectivamente.

Balance de fuerzas en un medio continuo.

Sea un fluido o sólido dado y consideremos un elemento de volumen $dV = dxdydz$ cuya masa es $dm = \rho(\vec{r})dxdydz$. Sea $d\vec{F}_{ext}(\vec{r})$ la (diferencial) de fuerza *externa* que actúa sobre dicha masa. Si el medio está en equilibrio, esta fuerza debe ser balanceada por la fuerza que el resto del fluido ejerce sobre esa masa dm,

$$d\vec{F}(\vec{r}) + d\vec{F}_{ext}(\vec{r}) = 0, \tag{21}$$

donde $d\vec{F}(\vec{r})$ es la fuerza ejercida por el fluido, dada por le ec.(18).

Calculemos la (diferencial de) fuerza total que el fluido ejerce sobre el elemento de volumen $dV = dxdydz$. De acuerdo a la Fig. 2 ese cubo tiene 6 caras o superficies con las siguientes normales y coordenadas:

1) $\hat{n} = -\hat{x}$ localizada en $\vec{r} = (x, y, z)$, $dS = dydz$

2) $\hat{n} = \hat{x}$ localizada en $\vec{r}_2 = (x + dx, y, z)$, $dS = dydz$

3) $\hat{n} = -\hat{y}$ localizada en $\vec{r} = (x, y, z)$, $dS = dxdz$

4) $\hat{n} = \hat{y}$ localizada en $\vec{r}_4 = (x, y + dy, z)$, $dS = dxdz$

5) $\hat{n} = -\hat{z}$ localizada en $\vec{r} = (x, y, z)$, $dS = dxdy$

6) $\hat{n} = \hat{z}$ localizada en $\vec{r}_6 = (x, y, z + dz)$, $dS = dxdy$

Con una notación obvia, usando la ec.(18), podemos escribir la fuerza total sobre el elemento de volumen en cuestión, como sigue:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & d\vec{F}_1(x, y, z) + d\vec{F}_2(x + dx, y, z) + \\ & d\vec{F}_3(x, y, z) + d\vec{F}_4(x, y + dy, z) + \\ & d\vec{F}_5(x, y, z) + d\vec{F}_6(x, y, z + dz) + \\ & d\vec{F}_{ext}(x, y, z) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -\tilde{P}(x,y,z)\cdot(-\hat{x})\, dydz - \tilde{P}(x+dx,y,z)\cdot(\hat{x})\, dydz \\
& -\tilde{P}(x,y,z)\cdot(-\hat{y})\, dxdz - \tilde{P}(x,y+dy,z)\cdot(\hat{y})\, dxdz \\
& -\tilde{P}(x,y,z)\cdot(-\hat{z})\, dxdy - \tilde{P}(x,y,z+dz)\cdot(\hat{z})\, dxdy \\
& +d\vec{F}_{ext}(x,y,z)
\end{aligned} \tag{22}
$$

Desarrollando en serie de Taylor los tensores que dependen de $x+dx$, $y+dy$ y $z+dz$, obtenemos a orden más bajo, (hágalo con detalle!)

$$
-\nabla\cdot\tilde{P}(\vec{r})\, dxdydz + d\vec{F}_{ext}(\vec{r}) = 0. \tag{23}
$$

En la expresión anterior,

$$
\nabla\cdot\tilde{P}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{xx}(\vec{r}) & P_{xy}(\vec{r}) & P_{xz}(\vec{r}) \\ P_{xy}(\vec{r}) & P_{yy}(\vec{r}) & P_{yz}(\vec{r}) \\ P_{xz}(\vec{r}) & P_{yz}(\vec{r}) & P_{zz}(\vec{r}) \end{pmatrix} \tag{24}
$$

es, evidentemente, un vector. El significado físico es que $-\nabla\cdot\tilde{P}(\vec{r})$ es la fuerza por unidad de volumen que el fluido ejerce sobre un elemento diferencial $dV = dxdydz$, del fluido mismo, localizado en el punto espacial $\vec{r}$.

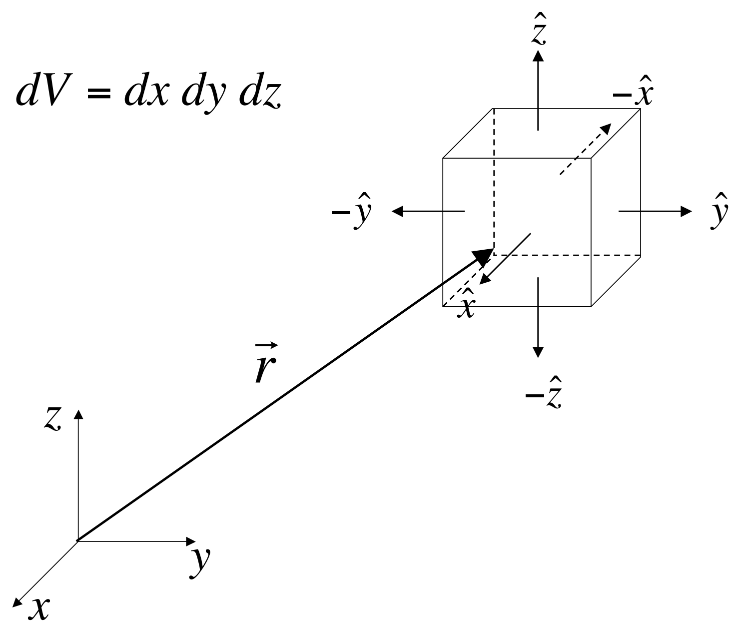

Figura 2: Elemento de volumen $dV = dxdydz$ localizado en el punto $\vec{r}$. Se muestran los vectores normales a cada una de las caras del elemento.

Del mismo modo podemos identificar

$$\vec{f}_{ext}(\vec{r}) = \frac{d\vec{F}_{ext}(\vec{r})}{dV} \tag{25}$$

como la fuerza *externa* por unidad de volumen. Con esto la ecuación (23) nos da la relación buscada que expresa el equilibrio mecánico en un medio continuo,

$$-\nabla \cdot \tilde{P}(\vec{r}) + \vec{f}_{ext}(\vec{r}) = 0 \quad . \tag{26}$$

Cabe resaltar que esta expresión es exacta, es decir, los términos superiores del desarrollo son infinitesimalmente pequeños (son proporcionales a dV, $(dV)^2$, etc.).

Fluidos.

Un fluido es un medio continuo que en equilibrio no soporta presiones de corte, es decir $P_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Si $P_{ij} \neq 0$, con $i \neq j$, el material fluiría y no estaría en equilibrio. En este caso el tensor toma la forma

$$\tilde{P}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} P_{xx}(\vec{r}) & 0 & 0 \\ 0 & P_{yy}(\vec{r}) & 0 \\ 0 & 0 & P_{zz}(\vec{r}) \end{pmatrix} . \tag{27}$$

Sin embargo, esto debe ser cierto para *cualquier* orientación de los ejes de coordenadas ... en su curso de mecánica análitica aprenderán a rotar ejes coordenados (y por ende tensores y matrices). La rotación más general se expresa en términos de la matriz simétrica ortogonal de los ángulos de Euler (vea, por ejemplo, los libros de Goldstein o Landau y Lifshitz de mecánica clásica). El punto es que al rotar los ejes, el tensor $\tilde{P}(\vec{r})$ dado por (27) es ahora $\tilde{P}'(\vec{r}')$,

$$\tilde{P}'(\vec{r}') = \begin{pmatrix} P'_{xx}(\vec{r}') & P'_{xy}(\vec{r}') & P'_{xz}(\vec{r}') \\ P'_{xy}(\vec{r}') & P'_{yy}(\vec{r}') & P'_{yz}(\vec{r}') \\ P'_{xz}(\vec{r}') & P'_{yz}(\vec{r}') & P'_{zz}(\vec{r}') \end{pmatrix} . \tag{28}$$

Pero por ser fluido, exigimos que sea de la forma

$$\tilde{P}'(\vec{r}') = \begin{pmatrix} P'_{xx}(\vec{r}') & 0 & 0 \\ 0 & P'_{yy}(\vec{r}') & 0 \\ 0 & 0 & P'_{zz}(\vec{r}') \end{pmatrix} . \tag{29}$$

Se puede mostrar (usando la rotación indicada arriba) que esto sólo puede ser cierto si

$$P_{xx}(\vec{r}) = P_{yy}(\vec{r}) = P_{zz}(\vec{r}) \equiv p(\vec{r}) \tag{30}$$

y el tensor toma la forma

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\vec{r}) &= p(\vec{r})\tilde{1} \\ &= p(\vec{r}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{31}$$

En otras palabras, es así porque el tensor unidad $\tilde{1}$ tiene la misma forma en cualquier sistema de coordenadas. Llamamos a $p(\vec{r})$ la presión hidrostática, o simplemente, la presión.

El siguiente resultado es muy importante: Suponga una diferencial de área arbitraria, $d\vec{S} = \hat{n}(\vec{r})\, dS$, sobre un cuerpo de geometría arbitraria inmerso en el fluido, como en la Fig. 1, o sobre una región del fluido mismo pero de geometría arbitraria. La fuerza sobre ese elemento de área es,

$$\begin{aligned} d\vec{F}(\vec{r}) &= -\tilde{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, dS \\ &= -p(\vec{r})\tilde{1} \cdot \hat{n}(\vec{r})\, dS \\ &= -p(\vec{r})\, \hat{n}(\vec{r})\, dS. \end{aligned} \tag{32}$$

Es decir, la fuerza sobre *cualquier* elemento de superficie tiene como magnitud $p(\vec{r})dS$ y apunta en la dirección contraria a la normal $\hat{n}(\vec{r})$ ... en palabras llanas y sencillas, la presión siempre se ejerce normalmente en cualquier punto de la superficie.

El resultado inmediato más importante para la termodinámica es la ecuación de equilibrio mecánico para un fluido. Usando las ecs.(24) y (26), es simplemente

$$-\nabla p(\vec{r}) + \vec{f}_{ext}(\vec{r}) = 0, \tag{33}$$

que es la llamada Ley de Pascal. Si la fuerza externa es cero, entonces $\nabla p(\vec{r}) = 0$ y obtenemos el resultado conocido que la presión es constante en todo el seno del fluido y sobre las paredes que lo contiene, $p =$ constante. Si la fuerza externa es la gravedad $\vec{f}_{ext}(\vec{r}) = -\rho(z)g\hat{z}$, la ecuación de Pascal es

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho(z)g. \tag{34}$$