Ejercicio 1: Las partículas colisionan con el pistón continuamente. Durante una compresión, el pistón avanza en el sentido opuesto del vector de velocidad promedio de las partículas que lo van a chocar. Entonces el pistón incrementa la energía cinética de esas partículas (como un jugador de tenis que le pegua a una pelota) y la temperatura sube dado que $U \propto T$. En la expanción, el pistón se mueve en el mismo sentido que las particulas que lo van a colisionar y estas se deceleran por la colision. T baja.

Ejercicio 2: Tenemos $\delta Q = 0$, entonces $dU = \delta W$. El trabajo recibido por el gas durante la expanción es 0 dado que V_2 está vacío. Entonces $U_{final} = U_{inicial}$. Dado que U depende solo de T (y N) para un gas ideal, $T_{final} = T_1$. Para un gas de Van der Waals, $T_{final} \neq T_1$, se deja en ejercicio (ver tarea 2 para U en este caso).

Ejercicio 3: El sistema es el gas adentro del globo. Para que incremente de $\sigma dA > 0$ la energía de la membrana (que forma parte del entorno), el sistema se la tiene que dar en forma de trabajo. Por conservación de la energía, ese trabajo σdA es el opuesto del trabajo δW realizado sobre el sistema por la membrana: $\delta W = -\sigma dA$. También se ejercen sobre el sistema fuerzas externas de presión, de trabajo $-P_0 AdR = -P_0 dV$. Entonces el trabajo total recibido por el gas es $\delta W = -P_0 dV - \sigma dA$, donde $dV = AdR$. Dado que $A = 4\pi R^2$, $dA = 8\pi RdR$ y:

$$\delta W = -P_0 4\pi R^2 dR - \sigma 8\pi RdR.$$

De $4\pi R^2 dR = dV$, obtenemos

$$\delta W = -\left(P_0 + \frac{2\sigma}{R}\right) dV.$$

En equilibrio, o durante un proceso cuasi-estático, recordamos que se puede definir una presión uniforme en el gas, P, y que esta presión compensa las fuerzas exteriores. El trabajo δW es también $-PdV$. Igualando se obtiene $P - P_0 = 2\sigma/R$.

Ejercicio 4: Aqui hay que notar que el proceso de inflar el globo no es lento ni cuasi-estático a priori, asi que no hacemos tal suposición y no aplicamos la formula anterior durante el transcurso del gas en el globo. Pero si podemos aplicarla al estado de equilibrio final:

$$P_f = P_0 + \frac{2\sigma}{R_f}.$$

El volumen total final es $V_f + V_b$ con $V_f = 4\pi R_f^3/3$. De la ecuación de estado $P_f(V_f + V_b) = Nk_BT_f$ obtenemos:

$$\left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_f}\right)\left(\frac{4\pi}{3}R_f^3 + V_b\right) = Nk_BT_f. \qquad (1)$$

Necesitamos otra relación entre R_f y T_f. La podemos obtener de la primera ley $dU = \delta W + \delta Q = \delta W$ (no hay intercambios de calor), es decir:

$$U_f - U_{inicial} = \Delta W,$$

donde ΔW es el trabajo total recibido por el gas. Del ejercicio anterior:

$$\Delta W = -\int_0^{R_f}(P_0 4\pi R^2 + \sigma 8\pi R)dR,$$

donde se supone que el radio inicial del globo es ~ 0. Obtenemos

$$\Delta W = -P_0\frac{4\pi}{3}R_f^3 - \sigma 4\pi R_f^2.$$

(Se puede lleguar más rapidamente a esa relación notando que $\Delta W = -P_0\Delta V_{globo} - \sigma\Delta A_{globo}$.) Por otra parte, para un gas ideal diatómico, la cantidad de estado U depende solamente de T y N:

$$U_f - U_{inicial} = \frac{5}{2}Nk_B(T_f - T_0).$$

Igualando las dos expresiones, obtenemos:

$$\frac{5}{2}Nk_B(T_f - T_0) = -P_0\frac{4\pi}{3}R_f^3 - \sigma 4\pi R_f^2. \qquad (2)$$

Eliminando T_f de las equaciones (1) y (2), obtenemos una ecuación de grado 4 para R_f. Un caso simple es $P_0 \sim 0$ (inflación en el vacío) y $V_b \sim 0$. Entonces:

$$\frac{8}{3}\sigma\pi R_f^2 = Nk_BT_f \quad \text{y} \quad \frac{5}{2}(T_f - T_0) = -4\sigma\pi R_f^2,$$

de donde obtenemos

$$T_f = \frac{5}{8}T_0.$$

Contrariamente a la expansión libre en el vacío, la temperatura disminuyó porque el gas cedió parte de su energía interna inicial a la membrana.

Ejercicio 5: Supongamos que el orificio es de area A. Antes de abrir, consideremos como sistema un pequeño volumen v de gas, de area A y longitud L ($v = AL$), que toca el orificio y se extiende en la dirección perpandicular. Cuando se abre la llave, suponemos que el sistema se mueve hacia dentro sin cambiar de forma: la fuerza de presión $F = P_0 A$ que se aplica en la cara del sistema más alejada del orificio hace un trabajo positivo sobre el sistema, $FL = P_0 AL = P_0 v$, al empujarlo hacia dentro. Como el recipiente está vacío, no se ejercen fuerzas de presión sobre la otra cara de area A. La primera ley nos dice que el trabajo recibido incrementa la energía interna del sistema: $\Delta U = \Delta W = P_0 v$ (se desprecian los intercambios de calor), o:

$$C_v(T_f - T_0) = P_0 v. \tag{3}$$

Por otro lado, sabemos que $C_v = (5/2) n k_B$ para un gas ideal diatómico, donde n es el número de partículas del sistema, las partículas empujadas. De la ecuación del gas ideal para el estado inicial del sistema, $P_0 v = n k_B T_0$, deducimos que $C_v = (5/2) P_0 v / T_0$. Combinando con (3), se obtiene $(5/2)(T_f - T_0)/T_0 = 1$, o:

$$T_f = \frac{7}{5} T_0.$$

El gas se calentó porque recibió trabajo.

Ejercicio 6: En este ejercicio, el sistema está compuesto de dos partes, entonces: $dU = dU_1 + dU_2$ (como U es una cantidad extensiva, es additiva) y por lo tanto $\delta W = \delta W_1 + \delta W_2$ y $\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2$. Ninguna de las dos partes recibe trabajo: $\delta W_1 = \delta W_2 = 0$, lo cual implica en particular que que sus volumenes no varían. Además el sitema total está aislado termicamente, $\delta Q = 0$. Sin embargo, las sustancias pueden intercambiar calor, entonces δQ_1 y δQ_2 pueden variar siempre y cuando la suma quede nula. De la definición de la capacidad calorífica a volumen constante, tenemos:

$$\delta Q_1 = C_V^{(1)} dT_1 \quad \text{y} \quad \delta Q_2 = C_V^{(2)} dT_2.$$

Deducimos que $C_V^{(1)} dT_1 + C_V^{(2)} dT_2 = 0$, y como los C_V no dependen de T:

$$C_V^{(1)}(T_f - T_1) + C_V^{(2)}(T_f - T_2) = 0,$$

donde igualamos las temperaturas finales (ley cero). Obtenemos:

$$T_f = \frac{C_V^{(1)} T_1 + C_V^{(2)} T_2}{C_V^{(1)} + C_V^{(2)}}.$$

Ejercicio 7: Sea $\delta Q_1 (< 0)$ una pequeña cantidad de calor que sale de la sustancia (1) más caliente y $\delta Q_2 (> 0)$ una pequeña cantidad de calor que fluye a la sustancia (2) más fría. La eficiencia del motor que opera estas transferencias es

$$\eta = 1 + \frac{-\delta Q_2}{-\delta Q_1}.$$

Si el motor es reversible, $\eta = 1 - T_2/T_1$, por lo tanto

$$\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = 0.$$

A cada ciclo, las temperaturas de los sistemas (1) y (2) van a variar debido al sus perdidas/ganancias de calor: $\delta Q_1 = C_V^{(1)} dT_1$ y $\delta Q_2 = C_V^{(2)} dT_2$. Se supone que estas variaciones de temperaturas son pequeñas durante un ciclo, para que esas se puedan considerar constantes (durante un ciclo). Obtenemos:

$$C_V^{(1)} \frac{dT_1}{T_1} + C_V^{(2)} \frac{dT_2}{T_2} = 0.$$

Poco a poco las temperaturas se van a acercar y el motor dejará de funcionar cuando ambas valgan T_f, dado por

$$C_V^{(1)} \int_{T_1}^{T_f} \frac{du}{u} + C_V^{(2)} \int_{T_2}^{T_f} \frac{dv}{v} = 0,$$

o:

$$C_V^{(1)} \ln(T_f/T_1) + C_V^{(2)} \ln(T_f/T_2) = 0.$$

De esa expresión se obtiene:

$$T_f = T_1^{\frac{C_V^{(1)}}{C_V^{(1)}+C_V^{(2)}}} T_2^{\frac{C_V^{(2)}}{C_V^{(1)}+C_V^{(2)}}}.$$

Ejercicio 8: De la igualdad (para motores reversibles)

$$\frac{|\Delta Q_1|}{T_1} = \frac{|\Delta Q_2|}{T_2},$$

se obtiene

$$T_2 = T_1 \frac{|\Delta Q_2|}{|\Delta Q_1|} = 300 \times 29/56 = 155\ K.$$

Ejercicio 9: La eficiencia del mejor motor que opera entre 1500 K y 750 K es $\eta = 1 - 750/1500 = 1/2$. El calor total entregado al motor por los 5 mol de gasolina es $\Delta Q_1 = 47 \times 5 = 235$ kJ. El trabajo entregado es $\eta \Delta Q_1 = 235/2 = 117.5$ kJ. Si toda esta energía se transfiere a un objeto que se eleva de una altura h, se debe igualar a la energía potencial mgh del objeto (despreciando la energía cinética, entonces se debe elevar lentamente). Deducimos que

$$h = \frac{\eta \Delta Q_1}{mg} = \frac{117500}{400 \times 9.80} \approx 30\ m.$$