



Matemáticas de los cursos de electromagnetismo I y II en la Facultad de Ciencias, UNAM

E. Ley-Koo* y S. Palacios**

Instituto de Física, UNAM



Resumen

Esta contribución está enfocada en la identificación y análisis de las matemáticas necesarias para cubrir adecuadamente los cursos de electromagnetismo, tomando en cuenta la falta de coordinación en los tiempos en que los alumnos, concretamente de la facultad de ciencias, toman las asignaturas de matemáticas y física; esta problemática requiere que se tome en cuenta que las matemáticas mismas han tenido motivaciones físicas y una vez desarrolladas han retroalimentado el estudio de los fenómenos naturales. La propuesta específica es que en los cursos de física se incorporen ambos aspectos, tanto en la enseñanza como en el aprendizaje.

Física y Matemáticas

Mecánica

Galileo

- Newton, leyes de la dinámica (Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica)

Fenómenos colectivos

- Calor, ondas y fluidos

Bernoulli

- Leyes del electromagnetismo (A treatise on Electricity and Magnetism)

Óptica

- Huygens; propagación de la luz
- Fresnel; difracción

Relatividad

- especial
- general

Mecánica Cuántica

- Heisenberg, Born, Jordan
- Schrödinger
- Pauli; espín del electrón

Mecánica Cuántica Relativista, Dirac

El libro de la naturaleza está escrito en el lenguaje de las matemáticas

- Cálculo diferencial e Integral

Series de Fourier

- Teoría cinética de los gases
- Ecuaciones de Maxwell

Construcción de frentes de onda

- Integrales de Fresnel

Espacio tiempo plano 4-D

- Espacio tiempo curvo, geometría riemanniana

Formulación matricial

- Ecuación de Schrödinger

Matrices de Pauli

- Ecuación de Dirac, Álgebras de Clifford

...

Matemáticas de Electromagnetismo I

Física

Electrostática en el vacío

- Ley de Coulomb
- Principio de superposición
- Ley de Gauss (diferencial, integral y condiciones de frontera)
- Campo electrostático conservativo (diferencial, integral y condiciones de frontera)
- Potencial electrostático (energía)
- Equilibrio inestable de cargas eléctricas en campos eléctricos
- Desarrollo multipolar del potencial de Coulomb (por fuera y por dentro [4])

Magnetostática en el vacío

- Ley de Biot-Savart
- Ley de Ampère
- Ley de Gauss magnética (no existencia de monopolos magnéticos)
- Potencial vectorial (potencial de cantidad de movimiento)

Medios materiales

- Electrostática/magnetostática en dieléctricos/permeables
 - momentos dipolares permanentes e inducidos
 - polarización/magnetización permanente e inducida
 - densidades de carga de polarización/magnetización volumétrica y superficial

Electrodinámica

- Ley de Faraday-Lenz-Henry (inducción magnetoeléctrica)
- Ley de Ampère-Maxwell
- Conservación de carga eléctrica
- Fuerza de Lorentz
- Conservación de energía
 - densidad volumétrica
 - densidad de flujo de energía (vector de Poynting)
- Conservación de cantidad de movimiento
 - densidad volumétrica
 - flujo de cantidad de movimiento (tensor de esfuerzos de Maxwell)
- Potenciales electromagnéticos escalar y vectorial
- Ecuaciones de onda para potenciales y campos de fuerza con densidad de carga o corrientes como fuentes
- Ondas electromagnéticas con frecuencia definida; ondas planas (transversalidad y polarización)

Matemáticas

Integración sobre líneas, superficies y volúmenes

- Teorema de Gauss (flujo, divergencia y caja de piladoras)

Teorema de Stokes (circulación, rotacional y circuito de Stokes)

- Campo de gradiente (Ecuación de Poisson, Ecuación de Laplace y funciones armónicas)

Teorema de Earnshaw

- Función generadora de armónicos esféricos puros y completos

Campo rotacional

Campo solenoidal

- Transformaciones de norma; norma transversal \rightarrow ecuación de Poisson

Corriente de desplazamiento

- Ecuación de continuidad

Teorema de Poynting

Extensión del teorema de Poynting

Norma de Lorentz

- Ecuación de Helmholtz

Matemáticas motivadas por electromagnetismo

Soluciones a la ecuación de Laplace

- separabilidad en una, dos y tres dimensiones y en cartesianas, cilíndricas y esféricas
- problemas: electrodos planos, paralelos e infinitos, cilíndricos coaxiales infinitos y esféricos concéntricos
- Problemas de electrostática y magnetostática en dos dimensiones
- Ecuación de Poisson y condiciones de frontera
- Ley de Gauss y Ampère para fuentes rectas infinitas y uniformes
- Soluciones a la ecuación de Helmholtz homogénea (separabilidad en una, dos y tres dimensiones y en cartesianas, cilíndricas y esféricas)

Funciones de Green (solución a la ecuación de onda con fuente puntual e instantánea)

- propagador retardado
- problemas de electrostática con condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann

Continuación analítica (Euler)

- Bases de funciones armónicas y sus superposiciones lineales [6]
 - dos dimensiones: series de Fourier, transformadas integrales de Laplace
 - tres dimensiones: series Fourier-Bessel, armónicos esféricos
- Teoremas de unicidad
- Funciones analíticas de variable compleja: condiciones de Cauchy Riemann, teorema de los residuos [5]
- Teorema de Helmholtz
- Bases de funciones de Bessel esféricas en todas sus variantes
 - estacionarias
 - viajantes (entrantes o salientes)
 - modificadas con número de onda imaginario (ondas evanescentes)
- Desarrollo de Rayleigh de onda plana

Matemáticas de electromagnetismo intermedio

Problemas de distribuciones de carga en presencia de conductores (planos, cilíndricos y esféricos, superficies equipotenciales y líneas de campo)

- Problemas de condiciones de frontera en presencia de dieléctricos/permeables

Fuentes de radiación de ondas planas, cilíndricas y esféricas

- Ecuaciones de Jefimenko

Campos de fuerza y de potencial de Liénard-Wiechert

- Función de Green de onda esférica saliente para fuente puntual

Fenómenos electromagnéticos descritos en sistemas inerciales

- Principio de relatividad especial
- Principio de la constancia de la velocidad de la luz

Consecuencias cinemáticas:

- transformaciones de Lorentz entre sistemas inerciales en el espacio-tiempo
 - relatividad de la simultaneidad
 - contracción longitudinal en la dirección del movimiento
 - dilatación del tiempo
 - ley de adición de velocidades
 - intervalos (espaciotiempo, temporaloido y luminoide, cuadrado del intervalo espacio-temporal y de tiempo propio)

cuadrivector de velocidad

- Dinámica relativista
 - cuadrivector de cantidad de movimiento-energía
 - cuadrivector de fuerza-potencial (ecuaciones de movimiento)
 - conservación de cantidad de movimiento y energía para un sistema aislado

Electrodinámica

- cuadrivector de gradiente
 - cuadrivergencia
 - d'Alembertiano
 - conservación de carga eléctrica, ecuación de continuidad
 - norma de Lorentz
 - ecuación de onda para potenciales con sus fuentes
 - conexiones entre potenciales y campos de fuerza como su derivada
 - transformaciones de Lorentz (densidad de corriente y carga, potenciales electromagnéticos, de campos de fuerza y sus interpretaciones)
 - cuadrivector de campo electromagnético
 - ecuaciones de Maxwell (dependientes de las fuentes: Ampère-Maxwell y Gauss eléctrica, independientes de las fuentes: Gauss magnética y Faraday)[7]
 - leyes de balance de cantidad de movimiento-energía

Condiciones de frontera

- Funciones de Green
- Método de imágenes
- Desarrollo en términos de funciones armónicas

Ecuaciones de Maxwell (condiciones de frontera)

- Generalización del teorema de Helmholtz para campos vectoriales dependientes de la posición y el tiempo

Ecuación de Helmholtz

Cuadrivectores

- Diagramas de espacios-tiempo
- Cuadrivector de intervalo
- Invariante de Lorentz (masa en reposo)
- Espacios-tiempo de Minkowski

Invariante cuadrivector de velocidad

- Energía en reposo como invariante de Lorentz
- Ortogonalidad entre 4-vectores de fuerza y de cantidad de movimiento
- Escalar y covariante

cuadrivector de corriente y carga

- cuadrivector de potencial electromagnético
- cuadrivector de campo electromagnético antisimétrico (seis componentes independientes)
- carga eléctrica invariante
- contracción de 4-vectores de fuentes y potenciales (escalar invariante, densidad volumétrica de energía)
- traza nula
- determinante
- cuadrivergencia del tensor de campo
- identidad de Bianchi (4-gradiente de tensor antisimétrico simetrizado)
- cuadrivector simétrico cuadrático en el campo electromagnético
- traza del tensor simétrico (obtenido por la contracción del 4-tensor de campo consigo mismo)

Recomendaciones

El reconocimiento de la retroalimentación histórica entre física y matemáticas proporciona de manera natural un método integral de la enseñanza, en el que se debe plantear la herramienta matemática en conjunto con la interpretación física en beneficio del aprendizaje de los alumnos.

PREGUNTAS?

Referencias

- Emilio Segrè. *From falling bodies to radio waves*. Freeman
- Emilio Segrè. *From x-rays to quarks*. Freeman
- E. Medina, E. Ley-Koo. *Mathematics motivated by physics: the electrostatic potential is the Coulomb integral transform of the electric charge density*. Rev.Mex. Fis. 54, (2008) 153.
- E. Ley-Koo, Araceli Góngora-T. *El desarrollo multipolar por fuera y por dentro* Rev.Mex. Fis. 34 (1988) 645
- E. Ley-Koo. *De las leyes de Gauss y Ampère al teorema de los residuos de Cauchy*. Rev.Mex. Fis. 39 (1993) 617
- E. Ley-Koo. Rev.Mex. Fis. *Desarrollos armónicos del potencial de Coulomb en coordenadas cilíndricas, parabólicas y esferoidales* 39 (1993) 785
- E. Ley-Koo. Rev.Mex. Fis. *Maxwell equations in Lorentz covariant integral form*. 52 (2006) 84