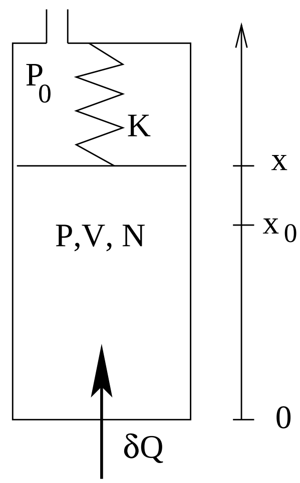
Un gas ideal de N partículas se encuentra en un cilindro impermeable, a lo largo del cual se puede mover sin fricción un pistón de masa nula y área A. La posición del pistón se nota x (ver Figura). Un resorte sin masa con constante K ejerce una fuerza sobre el pistón y para cierto valor x_0 de x, esa fuerza es nula (resorte no extendido ni comprimido). P_0 representa la presión externa (constante) y P la presión del gas. V y T son el volumen y la temperatura del gas, respectivamente.



a) En la aproximación de procesos cuasi-estáticos, deducir de la condición de equilibrio del pistón una relación entre las variables P y V. Podemos notar V_0 el volumen del gas cuando $x = x_0$.

b) Deducir que T es una función de V y de diferentes constantes del problema, es decir $T = T(V)$.

c) El gas recibe una pequeña cantidad de calor δQ de una fuente de calor externa (Figura). Explicar cualitativamente, *sin calculos*, por qué el calor específico del gas, definido como $C \equiv \delta Q/dT$, debe ser tal que $C_v \leq C \leq C_p$. Se podrá discutir en qué límites $C \to C_v$ y $C \to C_p$.

d) Calcular C como función de C_v, V y de las diferentes constantes. Comprobar las predicciones de c). Recordamos que $U = C_vT + cst$ con C_v constante para un gas ideal.

* * * * * * * * * * * * * *

SOLUCIÓN:

a)(2.5 PTS.) De la ecuación de conservación del momento aplicada al pistón:

$$m_{pist}\ddot{x} = 0 = PA - P_0A - K(x - x_0). \tag{1}$$

Dado que $V = Ax$ y $V_0 = Ax_0$, deducimos:

$$P = P_0 + \frac{K}{A^2}(V - V_0). \tag{2}$$

b) (2 PTS) Multiplicando Ec. (2) por V y utilizando la ecuación de estado del gas ideal $PV = Nk_BT$, encontramos:

$$T = \frac{1}{Nk_B}\left[\left(P_0 - \frac{KV_0}{A^2}\right)V + \frac{K}{A^2}V^2\right]. \tag{3}$$

c) (2.5 PTS) Cualquier cambio de temperatura del gas implica un cambio simultáneo de volumen (Ec. (3)) y de presión (Ec. (2)). Entonces, durante una transferencia de calor es impossible mantener V o P constante en este sistema. Por lo tanto $C \neq C_v$ y $C \neq C_p$. El sistema es más deformable que un sistema de paredes rígidas (volumen constante), pero no tanto como un sistema de presión constante P_0 (donde el pistón se mueve libremente *a priori*). Debemos recuperar $C \to C_v$ para $K \to \infty$ (resorte muy rígido) y $C \to C_p$ para $K \to 0$ (resorte inexistente). Sabemos que $C_v < C_p$, entonces un principio de continuidad nos indica que $C_v \leq C \leq C_p$ para K finito.

d) (3 PTS) La primera ley $dU = \delta Q + \delta W$ se escribe

$$dU = \delta Q - PdV \tag{4}$$

en la aproximación cuasi-estática. Usando U para un gas ideal:

$$C_v dT = \delta Q - PdV \tag{5}$$

o:

$$C \equiv \frac{\delta Q}{dT} = C_v + P\frac{dV}{dT} = C_v + \frac{P}{\frac{dT}{dV}}. \tag{6}$$

Derivando Ec. (3) con respeto a V y sustituyendo en (6) obtenemos la respuesta:

$$C = C_v + Nk_B\frac{P_0 + \frac{K}{A^2}(V - V_0)}{P_0 - \frac{K}{A^2}V_0 + \frac{2K}{A^2}V}, \tag{7}$$

donde se ha sustituido también P por su expresión Ec. (2). La expresión (7) se puede escribir de manera más compacta como:

$$C = C_v + Nk_B \frac{1}{1 + \frac{KV/A^2}{P}}, \tag{8}$$

donde queda claro que

$$C_v \leq C \leq C_v + Nk_B = C_p.$$

Cuando $K = 0$, comprobamos que $C = C_p$ (y $P = P_0$, de Ec. (2)). Cuando $K \to \infty$, obtenemos $C = C_v$ (y P toma algún valor finito que puede ser distinto a P_0, mientras $V \simeq V_0$).