

# **Difusión en redes multicapa**

Documento generado en el Servicio Social de  
Matemáticas

Alumno: José Carlos Hernández Herrerías

Responsable académico: Dr. Francisco Javier Sevilla Pérez

2024



Con el objetivo de elaborar un documento breve (entre 25 y 40 hojas) que se usaría como notas introductorias al tema en la impartición de un curso optativo de la licenciatura de física, en el periodo de actividades de servicio social que inició el 13 de octubre del 2023 y concluyó el 20 de mayo del 2024, el estudiante realizó las siguientes actividades:

- Revisión de la literatura relacionada con procesos estocásticos en el contexto de caminatas aleatorias en redes multicapa particularmente el capítulo 14 y los apéndices B, C y G del libro *Multilayers Networks Structure and Function* de Ginestra Bianconi, editado por Oxford University Press, 2018.[1]
- Búsqueda bibliográfica complementaria alrededor de los procesos estocásticos en redes multicapa.
- Elaboración del documento.

Investigación Instituto de Física 2023-12/82-2509



# Índice general

<b>1. Difusión</b>	<b>1</b>
1.1. La relevancia de la difusión en las redes multicapa . . . . .	1
1.2. Difusión en redes multiplex . . . . .	3
1.2.1. El formalismo general . . . . .	3
1.2.2. Los regímenes de difusión . . . . .	4
1.3. Caminatas aleatorias en redes multiplex . . . . .	8
1.3.1. Caminando entre las capas . . . . .	8
1.3.2. Vuelos de Lévy y otras estrategias de búsqueda . . . . .	12
1.3.3. Caminatas aleatorias sesgadas . . . . .	14
1.4. Caminatas aleatorias en redes temporales multicorte . . . . .	15
1.5. Tráfico y congestión . . . . .	17
<b>2. Entropía y modelos nulos de redes simples</b>	<b>21</b>
2.1. Ensamblajes de redes de máxima entropía . . . . .	21
2.1.1. Observaciones generales . . . . .	21
2.1.2. Definiciones . . . . .	21
2.1.3. Restricciones . . . . .	22

2.2. Ensamblés canónico y microcanónico de redes . . . . .	23
2.2.1. Ensamble canónico de redes . . . . .	23
2.2.2. Ejemplos de ensamblés canónicos de redes . . . . .	24
2.2.3. Ensamble de redes Micro-canónico . . . . .	26
<b>3. Creciendo redes multiplex: La ecuación maestra</b>	<b>29</b>
3.1. La ecuación maestra . . . . .	29
3.2. Derivación de la distribución de grado exacta . . . . .	30
3.2.1. Caso general . . . . .	30
3.2.2. Caso $c_{1,1} = c_{2,2} = 1$ . . . . .	31
<b>4. Espectro del Supra-Laplaciano</b>	<b>33</b>
4.1. Ecuaciones de difusión . . . . .	33
4.2. Constante de difusión intercapa pequeña $D_\chi$ . . . . .	34
4.3. Constante de difusión intercapa grande $D_\chi$ . . . . .	35
<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>

# Capítulo 1

## Difusión

Una de las acepciones del fenómeno de difusión se refiere a las propiedades de transporte de una partícula trazadora que se mueve en algún medio. Este concepto se ha generalizado al transporte de algún elemento de interés en algún estructura subyacente. Así pues, se han estudiado las caminatas aleatorias en redes complejas como modelo del transporte de un elemento (el caminante) sobre un red compleja (conjunto de nodos y enlaces que tiene propiedades de conexión que nos son completamente regulares ni tampoco completamente aleatorias)

### 1.1. La relevancia de la difusión en las redes multicapa

Los procesos de difusión son centrales en la teoría de redes ya que intervienen en la comunicación entre los nodos que conforman las redes. En el contexto de las redes multicapa<sup>1</sup> una pregunta fundamental es cómo la topología multicapa (es decir las propiedades de las nodos conectados en diversas capas) da lugar a estructuras más eficientes en el sentido que se promueva un difusión más rápida en ellas. Por ejemplo, en el contexto de las redes de transporte es importante establecer si al incrementar el número de capas el proceso de difusión es más rápido. En este contexto, se ha demostrado que no

---

<sup>1</sup>Una **red multicapa** está formada por varias redes. Una multicapa de  $M$  capas está conformada por  $M$  redes que describen las interacciones dentro de cada capa y  $M(M-1)/2$  redes que describen las interacciones entre nodos en cada par de capas diferentes.

solo incrementar el número de capas puede beneficiar la difusión, sino que bajo ciertas condiciones la difusión en una red multicapa puede ser más rápida que en cada una de las capas individuales, un fenómeno llamado *superdifusión* [2]. Aunque esto es claramente una buena noticia para los ingenieros que planean diseñar infraestructuras nuevas de transporte para reducir el tiempo de traslado de los habitantes de una ciudad, este resultado tiene que ser comparado con estudios sobre el origen de estados de congestión en redes multicapa. Contrariamente, de forma menos intuitiva, se encuentra que agregar nuevas capas a una red multicapa puede favorecer eventos de congestión. Por lo que estos dos resultados tienen que analizarse en conjunto cuando, por ejemplo, se diseñan nuevas infraestructuras de transporte.

Más en general la difusión en redes multicapa puede caracterizarse estudiando caminatas aleatorias en estas estructuras, las que pueden diseñarse para optimizar la navegación en redes multicapa. Esto se puede lograr modulando la probabilidad de transitar entre los nodos usando enlaces de diferentes capas (con caminatas aleatorias sesgadas<sup>2</sup>) o permitiendo saltos largos en el marco de la caminata aleatoria de vuelo de Lévy.

Mientras que usualmente se encuentra que en redes multicapa estáticas la adición de nuevas capas favorece la difusión, en el contexto de redes temporales multi-rebanada se encuentra que el proceso de difusión es más lento que en la red agrupada donde la dimensión temporal de la red es ignorada. Este fenómeno se debe al hecho de que el número de caminos que respetan el orden temporal es típicamente menor que el número de caminos en las redes agrupadas, y que en las redes temporales el caminante aleatorio puede quedarse atrapado en nodos que están solo ocasionalmente conectados con otros nodos de la red.

---

<sup>2</sup>Una caminata aleatoria sesgada se refiere a que la probabilidad de transitar de un nodo a cualquiera de los nodos conectados no es uniforme.

## 1.2. Difusión en redes multiplex

### 1.2.1. El formalismo general

Para poder describir la difusión dentro de cada capa y entre distintas capas de una red multiplex<sup>3</sup>, es oportuno, como se propone en la referencia [2], asociar el estado dinámico de difusión  $x_i^{[\alpha]}(t)$  a cada nodo réplica  $(i, \alpha)$  (nodo  $i$  de la capa  $\alpha$ ) de la red multiplex, donde  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $\alpha = 1, 2, \dots, M$  y asumimos como en la referencia [2], que tanto los enlaces intracapa como los intercapa pueden participar en la dinámica de difusión.

La escala temporal global de la difusión dentro de cada capa  $\alpha$  (difusión intracapa) es determinada por la constante de difusión  $D^{[\alpha]}$ . De forma similar, la difusión entre distintas capas (difusión intercapa) es dictada por las constantes de difusión  $D^{[\alpha, \beta]} = D^{[\beta, \alpha]}$ . Para modular la difusión a través de diferentes enlaces en una misma capa, un peso  $w_{ij}^{[\alpha]}$  se asocia a cada enlace no dirigido del nodo replica  $(i, \alpha)$  al nodo replica  $(j, \alpha)$ . Con esta notación, la ecuación general de difusión en una red multiplex está dada por [2]

$$\frac{d}{dt}x_i^{[\alpha]}(t) = D^{[\alpha]} \sum_{j=1}^N w_{ij}^{[\alpha]} (x_j^{[\alpha]} - x_i^{[\alpha]}) + \sum_{\beta=1}^M D^{[\alpha, \beta]} (x_i^{[\beta]} - x_i^{[\alpha]}), \quad (1.1)$$

donde el primer término y el segundo término del lado derecho corresponden respectivamente a la difusión intracapa e intercapa.

La ecuación (1.1) se puede escribir como una ecuación general de difusión en un espacio  $(N \cdot M)$  dimensional, i.e.

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\mathcal{L}\mathbf{X}, \quad (1.2)$$

donde  $\mathcal{L}$  es una matriz de  $(N \cdot M) \times (N \cdot M)$  llamada *matriz supra-Laplaciana* y  $\mathbf{X}$  es un vector columna de  $N \cdot M$  que codifica el estado dinámico de cada nodo replica de la red multiplex. En una red multiplex de  $M$  capas la matriz supra-Laplaciana  $\mathcal{L}$  está dada por

$$\mathcal{L} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} D^{[1]}\mathbf{L}^{[1]} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & D^{[2]}\mathbf{L}^{[2]} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & D^{[M]}\mathbf{L}^{[M]} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c|c|c|c} \sum_{\beta \neq 1} D^{[1, \beta]}\mathbf{I} & -D^{[1, 2]}\mathbf{I} & \dots & -D^{[1, M]}\mathbf{I} \\ \hline -D^{[2, 1]}\mathbf{I} & \sum_{\beta \neq 2} D^{[2, \beta]}\mathbf{I} & \dots & -D^{[2, M]}\mathbf{I} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline -D^{[M, 1]}\mathbf{I} & -D^{[M, 2]}\mathbf{I} & \dots & \sum_{\beta \neq M} D^{[M, \beta]}\mathbf{I} \end{array} \right), \quad (1.3)$$

<sup>3</sup>Una **red multiplex** es una red multicapa simplificada que cumple las siguientes propiedades: (a) Hay un mapeo *uno-a-uno* de los nodos en las diferentes capas, también llamados nodos réplica; y (b) los enlaces intercapa exclusivamente conectan a los nodos réplica correspondientes.

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de  $N \times N$  y  $\mathbf{L}^{[\alpha]}$  es la matriz Laplaciana de la capa  $\alpha$  (cuyos elementos son  $L_{ij}^{[\alpha]} = s_i^{[\alpha]} \delta_{ij} - w_{ij}^{[\alpha]}$ ), donde  $s_i^{[\alpha]}$  es la fuerza del nodo replica  $(i, \alpha)$ ,  $s_i^{[\alpha]} = \sum_j w_{ij}^{[\alpha]}$ . De forma similar, el vector dinámico  $\mathbf{X}$  que aparece en la ecuación 1.3 puede escribirse como

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{x}^{[1]}}{\mathbf{x}^{[2]}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{x}^{[M]}}{\mathbf{x}^{[M]}} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

donde  $\mathbf{x}^{[\alpha]}$  indica al vector columna de  $N$  elementos  $x_i^{[\alpha]}$  con  $i = 1, 2, \dots, N$ .

En una red multiplex no dirigida, donde la constante de difusión  $D^{[\alpha, \beta]} = D^{[\beta, \alpha]}$ , la matriz supra-Laplaciana  $\mathcal{L}$  es simétrica y *semidefinida positiva*, es decir, sus eigenvalores  $\lambda_n$  son reales y no negativos,  $\lambda_n \geq 0$  para  $n = 1, 2, \dots, N \cdot M$ . Aquí asumimos que la red multiplex es conexas, i.e. asumimos que de es posible alcanzar un nodo cualquiera a partir de otro nodo elegido arbitrariamente siguiendo una combinación de enlaces intracapa e intercapa.

Considerando la ecuación de difusión 1.2, es inmediato que, como sucede en las redes simples, la escala temporal típica  $\tau$  de la difusión en una red multiplex está determinada por el eigenvalor de menor valor distinto de cero  $\lambda_2$ , también llamado la *conectividad algebraica* del supra-Laplaciano  $\mathcal{L}$ , siempre que haya una brecha espectral significativa en el espectro del supra-Laplaciano. En ese caso tenemos que

$$\tau = \frac{1}{\lambda_2}. \quad (1.5)$$

De esta cantidad podemos obtener una comprensión física cualitativa de las propiedades de difusión de las redes multicapa al estudiar la dependencia del eigenvalor  $\lambda_2$  como una función de las constantes de difusión intracapa e intercapa.

### 1.2.2. Los regímenes de difusión

Para caracterizar los diferentes regímenes de difusión que podemos esperar en una red multiplex, podemos seguir a las referencias [2, 3] y considerar el caso simple de una red dúplex (red multiplex con dos capas). Adicionalmente, podemos asumir que las constantes de difusión intercapa son todas

iguales, i.e.  $D^{[1,2]} = D^{[2,1]} = D_\chi$  y que las constantes de difusión intercapa son absorbidas por los pesos de las capas individuales. Como una consecuencia de esta última suposición, sin pérdida de generalidad podemos tomar la constante de difusión intercapa como uno, i.e.  $D^{[1]} = D^{[2]} = 1$ .

Bajo estas suposiciones, podemos caracterizar la difusión en un red duplex usando la ecuación (1.2) con la matriz supra-Laplaciana  $\mathcal{L}$  y el vector de estado dinámico  $\mathbf{X}$  dados respectivamente por

$$\mathcal{L} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{L}^{[1]} + D_\chi \mathbf{I} & -D_\chi \mathbf{I} \\ \hline -D_\chi \mathbf{I} & \mathbf{L}^{[2]} + D_\chi \mathbf{I} \end{array} \right), \quad (1.6)$$

$$\mathbf{X} = \left( \begin{array}{c} \mathbf{x}^{[1]} \\ \mathbf{x}^{[2]} \end{array} \right). \quad (1.7)$$

Supongamos adicionalmente, que las dos capas de dicha red duplex son conexas. En esta configuración, la difusión presenta dos regímenes dependiendo del valor de la constante de difusión  $D_\chi$  [2] (ver el capítulo 4 para una derivación de estos resultados).

Para valores de la constante de difusión intercapa pequeños ( $D_\chi \ll D_\chi^*$ ),  $\lambda_2$  crece linealmente con el acoplamiento intercapa  $D_\chi$  y por lo que la escala temporal típica  $\tau$  crece como

$$\tau = \frac{1}{2D_\chi}. \quad (1.8)$$

Este resultado implica que en este régimen, la difusión intercapa es el valor que limita la propagación en la red. En contraste, Para la constante de difusión intercapa fuerte ( $D_\chi \gg D_\chi^*$ ),  $\lambda_2$  tiende a un valor finito  $\lambda_2 = \frac{\lambda_s}{2}$  donde  $\lambda_s$  es el eigenvalor más pequeño distinto de cero del Laplaciano de la red agrupada dada por  $\mathbf{L}^{[1]} + \mathbf{L}^{[2]}$ . El eigenvalor  $\lambda_s$  del Laplaciano agrupado satisface

$$\frac{\lambda_s}{2} \geq \frac{\lambda_2^{[1]} + \lambda_2^{[2]}}{2} \geq \min(\lambda_2^{[1]}, \lambda_2^{[2]}), \quad (1.9)$$

donde  $\lambda_2^{[\alpha]}$  es el menor eigenvalor distinto de cero del Laplaciano  $\mathbf{L}^{[\alpha]}$ .

Por lo que, la difusión en una red multicapa siempre será más rápida que la difusión en la capa más lenta de la red multiplex. La super difusión, i.e. el hecho que la escala temporal de la red multiplex sea más rápida que la escala temporal de difusión en cada una de las capas de la red multiplex, es posible

pero no sucede en general. Un límite superior [4] para  $D_\chi^*$  se puede expresar como

$$D_\chi^* \leq \frac{1}{4} \lambda_s, \quad (1.10)$$

donde  $\lambda_s$  es la conectividad algebraica  $\lambda_2$  del Laplaciano  $\mathbf{L}^{[1]} + \mathbf{L}^{[2]}$  de la red agrupada. En la figura 1.1 se muestra la dependencia del eigenvalor  $\lambda_2$  como una función de  $D_\chi$  y los dos regímenes de difusión son claramente visibles.

Estos resultados se pueden obtener realizando expansiones perturbativas en los dos límites  $D_\chi \ll 1$  y  $D_\chi \gg 1$  (Ver apéndice 4) o encontrando la conectividad algebraica  $\lambda_2$  usando el teorema de Courant y Fisher resolviendo directamente el problema de minimización [4]

$$\lambda_2(\mathcal{L}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \mathbf{v}^T \mathcal{L} \mathbf{v}. \quad (1.11)$$

Aquí  $\mathbf{v}$  es un vector columna de  $2N$  entradas que se puede descomponer en dos bloques, i.e.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{[1]} \\ \mathbf{v}^{[2]} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

con  $\mathbf{v}^{[\alpha]}$  asociado a las nodos replica de la capa  $\alpha$ . Otros descubrimientos acerca del fenómeno físico que ocurre cuando el cambio de transición es observado han sido obtenidos en la referencia [4] al caracterizar la estructura del *eigenvector de Fiedler*  $\mathbf{v}_2$  de la matriz supra-Laplaciana, i.e. el eigenvector asociado con el eigenvalor  $\lambda_2$ .

Para acoplamiento débil  $D_\chi \leq D_\chi^*$  el eigenvector  $\mathbf{v}_2$  revela que la red duplex puede separarse en dos capas. De hecho, sus bloques componentes  $\mathbf{v}^{[1]}$  y  $\mathbf{v}^{[2]}$  difieren únicamente en un cambio de signo, i.e.

$$\mathbf{v}_2^{[1]} = -\mathbf{v}_2^{[2]} = -\frac{1}{\sqrt{2N}} \mathbf{1}, \quad (1.13)$$

donde  $\mathbf{1}$  es el vector columna  $N$ -dimensional con elementos  $\mathbf{1}_i = 1$  para cada nodo  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Por el contrario, para acoplamiento fuerte  $D_\chi \gg D_\chi^*$ , los bloques componentes  $\mathbf{v}_2^{[1]}$  y  $\mathbf{v}_2^{[2]}$  tiene el mismo signo. Por lo que, en este límite, el acoplamiento intercapa fuerte no permite la separación de la red multiplex en dos capas (ver fig. 1.1). La transición entre los dos regímenes en  $D_\chi = D_\chi^*$  es discontinua.

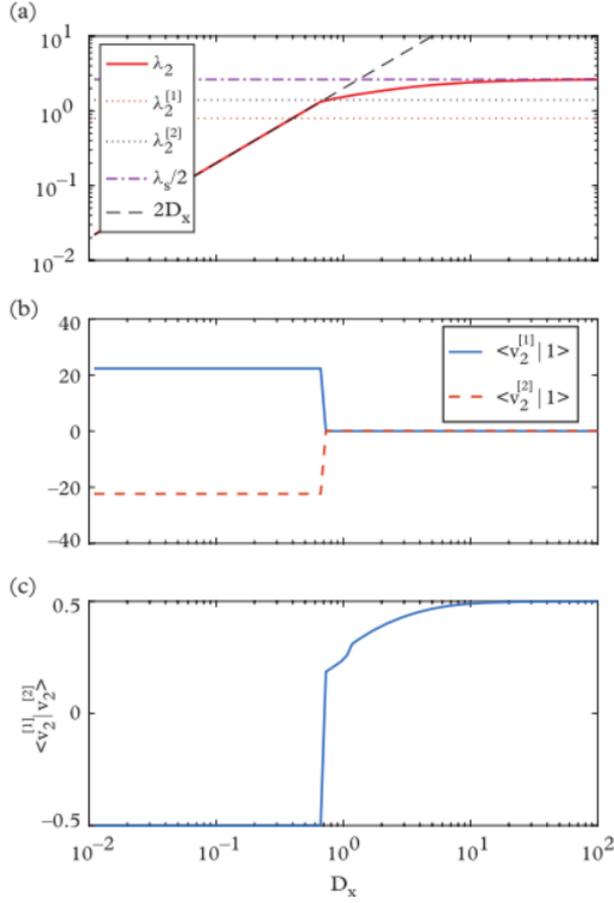


Figura 1.1: Evolución del eigenvalor de Fiedler  $\lambda_2$  del supra-Laplaciano y su correspondiente eigenvector  $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_2^{[1]} | \mathbf{v}_2^{[2]})$  como una función de la constante de difusión  $D_x$  para una red dúplex cuya primera capa es una red de Poisson con exponente  $\gamma = 3$  de la ley de potencias y cuya segunda capa es una red regular con grado  $c = 3$ . La imagen (a) muestra  $\lambda_2$  como una función de  $D_x$ . La discontinuidad de la primera derivada de  $\lambda_2$  claramente ocurre en la transición entre los dos regímenes  $\lambda_2 \simeq 2D_x$  y  $\lambda_2 \simeq \lambda_s/2$ , donde  $\lambda_s$  es el eigenvalor de Fiedler de la red agrupada. En este caso observamos superdifusión para valores grandes de  $D_x$ , i.e.  $\lambda_2 > \max(\lambda_2^{[1]}, \lambda_2^{[2]})$ , donde  $\lambda_2^{[1]}$  y  $\lambda_2^{[2]}$  indican respectivamente los eigenvalores de Fiedler del laplaciano de la primera y la segunda capa. La imagen (b) muestra la proyección del vector unitario sobre  $\mathbf{v}_2^{[1]}$  y  $\mathbf{v}_2^{[2]}$  como funciones de  $D_x$ . Estas dos proyecciones indican la suma de todas las componentes de  $\mathbf{v}_2^{[1]}$  y  $\mathbf{v}_1^{[2]}$  respectivamente. La imagen (c) muestra la proyección de  $\mathbf{v}_2^{[1]}$  en  $\mathbf{v}_2^{[2]}$  como una función de  $D_x$ . Imagen tomada de la referencia [1].

En la referencia [3], Solé-Ribalta et al. Extienden estos resultados a todo el espectro de la matriz supra-Laplaciana  $\mathcal{L}$ ,  $\{\lambda_1 = 0, \lambda_2, \dots, \lambda_{M \cdot N}\}$ , y para un número arbitrario  $M$  de capas.

## 1.3. Caminatas aleatorias en redes multiplex

### 1.3.1. Caminando entre las capas

Mientras navegamos en una red multiplex, es posible moverse en diferentes redes. Eso es, por ejemplo, la situación de las redes multiplex de transporte en las grandes ciudades que incluyen capas diferentes como es el metro, el autobús y redes de tren regionales. En este contexto, es importante caracterizar el comportamiento de caminantes aleatorios que pueden saltar de una capa a otra, donde los saltos del caminante aleatorio de un nodo a otro no de la misma capa (transiciones intracapa) pueden tener una probabilidad diferente a las transiciones entre nodos replica de diferentes capas (transiciones intercapa). La trayectoria de un caminante aleatorio explorando una red multiplex compuesta por  $N = 7$  nodos y  $M = 3$  capas se ilustra en la Fig. 1.2, en la que se muestran las transiciones intracapa y intercapa. Este tipo de caminata aleatoria se propuso originalmente en la referencia [5].

En este caso, la probabilidad  $p_{i\alpha}$  que el caminante aleatorio se encuentre en el nodo  $(i, \alpha)$  en el tiempo  $t$  está dado por

$$p_{i\alpha}(t+1) = \sum_{j,\beta} \mathcal{P}_{j\beta,i\alpha} p_{j\beta}(t) \quad (1.14)$$

donde  $p_{i\alpha}(t)$  es la probabilidad de encontrar al caminante al tiempo  $t$  en el nodo replica  $(i, \alpha)$  y donde  $\mathcal{P}_{j\beta,i\alpha}$  es la probabilidad de transición del nodo replica  $(j, \beta)$  al nodo replica  $(i, \alpha)$ . La matriz de transición  $\mathcal{P}$  es estocástica, i.e satisface

$$\sum_{i,\alpha} \mathcal{P}_{j\beta,i\alpha} = 1, \quad (1.15)$$

para cada nodo replica  $(j, \beta)$ . Notemos que la ecuación 1.14 también puede expresarse en forma matricial como

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t-1)\mathcal{P}, \quad (1.16)$$

donde  $\mathbf{p}(t)$  es el vector fila de  $N \cdot M$  entradas con elementos  $p_{i\alpha}(t)$ . Dada la condición inicial  $\mathbf{p}(0)$  que especifica la probabilidad  $p_{i\alpha}(0)$  de que el cami-

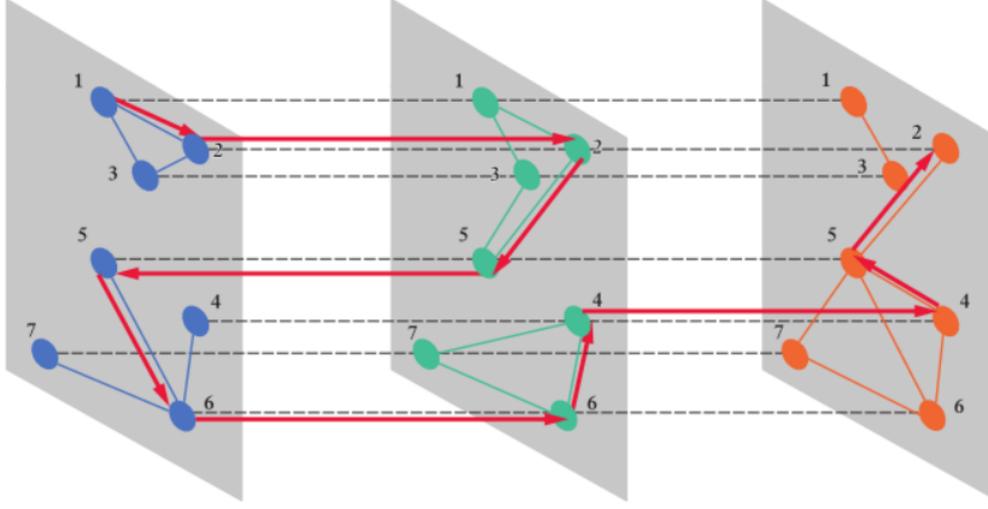


Figura 1.2: Camino (secuencia de flechas) de un caminante aleatorio navegando en una red multiplex compuesta por  $N = 7$  nodos y  $M = 3$  capas. En este ejemplo, el caminante no puede pasar de la capa 1 y a la capa 3 en un solo paso de tiempo y no puede cambiar simultáneamente de nodo y de capa. Imagen tomada de referencia [6].

nante aleatorio en el tiempo  $t = 0$  se encuentre en un nodo replica arbitrario  $(i, \alpha)$ , el estado de la caminata aleatoria al tiempo  $t$  sigue

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\mathcal{P}^t. \quad (1.17)$$

Hasta ahora, hemos descrito la difusión en un red multicapa general considerándola como una red más grande formada por  $N \cdot M$  nodos replica distintos. Sin embargo, el interés por caracterizar el comportamiento de esta caminata aleatoria descansa sobre la posibilidad de inferir el efecto que es inducido por el hecho que la red que estamos estudiando es en realidad una red multiplex. Por lo tanto, tenemos que tomar en cuenta dos consideraciones importantes:

- Primero, las probabilidades de transición  $\mathcal{P}_{j\beta, i\alpha}$  pueden y deben tomar en cuenta si la transición ocurre entre nodos replica de la misma capa o entre nodos replica de diferentes capas. Esto nos permitirá modular la probabilidad de transición intercapa con un parámetro de difusión apropiado. En las redes de transporte estos parámetros indican el costo de cambiar de una red de transporte a otra.

- Segundo, es importante evaluar la probabilidad  $\pi_i$  de que la caminata aleatoria al tiempo  $t$  esté en un nodo dado  $i$  de la red multiplex. Esto está dado por la probabilidad de que el caminante aleatorio se encuentre en cualquiera de los nodos replica  $(i, \alpha)$ , i.e.

$$\pi_i(t) = \sum_{\alpha=1}^M p_{i\alpha}(t). \quad (1.18)$$

Como una consecuencia de (i), debe ponerse atención al asignar los valores de la probabilidad de transición  $\mathcal{P}_{j\beta, i\alpha}$ , ya que las diferentes probabilidades de transición tienen diferentes significados para la red multiplex. En particular, para un caminante aleatorio en el nodo replica  $(i, \alpha)$

- $\Pi_{i\alpha, i\alpha}$  es la probabilidad de que el caminante aleatorio permanezca en el nodo replica  $(i, \alpha)$ ;
- $\Pi_{i\alpha, j\alpha}$  es la probabilidad de que el caminante salte a un nodo replica vecino en la capa  $\alpha$ , y específicamente al nodo  $(j, \alpha)$  (transición intracapa);
- $\Pi_{i\alpha, i\beta}$  es la probabilidad de que el caminante permanezca en el mismo nodo  $i$  pero salte de la capa  $\alpha$  a la capa  $\beta \neq \alpha$  (transición intercapa);
- $\Pi_{i\alpha, j\beta}$  es la probabilidad de que el caminante aleatorio salte a un nodo replica  $(j, \beta)$  con  $j \neq i$  y también  $\beta \neq \alpha$  (Este movimiento no está representado en la Fig. 1.2).

Para resumir, en el caso de una red multiplex, los elementos de la matriz de supra-transición se pueden modular con la fuerza del acoplamiento  $D^{[\alpha, \beta]}$  entre diferentes capas  $\alpha \neq \beta$ , y la probabilidad  $q$  de que el caminante aleatorio no permanezca en el mismo nodo replica. Adicionalmente, suponiendo que las probabilidades de transición intracapa dependen del peso  $\{w_{ij}^{[\alpha]}\}$  del enlace entre los nodos replica  $(i, \alpha)$  y  $(j, \alpha)$ , la generalización de una caminata aleatoria clásica a una multiplex se obtiene ajustando

$$\Pi_{i\alpha, j\beta} = \begin{cases} (1 - q) & \text{si } \alpha = \beta, i = j, \\ qw_{ij}^{[\alpha]} / \sigma_{i, \alpha} & \text{si } \alpha = \beta, i \neq j, \\ qD^{[\alpha, \beta]} / \sigma_{i, \alpha} & \text{si } \alpha \neq \beta, i = j, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1.19)$$

donde  $\sigma_{i,\alpha} = \sum_j w_{ij}^{[\alpha]} + \sum_{\beta \neq \alpha} D^{[\alpha,\beta]}$  asegura que  $\mathcal{P}$  es una matriz estocástica, i.e. Satisface la ecuación (1.15). Esta expresión se puede simplificar más haciendo la suposición típica  $q = 1$  para que el caminante aleatorio nunca permanezca en la misma posición. Adicionalmente, siguiendo la simplificación hecha para la difusión lineal, uno puede asumir que  $D^{[\alpha,\beta]} = D_x \forall \alpha, \beta$  con  $\alpha \neq \beta$ .

Un tema importante que es discutido en la referencia[6] es la cobertura de una red multiplex en el tiempo hasta un valor  $t$ . Para caracterizar esta cantidad es necesario evaluar la probabilidad  $\chi_{ij}(t)$  de que el caminante aleatorio que inicialmente estaba en el nodo  $j$  no se encuentre en el nodo  $i$  en el tiempo hasta un valor  $t$ . Esta probabilidad está dada por

$$\chi_{ij}(t) = \prod_{\tau=1}^t [1 - \pi_i(\tau)][1 - \pi_i(0)]. \quad (1.20)$$

Notemos aquí que  $\pi_i(t)$  definido en la ecuación (1.18) está dado por

$$\pi_i(t) = \mathbf{p}(t) \mathbf{E}_i^T, \quad (1.21)$$

donde  $\mathbf{E}_i^T$  indica la transpuesta del supra-vector  $\mathbf{E}_i$  de  $N \cdot M$  filas cuyos elementos  $(i, \alpha)$  con  $\alpha = 1, 2, \dots, M$  son iguales a 1 y todos los demás son iguales a 0, i.e.

$$\mathbf{E}_i = (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i | \dots | \mathbf{e}_i), \quad (1.22)$$

donde  $\mathbf{e}_i$  es el  $i$ -ésimo  $N$ -dimensional vector canónico. Insertando la ecuación (1.21) y la expresión para  $\mathbf{p}(t)$  dada en la ecuación (1.17) obtenemos

$$\chi_{ij}(t) = [1 - \pi_i(0)] \prod_{\tau=1}^t [1 - \mathbf{p}(0) \mathcal{P}^\tau \mathbf{E}_i^T], \quad (1.23)$$

donde  $\mathbf{p}(0)$  caracteriza la condición inicial de la caminata aleatoria. Sin pérdida de generalidad, la condición inicial  $\mathbf{p}(0)$  se puede elegir de manera que el caminante aleatorio en el tiempo  $t = 0$  esté en el nodo replica  $(j, 1)$ , i.e.

$$p_{i,\alpha}(0) = \delta(i, j) \delta(\alpha, 1), \quad (1.24)$$

donde  $\delta(x, y)$  es la delta de Kronecker. Finalmente, de la ecuación (1.23) usando la aproximación  $1 - x \simeq e^{-x}$  válida para  $x \ll 1$ , obtenemos

$$\chi_{ij}(t) = [1 - \pi_i(0)] \exp\left[-\sum_{\tau=1}^t \mathbf{p}(0) \mathcal{P}^\tau \mathbf{E}_i^T\right]. \quad (1.25)$$

A partir de esta expresión podemos evaluar la cobertura del caminante aleatorio hasta el tiempo  $t$ . De hecho, como  $\chi_{ij}(t)$  indica la probabilidad de que el nodo  $i$  no ha sido visitado dentro del tiempo  $t$ , al promediar  $1 - \chi_{ij}(t)$  es posible obtener la cobertura  $\rho(t)$  de la caminata aleatoria hasta el tiempo  $t$ , i.e.

$$\rho(t) = 1 - \frac{1}{N} \sum_i \chi_{ij}(t). \quad (1.26)$$

Al estudiar la cobertura de la red en presencia de daño (disrupción) de nodos, en la referencia [6] De Domenico et al. han investigado la robustez del transporte público de Londres, concentrándose en tres capas diferentes. Se muestra que la red multiplex resultante es más resiliente que sus capas simples tomadas por separado. De hecho, la red multiplex interconectada provee suficiente redundancia para encontrar caminos desde partes aparentemente aisladas de las capas individuales.

### 1.3.2. Vuelos de Lévy y otras estrategias de búsqueda

Los vuelos de Lévy son una clase especial de caminatas aleatorias en las que los desplazamientos aleatorios son de longitud  $l$  siguiendo una distribución de ley de potencias  $P(l) \propto l^{-\theta}$ . Los vuelos de Lévy claramente son una generalización de las caminatas aleatorias que limitan los movimientos a los vecinos próximos. De hecho, para  $\theta \rightarrow \infty$  los vuelos de Lévy se reducen a las caminatas aleatorias clásicas mientras que para  $\theta = 0$  describen un movimiento con saltos aleatorios de cualquier longitud. Bajo circunstancias muy generales, los vuelos de Lévy han probado ser la estrategia más eficiente de exploración y navegación, superando el rendimiento de la caminata aleatoria clásica (movimiento Browniano) [7, 8]. Los vuelos de Lévy son bastante comunes en el forrajeo de los animales [7, 9], en movilidad humana [10, 11, 12] y en el comportamiento y estrategias de búsquedas mentales humanas [13, 14]. Por lo tanto, es interesante caracterizar las propiedades de los vuelos de Lévy en redes complejas [15] y en redes multicapa [16]. Empecemos por considerar los vuelos de Lévy en una red simple. Primero, asociamos a cada par de nodos  $i$  y  $j$  de la red (conexa) una distancia de salto  $d_{ij}$ . El vuelo de Lévy en una red simple tiene probabilidades de transición  $\pi_{ij}$  del nodo  $i$  al nodo  $j$

determinadas por la distancia  $d_{ij}$ . Específicamente, estarán dadas por:

$$\pi_{ij} = \frac{d_{ij}^{-\theta}}{\sum_{m \neq i} d_{im}^{-\theta}}. \quad (1.27)$$

Los vuelos de Lévy han sido estudiados en la referencia [15] donde se mostró que el tiempo promedio para conectar un nodo particular de la red desde una condición inicial aleatoria tiene un mínimo cuando  $\theta = 0$  donde las probabilidades de transición de Lévy son independientes de la distancia entre los nodos y el vuelo de Lévy realiza esencialmente saltos aleatorios entre nodos de la red.

La situación se vuelve más interesante cuando el vuelo de Lévy ocurre en una red multicapa [16]. En este caso, los saltos de Lévy se permiten únicamente entre nodos de la misma capa, el caminante puede permanecer en su posición actual y puede saltar a otra capa (ver figura 1.3). En este caso, las probabilidades de transición  $\Pi_{i\alpha;j\beta}$  se pueden tomar como

$$\Pi_{i\alpha;j\beta} = \begin{cases} (d_{ij}^{[\alpha]})^{-\theta} / \sigma_{i\alpha} & \text{si } \alpha = \beta, i \neq j, \\ D_{ii}^{[\alpha,\alpha]} / \sigma_{i\alpha} & \text{si } \alpha = \beta, i = j, \\ D_{ii}^{[\alpha,\beta]} / \sigma_{i\alpha} & \text{si } \alpha \neq \beta, i = j, \end{cases} \quad (1.28)$$

donde  $d_{ij}^{[\alpha]}$  es la distancia entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$  en la capa  $\alpha$ , y

$$\sigma_{i,\alpha} = \sum_{j \neq i} (d_{ij}^{[\alpha]})^{-\theta} + \sum_{\beta=1}^M D_{ii}^{[\alpha,\beta]}.$$

Cuando los parámetros  $D_{ii}^{[\alpha,\beta]}$  con  $\alpha \neq \beta$  son independientes del nodo  $i$ , i.e.  $D_{ii}^{[\alpha,\beta]} = D_\chi$ , los autores de la referencia [16] han encontrado que para costos intercapa pequeños  $D_\chi$  la mejor estrategia para alcanzar el 50% de los nodos en la menor cantidad de tiempo no es  $\theta = 0$ , como lo es en capas individuales, sino un valor mayor y distinto de cero. Esto implica que si el costo de pasar por enlaces intercapa está desapareciendo, la caminata aleatoria puede permanecer localizada entre los nodos replica si los otros saltos de Lévy tienen una suficientemente pequeña probabilidad de transición (como es el caso cuando  $\theta = 0$ ). solo cuando  $D_\chi$  es significativamente grande los resultados de las redes multicapa son consistentes con el resultado de la capa individual y la cobertura óptima se obtiene para  $\theta = 0$ .

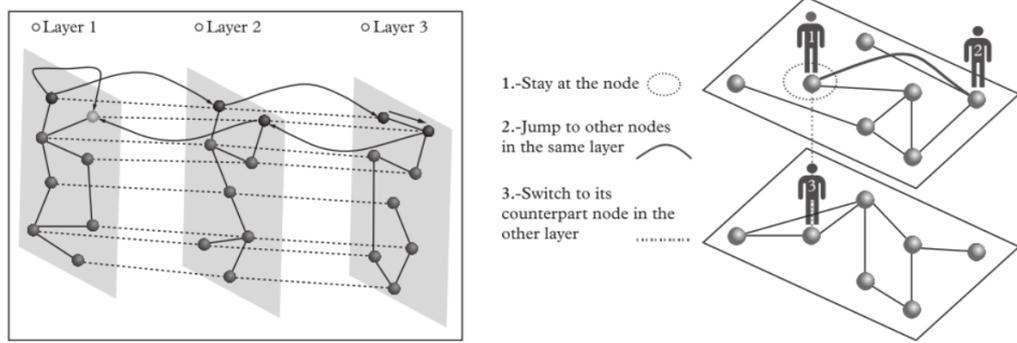


Figura 1.3: Ilustración de la estrategia de navegación usando vuelos de Lévy en una red multiplex. Imagen tomada de la referencia [16]

### 1.3.3. Caminatas aleatorias sesgadas

En redes multiplex también es posible explorar el caso en el que los enlaces intercapa están ausentes y la caminata aleatoria no se mueve entre nodos replica sino que solo salta de un nodo a cualquiera de sus nodos vecinos siguiendo enlaces de diferentes tipos que pertenecen a diferentes capas de la red multiplex. Las principales preguntas de investigación de los trabajos que se ocupan de este tipo de caminatas aleatorias son la optimización de las estrategias de búsqueda y la cobertura de la caminata aleatoria cuando las probabilidades de saltar entre enlaces de diferentes capas son diferentes. En la referencia [17] un caminante aleatorio que inicialmente está en el nodo  $i$  tiene una probabilidad  $z^{[\alpha]}$  de saltar a un nodo vecino  $j$  conectado al nodo  $i$  por un enlace de la capa  $\alpha$ . Por lo tanto, las probabilidades de transición  $\pi_{ij}$  del nodo  $i$  al nodo  $j$  están dadas por

$$\pi_{ij} = \sum_{\alpha=1}^M z^{[\alpha]} \frac{a_{ij}^{[\alpha]}}{\kappa_i^{[\alpha]}} \quad (1.29)$$

con  $\kappa_i^{[\alpha]} = \max(1, \sum_{r=1}^N a_{ir}^{[\alpha]})$  y  $z^{[\alpha]}$  normalizada, i.e.

$$\sum_{\alpha=1}^M z^{[\alpha]} = 1. \quad (1.30)$$

En este tipo de caminata aleatoria en una multiplex los autores de la referencia [17] han mostrado que hay una configuración óptima de las probabilidades  $z^{[\alpha]}$  que minimiza el tiempo de búsqueda de la caminata aleatoria.

#### 1.4. CAMINATAS ALEATORIAS EN REDES TEMPORALES MULTICORTE15

La posición específica de la solución óptima para las probabilidades  $z^{[\alpha]}$  depende de la topología de las capas de la multiplex y de sus correlaciones. En conclusión, las diferentes fuerzas de acoplamiento entre las capas se puede optimizar para mejorar la eficiencia de la caminata aleatoria, y esto sugiere un mecanismo para explicar la ventaja evolutiva de muchas redes multicapa naturales.

Lo más importante es que las medidas de centralidad más eficientes para redes multiplex incluyendo el PageRank multiplex funcional y a MultiRank están basadas en esta caminata aleatoria sesgada. En el algoritmo MultiRank primero se modifica la caminata aleatoria en el estilo del algoritmo PageRank introduciendo un parámetro de teletransportación que permite saltos aleatorios entre cualquier par de nodos. En segundo lugar, los parámetros  $z^{[\alpha]}$  de la caminata aleatoria se interpretan como las *influencias* (centralidades) de las capas y el estado absorbente de la caminata aleatoria se interpreta como la centralidad de los nodos.

En la referencia [18] una caminata aleatoria sesgada se estudia en redes multiplex donde los nodos están conectados por diferentes tipos de enlaces. La caminata aleatoria sesgada navega la red multiplex realizando una caminata que es sesgada de acuerdo con las propiedades de los nodos indicadas por el vector  $f_i$  con  $i = 1, 2, \dots, N$ . La caminata aleatoria considerada en la referencia [18] está definida sobre la red agrupada pesada en la que cada enlace tiene un peso  $\nu_{ij}$  dado por la multiplicidad de la superposición del enlace  $(i, j)$ . De esta forma, la probabilidad de transición  $\pi_{ij}$  está dada por

$$\pi_{ij} = \frac{\nu_{ij} f_j}{\sum_m \nu_{im} f_m}. \quad (1.31)$$

Aquí se encuentra que las propiedades estructurales de las redes multiplex tales como el número de capas, la superposición de enlaces y el grado de correlación intercapa tiene un impacto significativo en las propiedades de difusión de la caminata aleatoria.

### 1.4. Caminatas aleatorias en redes temporales multicorte

Para redes multiplex usualmente es el caso que las capas adicionales favorecen la difusión, ya que por ejemplo, en redes de transporte la adición

de nuevas capas hace más rápida y eficiente la cobertura de la red. Cuando se consideran redes multicorte, la naturaleza temporal de las estructuras ralentiza la exploración de una caminata aleatoria dada en comparación con la red agrupada donde la naturaleza temporal de la interacción es ignorada. Este efecto se debe a que el caminante aleatorio en redes temporales tiene un número reducido de caminos posibles disponibles que respetan la temporalidad. Los caminos que respetan la temporalidad están definidos como secuencias de nodos  $\mathcal{P}_t = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  donde cada nodo consecutivo se puede alcanzar desde el nodo anterior en una secuencia temporal siguiendo enlaces de la red temporal, i.e. si  $(i_r, i_{r+1})$  con  $r = 1, 2, \dots, n - 2$  es un enlace del corte temporal  $\alpha$  correspondiente al tiempo  $t = t_\alpha$ , el enlace  $(i_{r+1}, i_{r+2})$  debe ser un enlace en un corte temporal  $\beta$  correspondiente a un tiempo subsecuente  $t = t_\beta > t_\alpha$ . Los caminos que respetan la temporalidad en una red multicorte son un subconjunto de los caminos de la red agrupada. Asumamos, por ejemplo, que en el tiempo  $t = 1$  la red está formada por el link  $(2, 3)$  y al tiempo  $t = 2$  está formada por el enlace  $(1, 2)$ . Mientras que el camino  $\mathcal{P}_{aggr} = (1, 2, 3)$  existe en la red agrupada, este camino no respeta la temporalidad porque el enlace  $(1, 2)$  está presente solo después del enlace  $(2, 3)$ . Por lo tanto, no es posible mandar señales en la red entre el nodo 1 y el nodo 3. Además, en redes multicorte, el caminante aleatorio puede permanecer atrapado en nodos que están solo ocasionalmente conectados a otros nodos de la red temporal.

En la referencia [19] se realizó un análisis de las propiedades de un caminante aleatorio en conjuntos de redes temporales reales, analizando el efecto de correlaciones temporales entre contactos consecutivos presentes en los datos. Es interesante que, en este estudio se encuentra que los caminos más cortos que respetan la temporalidad tienen características estadísticas que son significativamente diferentes a las de los caminos más rápidos que respetan la temporalidad. Es cierto, que los caminos más cortos que respetan la temporalidad no necesariamente son los más rápidos, ya que el caminante aleatorio puede permanecer atrapado en algunos de los nodos por bastante tiempo.

El modelo de una red temporal con actividad temporal heterogénea de los nodos es un marco de trabajo muy bien definido que captura las consecuencias de tener nodos que están conectado a la red más o menos frecuentemente. De hecho, a cada nodo  $i$  se le asigna una actividad temporal  $a_i \in [0, 1]$  tomada de una distribución  $F(a)$  y en cada paso del tiempo  $t$  se establecen  $m$  enlaces con probabilidad  $a_i$ . En el marco de trabajo de este modelo se muestra [20] que el tiempo promedio que le toma al caminante aleatorio regresar por primera

vez a su posición de origen es inversamente proporcional a la actividad del nodo. Esta propiedad del caminante aleatorio en redes temporales dirigido por actividad captura la desaceleración del caminante aleatorio que se observa en redes temporales reales.

Una manera muy exitosa para describir caminatas aleatorias en redes temporales arbitrarias depende de una descripción no-Markoviana de su proceso de difusión [21, 22]. De acuerdo con esta caminata aleatoria no-Markoviana la probabilidad de transición entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$  depende de la historia pasada de la caminata. El ejemplo más simple de dinámicas no-Markovianas asigna una probabilidad dada  $\pi(\ell i \rightarrow ij)$  al salto de la caminata desde el nodo  $i$  al nodo  $j$  dado que la caminata aleatoria en el paso previo estaba saltando entre el nodo  $\ell$  y el nodo  $i$ .

Al extender el tratamiento de las caminatas aleatorias Markovianas en redes temporales a las caminatas aleatorias no-Markovianas es posible observar tanto la ralentización como la aceleración de la difusión con respecto a la su contraparte Markoviana [22].

## 1.5. Tráfico y congestión

En redes de transporte y en redes tecnológicas es esencial monitorear el tráfico y evitar la congestión. El tráfico y la congestión en redes simples han sido extensamente estudiados en la literatura [23, 24, 25, 26]. Ya que muchas redes de transporte y redes tecnológicas son redes multicapa, es esencial estudiar los efectos de la multiplexidad en el tráfico y la congestión.

Los problemas de tráfico difieren de los procesos de difusión antes caracterizados porque el caminante no realiza una exploración aleatoria de la red sino que es dirigido de un nodo origen a un nodo destino siguiendo un algoritmo director. El algoritmo director más natural para problemas de tráfico es usando el camino más corto entre los nodos de origen y destino. En una red simple la caracterización del flujo que pasa a través de cada nodo (o cada enlace), asumiendo que cada nodo tiene la misma probabilidad de ser un origen o un destino, ha incitado a los científicos de redes a introducir el concepto de centralidad de intermediación<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>La centralidad de intermediación le asigna relevancia a los nodos que actúan como puentes entre diferentes comunidades en la red. Estos son nodos por los que pasan un gran número de los caminos más cortos conectando a diferentes pares de nodos en la red. La

En redes multiplex los caminos más cortos se pueden distinguir entre aquellos que pertenecen a una misma red simple y aquellos que incluyen enlaces intercapa de varias redes conectando nodos replica de diferentes capas (aunque uno podría elegir asignar una longitud de cero o distinta de cero a los enlaces intercapa).

Para poder caracterizar cómo el flujo se distribuye en las diferentes capas de la red multiplex en la referencia [27] los autores introducen la interdependencia pesada  $\lambda \in [0, 1]$  que es una modificación de la interdependencia clásica. La interdependencia pesada depende del tráfico y está dada por

$$\lambda = \sum_{i \neq j} T_{ij} \frac{\psi_{ij}}{\sigma_{ij}} \quad (1.32)$$

donde  $\psi_{ij}$  es el número de caminos más cortos entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$  incluyendo enlaces de diferentes capas,  $\sigma_{ij}$  es el número de caminos más cortos entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$  y  $T_{ij}$  es la matriz normalizada de origen-destino determinando la fracción de caminantes con origen  $i$  y destino  $j$ , Por lo tanto, la interdependencia  $\lambda$  es la fracción de los caminantes que usan más de una capa.

Otras medidas generales que indican que tan bien el sistema está operando en condiciones normales de tráfico (i.e. en ausencia de congestión) son la distancia recorrida promedio  $\bar{d}$  dado por

$$\bar{d} = \sum_{i \neq j} T_{ij} d_{ij} \quad (1.33)$$

y el *coeficiente de Gini*  $G$ . El coeficiente de Gini  $G \in [0, 1]$  es una medida usualmente utilizada en economía para caracterizar la distribución de la riqueza en una nación. En la referencia [27] se ha propuesto como una buena medida para describir la distribución del flujo de tráfico en una red. Cuando  $G = 1$  todo el flujo se concentra en un único enlace, mientras que si el flujo se reparte equitativamente en todos los enlaces  $G$  sería cero.

Los resultados de las simulaciones en redes multicapa planar muestran que conforme aumenta la interdependencia pesada la distancia recorrida promedio disminuye, indicando que cuando las rutas más cortas aprovechan la

---

centralidad de intermediación  $b_i$  de un nodo  $i$  en una red está dado por  $b_i = \sum_{r,s} \frac{n_{rs}^i}{g_{rs}}$  donde  $n_{rs}^i$  es el número de caminos más cortos que conectan al nodo  $r$  y al nodo  $s$  que pasan por el nodo  $i$ , y  $g_{rs}$  es el número total de caminos más cortos que conectan al nodo  $r$  con el nodo  $s$ .

multiplexidad de la red la distancia recorrida promedio puede disminuir significativamente. No obstante, en algunas topologías es posible que conforme aumenta la interdependencia pesada aumenta también el coeficiente de Gini, indicando un riesgo más grande de congestión.

Cuando cada nodo de la red tiene una capacidad finita, i.e. solo puede conducir un número finito de elementos en cada momento de tiempo, la red puede sufrir una transición de fase de congestión. La congestión ocurre cuando la entrada de elementos por unidad de tiempo está por encima de un valor crítico, y los nodos empiezan a trabajar al máximo de sus capacidades. Bajo estas condiciones los elementos son introducidos a la red a un ritmo más rápido que el ritmo al que llegan a sus destinos, resultando en un crecimiento lineal contra el tiempo del número de elementos en tránsito en la red.

Es así que, el parámetro de orden de la congestión está dado por [28, 29]

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(t+T) - D(t)}{RT}, \quad (1.34)$$

donde  $D(t)$  es el número de elementos en tránsito en el tiempo  $t$  y  $R$  es el número de elementos introducidos en cada paso de tiempo. En un régimen no congestionado con  $R < R_c$  el número de elementos en tránsito es estacionario, entonces  $\rho = 0$ . Por el contrario, en el régimen congestionado con  $R \geq R_c$ , los elementos se acumulan en la red y  $\rho \neq 0$  mide el incremento normalizado ( $0 \geq \rho \geq 1$ ) de los elementos en tránsito por unidad de tiempo.

En una red multiplex es posible observar fenómenos cooperativos contra-intuitivos [30]. A pesar de que la multiplexidad incrementa el número de caminos en el sistema, una red multiplex puede ser más susceptible de congestionarse que las redes individuales de sus capas. Este fenómeno nos recuerda a la paradoja de Braess [31], en la que al agregar un enlace adicional a una red simple se puede reducir la eficiencia general de la red.

Este efecto contra-intuitivo de la multiplexidad a la hora de calcular el riesgo de congestión se debe a la naturaleza no-local del algoritmo director que busca los caminos más cortos en la red. En el caso en que una capa es más eficiente que otra, i.e. tiene en general caminos más cortos entre los nodos, el tráfico tiende a concentrarse en una sola capa y, dejar vacías las otras capas, incrementa el riesgo de congestión [30]. En la misma línea de este trabajo, otros artículos han caracterizado la transición de congestión en redes dúplex con diferentes distribuciones de grados [32].

En la referencia [33] el efecto de la correlación de grado a la hora de

determinar el umbral de congestión ha sido estudiado. Este trabajo muestra que en redes multicapa con grados correlacionados usando estrategias de asignación de capacidad tales como asignarle a cada nodo una capacidad proporcional a su centralidad de intermediación incrementa la capacidad total de tráfico. En la referencia [34] se han propuesto otras estrategias directoras diseñadas específicamente para redes multiplex.

# Capítulo 2

## Entropía y modelos nulos de redes simples

### 2.1. Ensamblés de redes de máxima entropía

#### 2.1.1. Observaciones generales

En este capítulo se proveen los detalles para caracterizar completamente los ensambles de redes de máxima entropía siguiendo las referencias [35, 36, 37, 38, 39]. Los ensambles de redes constituyen los modelos de redes menos sesgados que satisfacen un conjunto de restricciones. Por esto, este marco de trabajo es frecuentemente usado para construir modelos nulos de redes.

#### 2.1.2. Definiciones

Dado el conjunto de todas las redes  $G = (V, E)$  con  $|V| = N$  nodos, un ensamble de redes es determinado cuando se asigna una probabilidad  $P(G)$  a cada red en el conjunto.

La entropía  $S$  de un ensamble es el logaritmo del número de redes de un tipo en el ensamble y está dado por

$$S = - \sum_G P(G) \ln P(G). \quad (2.1)$$

Un ensamble de entropía máxima que satisface un conjunto de restricciones es el ensamble menos sesgado que exhibe las propiedades deseadas.

### 2.1.3. Restricciones

Distinguimos entre las restricciones débiles y las fuertes. Las restricciones débiles son aquellas que se satisfacen en promedio en el ensamble de redes. Las restricciones fuertes son las que satisfacen para todas las redes en el ensamble.

Ejemplos de restricciones fuertes son las de tipo

$$F_\mu(G) = C_\mu, \quad (2.2)$$

donde  $F_\mu(G)$  es una medida sobre la red cuyo valor está fijo a  $C_\mu$  y cada restricción independiente impuesta a la red está indicada por  $\mu = 1, 2, \dots, N_C$ . Una restricción de este tipo puede fijar el número total de enlaces  $L$  o el grado  $k_i$  de un nodo  $i$ . Indicando con  $a_{ij}$  la matriz de adyacencia de la red estas dos restricciones se escriben como

$$\begin{aligned} F(G) &= \sum_{i<j} a_{ij} = L, \\ F_i(G) &= \sum_{j=1}^N a_{ij} = \kappa_i. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Las restricciones débiles son restricciones que en cambio fijan el valor promedio de una medida  $F_\mu(G)$  de la red en el ensamble y por lo tanto es del tipo

$$\sum_G P(G) F_\mu(G) = C_\mu. \quad (2.4)$$

Una restricción de este tipo puede fijar el número promedio de enlaces  $L$  de una red en el ensamble o el grado promedio  $k_i$  del nodo  $i$ . Estas dos restricciones se escriben como

$$\begin{aligned} \sum_G P(G) \left[ \sum_{i<j} a_{ij} \right] &= L, \\ \sum_G P(G) \left[ \sum_{j=1}^N a_{ij} \right] &= \kappa_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

## 2.2. Ensembles canónico y microcanónico de redes

### 2.2.1. Ensemble canónico de redes

La probabilidad  $P_C(G)$  en un ensemble canónico de redes que satisface  $N_C$  restricciones

$$\sum_G P_C(G) F_\mu(G) = C_\mu \quad (2.6)$$

con  $\mu = 1, 2, \dots, N_C$  tiene la forma exponencial dada por

$$P_C(G) = \frac{1}{Z_C} e^{-\sum_{\mu=1}^{N_C} \lambda_\mu F_\mu(G)} \quad (2.7)$$

donde  $Z_C$  es la suma de normalización y donde los multiplicadores Lagrangianos  $\lambda_\mu$  están fijos y determinados por las restricciones en la ecuación 2.6.

Para encontrar  $P_C(G)$  maximizamos la entropía del ensemble  $S$  bajo las restricciones dadas por la ecuación 2.6 y la restricción de que  $P_C(G)$  está normalizada. Definimos una funcional  $\mathcal{F}$  en la que hemos introducido los multiplicadores Lagrangianos  $\lambda_\mu$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & - \sum_G P_C(G) \ln P_C(G) - \sum_\mu \lambda_\mu \left( \sum_G P_C(G) F_\mu(G) - C_\mu \right) \\ & - \nu \left( \sum_G P_C(G) - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Derivando con respecto a  $P_C(G)$  e igualando la derivada parcial a cero,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_C(G)} = -\ln P_C(G) - 1 - \sum_\mu \lambda_\mu F_\mu(G) - \nu = 0, \quad (2.9)$$

obtenemos

$$P_C(G) = e^{-\sum_\mu \lambda_\mu F_\mu(G) - \nu - 1}. \quad (2.10)$$

Derivando  $\mathcal{F}$  con respecto a los multiplicadores Lagrangianos  $\lambda_\mu$  y el multiplicador Lagrangiano  $\nu$  e igualando las derivadas parciales a cero, obtenemos la restricción definida por la ecuación 2.6 y la restricción de normalización para  $P_C(G)$ . Imponiendo la restricción de normalización podemos fijar el potencial químico  $\nu$  y tener

$$P_C(G) = \frac{1}{Z_C} e^{-\sum_\mu \lambda_\mu F_\mu(G)}, \quad (2.11)$$

donde

$$Z_C = \sum_G e^{-\sum_\mu \lambda_\mu F_\mu(G)}. \quad (2.12)$$

Aquí los multiplicadores Lagrangianos  $\lambda_\mu$  se determinan al imponer las restricciones

$$\sum_G P_C(G) F_\mu(G) = \sum_G \frac{1}{Z} e^{-\sum_{\mu=1}^{N_C} \lambda_\mu F_\mu(G)} F_\mu(G) = C_\mu. \quad (2.13)$$

### 2.2.2. Ejemplos de ensambles canónicos de redes

Primero consideremos el ensamble canónico de redes en el que el número promedio de enlaces está fijo. Por lo tanto, el ensamble satisface únicamente la restricción

$$\sum_G P_C(G) \left[ \sum_{i<j} a_{ij} \right] = L. \quad (2.14)$$

La probabilidad  $P_C(G)$  en este ensamble está dada por

$$P_C(G) = \frac{1}{Z_C} e^{-\lambda \sum_{i<j} a_{ij}}. \quad (2.15)$$

Dado que la suma sobre todas las gráficas  $G$  se puede expresar como la suma sobre todos los elementos de la matriz de adyacencia  $\mathbf{a}$ , la suma de normalización  $Z_C$  está dada por

$$Z_C = \sum_{\mathbf{a}} e^{-\lambda \sum_{i<j} a_{ij}} = \left( \sum_{a_{ij}=0,1} e^{-\lambda a_{ij}} \right)^{N(N-1)/2} = (1 + e^{-\lambda})^{N(N-1)/2}. \quad (2.16)$$

La probabilidad de cada enlace está dada por

$$p = \sum_{\mathbf{a}} a_{ij} P_C(G) = \frac{e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}} \quad (2.17)$$

La cantidad  $p$ , o equivalentemente la cantidad  $\lambda$ , está determinada por la restricción

$$pN(N-1)/2 = L. \quad (2.18)$$

Tenemos entonces que este es el  $G(N, p)$  ensamble, en el que la probabilidad  $P_C(G)$  está dado por

$$P_C(G) = p^L(1-p)^{N(N-1)/2-L}. \quad (2.19)$$

Ahora consideremos el caso en el que fijamos la secuencia de grados promedio  $\{k_i\}_{i=1,2,\dots,N}$ . El ensamble de redes satisface las  $N$  restricciones débiles

$$\sum_G P_C(G) \left[ \sum_{j=1}^N a_{ij} \right] = \sum_{j=1}^N p_{ij} = k_i \quad (2.20)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, N$ . La probabilidad de una red en el ensamble está dada por

$$P_C(G) = \frac{1}{Z_C} e^{-\sum_{i=1}^N \lambda_i \sum_{j=1}^N a_{ij}} \quad (2.21)$$

donde la constante de normalización  $Z_C$  está dada por

$$\begin{aligned} Z_C &= \sum_{\mathbf{a}} e^{-\sum_{i=1}^N \lambda_i \sum_{j=1}^N a_{ij}} = \sum_{\mathbf{a}} e^{-\sum_{i<j} (\lambda_i + \lambda_j) a_{ij}} \\ &= \prod_{i<j} (1 + e^{-\lambda_i - \lambda_j}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

La probabilidad  $p_{ij}$  de un enlace entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$  está dada por

$$p_{ij} = \sum_{\mathbf{a}} a_{ij} \left[ \frac{1}{Z_C} e^{-\sum_{r<s} (\lambda_r + \lambda_s) a_{rs}} \right] = \frac{e^{-\lambda_i - \lambda_j}}{1 + e^{-\lambda_i - \lambda_j}}. \quad (2.23)$$

Los multiplicadores Lagrangianos están determinados por las restricciones

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} = \sum_{j=1}^N \frac{e^{-\lambda_i - \lambda_j}}{1 + e^{-\lambda_i - \lambda_j}} = k_i. \quad (2.24)$$

La probabilidad  $P_C(G)$  toma la forma

$$P_C(G) = \prod_{i<j} p_{ij}^{a_{ij}} (1 - p_{ij})^{1-a_{ij}}. \quad (2.25)$$

La entropía toma la forma

$$S = - \sum_{i<j} p_{ij} \ln p_{ij} - \sum_{i<j} (1 - p_{ij}) \ln(1 - p_{ij}). \quad (2.26)$$

Si el grado máximo  $K$  de la red está por debajo de su límite de corte estructural, i.e. si

$$K \ll \sqrt{\langle k \rangle N}, \quad (2.27)$$

entonces en la primera aproximación tenemos que

$$e^{-\lambda_i} = \frac{k_i}{\sqrt{\langle k \rangle N}} \ll 1, \quad (2.28)$$

y por lo tanto

$$p_{ij} = \frac{k_i k_j}{\langle k \rangle N}. \quad (2.29)$$

Así, en este límite el ensamble de redes son redes aleatorias no correlacionadas con una secuencia de grados  $\{k_i\}$ .

### 2.2.3. Ensamble de redes Micro-canónico

El ensamble de redes de máxima entropía en el que cada red satisface las restricciones fuertes con una probabilidad distinta de cero

$$F_\mu(G) = C_\mu, \quad (2.30)$$

con  $\mu = 1, 2, \dots, N_C$  asigna a cada red  $G$  de  $N$  nodos la probabilidad  $P_M(G)$  dada por

$$P_M(G) = \frac{1}{Z_M} \prod_{\mu=1}^{N_C} \delta(F_\mu(G), C_\mu), \quad (2.31)$$

donde  $\delta(x, y)$  es la delta de Kronecker y  $Z_M$  indica el número total de redes que satisfacen las restricciones fuertes definidas en la ecuación 2.30. De hecho, el ensamble menos sesgado que satisface las restricciones fuertes definidas previamente es el ensamble que atribuye la misma probabilidad distinta de cero a cada una de las redes que satisfacen las restricciones y probabilidad cero a todas las otras redes.

La entropía  $\Sigma$  del ensamble microcanónico está dada por

$$\Sigma = \ln Z_M. \quad (2.32)$$

La relación entre  $\Sigma$  y la entropía  $S$  del ensamble canónico conjugado dado por

$$S = - \sum_G P_C(G) \ln P_C(G) \quad (2.33)$$

es simplemente

$$\Sigma = S - \Omega \quad (2.34)$$

donde  $\Omega$  está dado por el valor absoluto del logaritmo de la probabilidad de que las redes del ensamble canónico satisfagan las restricciones fuertes, i.e.

$$\Omega = -\ln \left[ \sum_G P_C(G) \delta(F_\mu(G), C_\mu) \right]. \quad (2.35)$$

Para poder derivar este resultado primero hay que mostrar que dado que la probabilidad  $P_C(G)$  está dada por la ecuación 2.7 la entropía  $S$  del ensamble canónico está dado por [39]

$$\begin{aligned} S &= \sum_G P_C(G) \left[ \sum_\mu \lambda_\mu F_\mu(G) + \ln Z_C \right] \\ &= \sum_\mu \lambda_\mu C_\mu + \ln Z_C. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Si partimos de la definición de  $\Omega$  dada por la ecuación 2.35 tenemos que

$$\begin{aligned} e^{-\Omega} &= \sum_G P_C(G) \delta(F_\mu(G), C_\mu) \\ &= \sum_G \frac{1}{Z_C} e^{-\sum_\mu \lambda_\mu F_\mu(G)} \delta(F_\mu(G), C_\mu) \\ &= \frac{1}{Z_C} e^{-\sum_\mu \lambda_\mu C_\mu} \sum_G \delta(F_\mu(G), C_\mu) \\ &= e^{-S+\Sigma}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Por lo tanto, tenemos

$$\Sigma = S - \Omega. \quad (2.38)$$

Cuando el número de restricciones impuestas crece linealmente con el número de nodos, se encuentra que  $\Omega$  es extensivo y no puede despreciarse en el límite de redes grandes, demostrando la no equivalencia de los ensambles canónico y microcanónico de redes. En el caso en el que las restricciones impuestas son lineales es posible calcular  $\Omega$  [38, 39]. En el caso en que las restricciones fijan la secuencia de grados de la red  $\Omega$  está dado por la ecuación

$$\Omega = \sum_{i=1}^N \ln \left[ \frac{1}{k_i!} k_i^{k_i} e^{-k_i} \right]$$

siempre y cuando la red sea no correlacionada.



# Capítulo 3

## Creciendo redes multiplex: La ecuación maestra

### 3.1. La ecuación maestra

En esta sección se sigue la referencia [40] y discutimos el formalismo general para obtener la distribución de grado conjunta exacta al crecer redes multiplex con enlace preferencial lineal generalizado<sup>1</sup>. Se muestran los detalles de la derivación explícita de la distribución de grados conjunta del modelo de crecer redes dúplex con  $c_{1,1} = c_{2,2} = 1$ .

Para obtener la distribución de grados de los modelos de crecer redes multiplex vamos a extender el acercamiento de ecuación maestra al escenario de una red multiplex. Por simplicidad consideramos una red dúplex con  $M = 2$  capas. Empezamos con una red conexas pequeña y en cada paso de tiempo agregamos un nodo que añade, al mismo tiempo,  $m$  enlaces nuevos a la capa 1 y  $m$  enlaces nuevos a la capa 2. Asumimos que en cada paso de tiempo el

---

<sup>1</sup>Enlace preferencial lineal generalizado es fácil de definir. Empezando en el tiempo  $t = 1$  con una red dúplex con  $n_0 \geq m$  nodos (con un nodo replica en cada una de las capas) conectados por  $m_0$  enlaces en cada capa, el modelo procede como sigue:  $\cdot$ ) Crecimiento, en cada tiempo  $t > 1$  un nodo representado por un nodo replica en cada una de las capas es agregado a la red multiplex. Cada nuevo nodo replica es conectado a otros nodos de la misma capa por  $m$  enlaces. Enlace preferencial generalizado: cada nuevo enlace en las capas  $\alpha = 1, 2$  se añade a un nodo  $i$  con probabilidad  $\Pi_i^{[\alpha]}$  proporcional a la combinación lineal del grado  $k_i^{[1]}$  del nodo  $i$  en la capa 1 y  $k_i^{[2]}$  del nodo  $i$  en la capa 2, i.e.  $\Pi_i^{[1]} \propto c_{1,1}k_i^{[1]} + c_{1,2}k_i^{[2]}$  y  $\Pi_i^{[2]} \propto c_{2,1}k_i^{[1]} + c_{2,2}k_i^{[2]}$  donde  $c_{\alpha,\beta} \in [0, 1]$  y  $c_{1,1} + c_{1,2} = c_{2,1} + c_{2,2} = 1$ .

número esperado de enlaces nuevos en la capa uno añadidos a un nodo  $i$  de grado  $k_i^{[1]}$  en la capa 1 y grado  $k_i^{[2]}$  en la capa 2 está dado por  $m\Pi^{[1]}(k_i^{[1]}, k_i^{[2]})$ . Análogamente, el número esperado de enlaces nuevos en la capa 2 añadidos a un nodo  $i$  está dado por  $m\Pi^{[2]}(k_i^{[1]}, k_i^{[2]})$ . Si asumimos que la probabilidad de añadir un enlace nuevo a un nodo  $i$  ya sea en la capa 1 o en la capa 2 es pequeños, i.e.  $\Pi^{[1]}(k_i^{[1]}, k_i^{[2]}) \ll 1$  y  $\Pi^{[2]}(k_i^{[1]}, k_i^{[2]}) \ll 1$ , podemos despreciar la probabilidad de que un nodo arbitrario  $i$  adquiera un enlace en las dos capas en el mismo paso de tiempo. Con estas condiciones la ecuación maestra del número promedio de nodos  $N_{k,q}(t)$  que en el tiempo  $t$  tiene grados  $k^{[1]} = k$  y  $k^{[2]} = q$  está dada por

$$\begin{aligned} N_{k,q}(t+1) = & N_{k,q}(t) + m\Pi^{[1]}(k-1, q)N_{k-1,q}(t)[1 - \delta(k, m)] \\ & + m\Pi^{[2]}(k, q-1)N_{k,q-1}(t)[1 - \delta(q, m)] \\ & - m[\Pi^{[1]}(k, q) + \Pi^{[2]}(k, q)]N_{k,q}(t) + \delta(k, m)\delta(q, m) \end{aligned} \quad (3.1)$$

para  $k \geq m$  y  $q \geq m$ , donde  $\delta(x, y)$  es la delta de Kronecker. Considerando el modelo con enlace preferencial lineal generalizado se puede derivar fácilmente la expresión para  $\Pi^{[\alpha]}(k, q)$  dada por

$$\begin{aligned} \Pi^{[1]}(k, q) &= \frac{c_{1,1}k + c_{1,2}q}{\mathcal{N}^{[1]}} \\ \Pi^{[2]}(k, q) &= \frac{c_{2,1}k + c_{2,2}q}{\mathcal{N}^{[2]}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $c_{\alpha,\beta} \in [0, 1]$  con  $c_{1,1} + c_{1,2} = c_{2,1} + c_{2,2} = 1$  y  $\mathcal{N}^{[1]}$  y  $\mathcal{N}^{[2]}$  son constantes de normalización iguales al doble del número de enlaces en cada capa.

## 3.2. Derivación de la distribución de grado exacta

### 3.2.1. Caso general

Dado que en cada paso de tiempo agregamos exactamente  $m$  enlaces a cada capa, tenemos que  $\mathcal{N}^{[1]}$  y  $\mathcal{N}^{[2]}$  pueden aproximarse en tiempos grandes  $t \gg 1$  por

$$\mathcal{N}^{[\alpha]} \simeq 2mt, \text{ for } \alpha = 1, 2. \quad (3.3)$$

Entonces, utilizando

$$\begin{aligned}\Pi^{[1]}(k, q) &= \frac{c_{1,1}k + c_{1,2}q}{2mt} = \frac{A_{k,q}}{mt}, \\ \Pi^{[2]}(k, q) &= \frac{c_{2,1}k + c_{2,2}q}{2mt} = \frac{B_{k,q}}{mt}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

La ecuación maestra se escribe como

$$\begin{aligned}N_{k,q}(t+1) &= N_{k,q}(t) + \frac{A_{k-1,q}}{t}N_{k-1,q}(t)[1 - \delta(k, m)] \\ &\quad + \frac{B_{k,q-1}}{t}N_{k,q-1}(t)[1 - \delta(q, m)] \\ &\quad - \left[ \frac{A_{k,q}}{t} + \frac{B_{k,q}}{t} \right] N_{k,q}(t) + \delta(k, m)\delta(q, m),\end{aligned}\tag{3.5}$$

para  $k \geq m$  y  $1 \geq m$ . Asumiendo que  $N_{k,q} = tP(k, q)$  es válido en una escala de tiempo grande  $t \gg 1$ , podemos resolver para la distribución de grado combinada  $P(k, q)$  indicando la probabilidad de que un nodo en un momento particular tenga el mismo grado  $k$  en la capa 1 y  $q$  en la capa 2. Podemos que la distribución de grados combinada está determinada por las ecuaciones recursivas

$$\begin{aligned}P(m, q) &= \left( \prod_{j=m+1}^q \frac{B_{m,j-1}}{1 + A_{m,j} + B_{m,j}} \right) P(m, m), \\ P(k, q) &= \sum_{r=m}^q \left( \prod_{j=r+1}^q \frac{B_{k,j-1}}{1 + A_{k,j} + B_{k,j}} \right) \frac{A_{k-1,r}}{1 + A_{k,r} + B_{k,r}} P(k-1, r).\end{aligned}\tag{3.6}$$

### 3.2.2. Caso $c_{1,1} = c_{2,2} = 1$

Ahora consideremos el enlace preferencial lineal generalizado, en el que  $c_{1,1} = c_{2,2} = 1$  y  $c_{1,2} = c - 2, 1 = 0$ . En este caso tenemos

$$\begin{aligned}A_{k,q} &= \frac{k}{2}, \\ B_{k,q} &= \frac{q}{2}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Las ecuaciones recursivas en 3.6 quedan

$$\begin{aligned}
 P(m, q) &= \frac{\Gamma(q)\Gamma(3+2m)}{\Gamma(m)\Gamma(3+q+m)}P(m, m), \\
 P(k, q) &= \sum_{r=m}^q \left( \frac{\Gamma(q)\Gamma(3+r+k)}{\Gamma(r)\Gamma(3+q+k)} \right) \frac{k-1}{2+k+q} P(k-1, r)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde  $P(m, m)$  está determinado por la condición de normalización  $\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{q=m}^{\infty} P(k, q) = 1$ . Usando la relación

$$\sum_{r=m}^q \frac{\Gamma(k+r-2m)}{\Gamma(r-m+1)\Gamma(k-m)} = \frac{\Gamma(k+q-2m+1)}{\Gamma(k-m+1)\Gamma(q-m+1)} \tag{3.9}$$

se puede probar recursivamente que la distribución de grado conjunta  $P(k, q)$  está dada por

$$P(k, q) = \frac{2\Gamma(2+2m)}{\Gamma(m)\Gamma(m)} \frac{\Gamma(k+q-2m+1)}{\Gamma(k+q+3)} \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q-m+1)} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-m+1)}. \tag{3.10}$$

Sumando sobre los grados en la capa dos podemos encontrar la distribución de grado  $P(k)$  en la capa una, i.e.  $P(k) = \sum_{q=m}^{\infty} P(k, q)$  obteniendo el resultado conocido para una capa individual,

$$P(k) = \frac{2m(1+m)}{k(k+1)(k+2)}. \tag{3.11}$$

Finalmente, el promedio condicional  $\langle k|q \rangle = \langle k^{[1]}|k^{[2]} \rangle$  que cuantifica las correlaciones de los grados entre las dos redes está dada por

$$\langle k|q \rangle = \frac{\sum_{k=m}^{\infty} kP(k, q)}{\sum_{k=m}^{\infty} P(k, q)} = \frac{m}{1+m}(q+2). \tag{3.12}$$

Expresiones similares se pueden obtener para  $P(q)$  y  $\langle q|k \rangle$  haciendo la suma en la ecuación 3.10 sobre  $k$ .

# Capítulo 4

## Espectro del Supra-Laplaciano

### 4.1. Ecuaciones de difusión

En esta sección seguimos la referencia [2] y discutimos en detalle los diferentes regímenes de los procesos de difusión en redes multiplex descritos en la sección 1.2. La ecuación de difusión en una red multiplex con  $M$  capas y  $N$  nodos está dada por

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\mathcal{L}\mathbf{X} \quad (4.1)$$

donde  $\mathcal{L}$  es la matriz supra-Laplaciana y el vector  $N \cdot M$  dimensional  $\mathbf{X}$  indica el estado dinámico de los nodos replica. Por simplicidad, aquí nos enfocamos en las propiedades de difusión de una red dúplex con  $M = 2$  capas. El supra-Laplaciano de las redes dúplex es una  $2N \times 2N$  matriz con estructura de bloques dada por

$$\mathcal{L} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{L}^{[1]} + D_\chi \mathbf{I} & -D_\chi \mathbf{I} \\ \hline -D_\chi \mathbf{I} & \mathbf{L}^{[2]} + D_\chi \mathbf{I} \end{array} \right), \quad (4.2)$$

donde  $L^{[1]}$  y  $L^{[2]}$  son respectivamente las matrices Laplacianas en la capa 1 y la capa 2 y  $D_\chi$  es la constante de difusión intercapa. El estado dinámico de los nodos puede escribirse distinguiendo dos bloques indicando respectivamente el estado dinámico del nodo replica en la capa 1 y el estado dinámico del nodo replica en la capa 2, i.e.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{[1]} \\ \mathbf{x}^{[2]} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Sean  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$  los  $N$  eigenvalores propios del supra-Laplaciano.

La escala temporal típica  $\tau$  de la relajación del proceso de difusión está dada por el inverso del más pequeño eigenvalor del Supra-Laplaciano que es diferente de cero, i.e.

$$\tau = \frac{1}{\lambda_2}, \quad (4.4)$$

mientras que haya una brecha espectral finita en el espectro del supra-Laplaciano. Este resultado es una extensión directa del resultado obtenido para capas individuales. Ahora podemos discutir en los próximos párrafos los dos regímenes distintos de difusión bajo la suposición que tanto la capa 1 como la capa 2 están formados por redes conexas.

## 4.2. Constante de difusión intercapa pequeña

$D_\chi$

Primero mostremos que para una constante de difusión intercapa pequeña ( $D_\chi \ll D_\chi^*$ ) la escala de tiempo típica para el relajamiento está dado por

$$\tau = \frac{1}{2D_\chi}. \quad (4.5)$$

Para poder explicar este regimen, consideremos el caso límite  $D_\chi = 0$ . En este caso el supra-Laplaciano tiene una estructura de bloques diagonal formada por los dos Laplacianos  $\mathbf{L}^{[1]}$  y  $\mathbf{L}^{[2]}$  de las dos capas. El eigenvalor cero de esta matriz está dos veces degenerado y tenemos que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Como  $\mathbf{L}^{[1]}\mathbf{1} = 0$  y  $\mathbf{L}^{[2]}\mathbf{1} = 0$ , donde  $\mathbf{1}$  es el vector columna  $N$ -dimensional cuyas entradas son unos, es posible elegir dos eigenvectores del kernel del supra-Laplaciano correspondientes a los eigenvalores  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  como

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Cuando se introduce una constante de difusión intercapa pequeña  $D_\chi \ll D_\chi^*$ , los dos eigenvectores  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  siguen siendo eigenvectores del supra-Laplaciano pero la degeneración del eigenvalor cero desaparece. De hecho, es fácil mostrar

que  $\mathcal{L}\mathbf{v}_1 = 0$ , i.e. el eigenvector  $\mathbf{v}_1$  corresponde al eigenvalor  $\lambda_1 = 0$ . En cambio,  $\mathbf{v}_2$  corresponde al eigenvalor

$$\lambda_2 = 2D_\chi.$$

De hecho, tenemos

$$\mathcal{L}\mathbf{v}_1 = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{L}^{[1]} + D_\chi \mathbf{I} & -D_\chi \mathbf{I} \\ \hline -D_\chi \mathbf{I} & \mathbf{L}^{[2]} + D_\chi \mathbf{I} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{pmatrix} = 2D_\chi \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Siempre y cuando  $D_\chi$  sea suficientemente pequeña este eigenvalor será el eigenvalor más pequeño distinto de cero del supra-Laplaciano y determina el tiempo de relajación típico del proceso de difusión de acuerdo con la ecuación 4.5. Por lo tanto, para una constante de difusión pequeña  $D_\chi \ll D_\chi^*$  la escala de tiempo típica  $\tau$  para la difusión está dada por

$$\tau = \frac{1}{2D_\chi}. \quad (4.8)$$

Este resultado implica que en este régimen la difusión intercapa es el valor limitante para la diseminación de la difusión.

### 4.3. Constante de difusión intercapa grande $D_\chi$

Para constantes de difusión intercapa grandes ( $D_\chi \gg D_\chi^*$ ),  $\lambda_2$  tiende a un valor finito

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_s}{2}$$

donde  $\lambda_s$  es el eigenvalor más pequeño distinto de cero del Laplaciano de la red conjunta dado por  $\mathbf{L}^{[1]} + \mathbf{L}^{[2]}$ . Este resultado se puede obtener fácilmente usando teoría de perturbaciones usando una expansión en  $\epsilon = 1/D_\chi$ . De hecho, el supra-Laplaciano  $\mathcal{L}$  se puede escribir como

$$\mathcal{L} = D_\chi \left[ \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \hline -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{array} \right) + \epsilon \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{L}^{[1]} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{L}^{[2]} \end{array} \right) \right] = D_\chi \hat{\mathcal{L}}. \quad (4.9)$$

Para  $\epsilon = 0$  los eigenvalores  $\hat{\mathcal{L}}$  son 0 y 2, ambos  $N$  veces degenerados. El eigenvector correspondiente a los eigenvalores 0 y 2 están dados respectivamente por los vectores  $(\mathbf{u}|\mathbf{u})$  y  $(\mathbf{u}|\mathbf{-u})$ , i.e. vectores que tienen idénticos  $\mathbf{u}$

opuestos valores en el  $i$ -ésimo elemento y el  $(N + i)$ -ésimo elemento. Para un valor distinto de cero  $\epsilon \ll 1$ , es posible encontrar los eigenvalores  $\lambda_i$  y los eigenvectores  $\mathbf{v}_i$  del Laplaciano  $\hat{\mathcal{L}}$  realizando una expansión en  $\epsilon$ . Sean

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \lambda_i^{(0)} + \epsilon \lambda_i^{(1)} + O(\epsilon^2) \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_i^{(0)} + \epsilon \mathbf{v}_i^{(1)} + O(\epsilon^2)\end{aligned}\tag{4.10}$$

donde  $\lambda_i^{(0)}$  y  $\mathbf{v}_i^{(0)}$  son los eigenvalores y los eigenvectores de  $\hat{\mathcal{L}}$  para  $\epsilon = 0$ . Consideremos los eigenvalores  $\lambda_i^{(0)} = 0$  y sus correspondientes eigenvectores  $\mathbf{v}_i^{(0)} = (\mathbf{u}|\mathbf{u})$ ; la expansión en  $\epsilon$  dice

$$\begin{aligned}\lambda_i &= 0 + \epsilon \tilde{\lambda} \\ \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.11}$$

donde el vector  $(\tilde{\mathbf{u}}_1|\tilde{\mathbf{u}}_2)$  se asume que es ortogonal a  $(\mathbf{u}|\mathbf{u})$ . Sustituyendo estas expresiones en la ecuación del eigenvalor, se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{[1]}\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_2 &= \tilde{\lambda}\mathbf{u}, \\ \mathbf{L}^{[2]}\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}_2 - \tilde{\mathbf{u}}_1 &= \tilde{\lambda}\mathbf{u}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Sumando y restando estas dos ecuaciones, el sistema de ecuaciones se puede escribir como

$$\begin{aligned}(\mathbf{L}^{[1]} + \mathbf{L}^{[2]})\mathbf{u} &= 2\tilde{\lambda}\mathbf{u}, \\ (\mathbf{L}^{[1]} - \mathbf{L}^{[2]})\mathbf{u} &= 2(\tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_2).\end{aligned}\tag{4.13}$$

De la primera ecuación emerge que  $\mathbf{u}$  es un eigenvector del Laplaciano agrupado agrupada  $\mathbf{L}^{[1]} + \mathbf{L}^{[2]}$  con eigenvalor  $\lambda_s = 2\tilde{\lambda}$ . De la segunda ecuación, considerando el hecho de que  $(\tilde{\mathbf{u}}_1|\tilde{\mathbf{u}}_2)$  deben ser perpendicular a  $(\mathbf{u}|\mathbf{u})$  y que entonces  $\tilde{\mathbf{u}}_2 = -\tilde{\mathbf{u}}_1 = -\tilde{\mathbf{u}}$ , es posible obtener una expresión para  $\tilde{\mathbf{u}}$  como una función de  $\mathbf{u}$ , i.e.

$$(\mathbf{L}^{[1]} - \mathbf{L}^{[2]})\mathbf{u} = 4\tilde{\mathbf{u}}.\tag{4.14}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= \frac{\lambda_s}{2} \\ \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \mathbf{u} + \epsilon \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} - \epsilon \tilde{\mathbf{u}} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.15}$$

donde  $\lambda_s$  y  $\mathbf{u}$  son respectivamente el eigenvalor y su correspondiente eigenvector del Laplaciano agrupado  $\mathbf{L}^{[1]} + \mathbf{L}^{[2]}$  y  $\tilde{\mathbf{u}}$  está dado por la ecuación 4.14. El eigenvalor  $\lambda_s$  del Laplaciano agrupado satisface

$$\frac{\lambda_s}{2} \geq \frac{\lambda_2^{[1]} + \lambda_2^{[2]}}{2} \geq \min(\lambda_2^{[1]}, \lambda_2^{[2]}), \quad (4.16)$$

donde  $\lambda_2^{[\alpha]}$  es el eigenvalor más pequeño distinto de cero del Laplaciano  $\mathbf{L}^{[\alpha]}$  de la capa individual. Por lo tanto la difusión en la red multiplex siempre será más rápida que la difusión en la más lenta de las capas de la red multiplex. Super-difusión, i.e. el hecho de que la escala de tiempo de la red multiplex sea más rápida que la escala de tiempo de la difusión en cada una de las capas individuales de la red multiplex, es posible pero no está garantizado en general.



# Bibliografía

- [1] Ginestra Bianconi. *Multilayer networks: structure and function*. Oxford university press, 2018.
- [2] Sergio Gomez, Albert Diaz-Guilera, Jesus Gomez-Gardenes, Conrad J Perez-Vicente, Yamir Moreno, and Alex Arenas. Diffusion dynamics on multiplex networks. *Physical review letters*, 110(2):028701, 2013.
- [3] Albert Sole-Ribalta, Manlio De Domenico, Nikos E Kouvaris, Albert Diaz-Guilera, Sergio Gomez, and Alex Arenas. Spectral properties of the laplacian of multiplex networks. *Physical Review E*, 88(3):032807, 2013.
- [4] Filippo Radicchi and Alex Arenas. Abrupt transition in the structural formation of interconnected networks. *Nature Physics*, 9(11):717–720, 2013.
- [5] Manlio De Domenico, Albert Solé, Sergio Gómez, and Alex Arenas. Random walks on multiplex networks. *arXiv preprint arXiv:1306.0519*, 2013.
- [6] Manlio De Domenico, Albert Solé-Ribalta, Sergio Gómez, and Alex Arenas. Navigability of interconnected networks under random failures. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(23):8351–8356, 2014.
- [7] Gandhimohan M Viswanathan, Vsevolod Afanasyev, Sergey V Buldyrev, Eugene J Murphy, Peter A Prince, and H Eugene Stanley. Lévy flight search patterns of wandering albatrosses. *Nature*, 381(6581):413–415, 1996.
- [8] Rainer Klages, Günter Radons, and Igor Mihajlovič Sokolov. *Anomalous transport*. Wiley Online Library, 2008.

- [9] Simon Benhamou. How many animals really do the lévy walk? *Ecology*, 88(8):1962–1969, 2007.
- [10] Dirk Brockmann, Lars Hufnagel, and Theo Geisel. The scaling laws of human travel. *Nature*, 439(7075):462–465, 2006.
- [11] Marta C Gonzalez, Cesar A Hidalgo, and Albert-Laszlo Barabasi. Understanding individual human mobility patterns. *nature*, 453(7196):779–782, 2008.
- [12] Chaoming Song, Zehui Qu, Nicholas Blumm, and Albert-László Barabási. Limits of predictability in human mobility. *Science*, 327(5968):1018–1021, 2010.
- [13] Andrea Baronchelli and Filippo Radicchi. Lévy flights in human behavior and cognition. *Chaos, Solitons & Fractals*, 56:101–105, 2013.
- [14] Filippo Radicchi and Andrea Baronchelli. Evolution of optimal lévy-flight strategies in human mental searches. *Physical Review E*, 85(6):061121, 2012.
- [15] Alejandro P Riascos and José L Mateos. Long-range navigation on complex networks using lévy random walks. *Physical Review E*, 86(5):056110, 2012.
- [16] Quantong Guo, Emanuele Cozzo, Zhiming Zheng, and Yamir Moreno. Levy random walks on multiplex networks. *Scientific reports*, 6(1):37641, 2016.
- [17] Francesca Di Patti, Duccio Fanelli, and Francesco Piazza. Optimal search strategies on complex multi-linked networks. *Scientific reports*, 5(1):9869, 2015.
- [18] Federico Battiston, Vincenzo Nicosia, and Vito Latora. Efficient exploration of multiplex networks. *New Journal of Physics*, 18(4):043035, 2016.
- [19] Michele Starnini, Andrea Baronchelli, Alain Barrat, and Romualdo Pastor-Satorras. Random walks on temporal networks. *Physical Review E*, 85(5):056115, 2012.
- [20] Bruno Ribeiro, Nicola Perra, and Andrea Baronchelli. Quantifying the effect of temporal resolution on time-varying networks. *Scientific reports*, 3(1):3006, 2013.

- [21] Renaud Lambiotte, Vsevolod Salnikov, and Martin Rosvall. Effect of memory on the dynamics of random walks on networks. *Journal of Complex Networks*, 3(2):177–188, 2015.
- [22] Ingo Scholtes, Nicolas Wider, René Pfitzner, Antonios Garas, Claudio J Tessone, and Frank Schweitzer. Causality-driven slow-down and speed-up of diffusion in non-markovian temporal networks. *Nature communications*, 5(1):5024, 2014.
- [23] Sergi Valverde and Ricard V Solé. Self-organized critical traffic in parallel computer networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 312(3-4):636–648, 2002.
- [24] Roger Guimerà, Albert Díaz-Guilera, Fernando Vega-Redondo, Antonio Cabrales, and Alex Arenas. Optimal network topologies for local search with congestion. *Physical review letters*, 89(24):248701, 2002.
- [25] Pablo Echenique, Jesús Gómez-Gardenes, and Yamir Moreno. Dynamics of jamming transitions in complex networks. *Europhysics letters*, 71(2):325, 2005.
- [26] Daniele De Martino, Luca Dall’Asta, Ginestra Bianconi, and Matteo Marsili. Congestion phenomena on complex networks. *Physical Review E*, 79(1):015101, 2009.
- [27] Richard G Morris and Marc Barthelemy. Transport on coupled spatial networks. *Physical review letters*, 109(12):128703, 2012.
- [28] Alex Arenas, Albert Díaz-Guilera, and Roger Guimera. Communication in networks with hierarchical branching. *Physical review letters*, 86(14):3196, 2001.
- [29] Roger Guimerà, Albert Díaz-Guilera, Fernando Vega-Redondo, Antonio Cabrales, and Alex Arenas. Optimal network topologies for local search with congestion. *Physical review letters*, 89(24):248701, 2002.
- [30] Albert Solé-Ribalta, Sergio Gómez, and Alex Arenas. Congestion induced by the structure of multiplex networks. *Physical review letters*, 116(10):108701, 2016.
- [31] Amnon Rapoport, Tamar Kugler, Subhasish Dugar, and Eyran J Gisches. Choice of routes in congested traffic networks: Experimental tests of the braess paradox. *Games and Economic Behavior*, 65(2):538–571, 2009.

- [32] Yue Zhuo, Yunfeng Peng, Chang Liu, Yingkai Liu, and Keping Long. Traffic dynamics on layered complex networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 390(12):2401–2407, 2011.
- [33] Fei Tan, Jiajing Wu, Yongxiang Xia, and Chi K Tse. Traffic congestion in interconnected complex networks. *Physical Review E*, 89(6):062813, 2014.
- [34] Jie Zhou, Gang Yan, and Choy-Heng Lai. Efficient routing on multilayered communication networks. *Europhysics Letters*, 102(2):28002, 2013.
- [35] Ginestra Bianconi. The entropy of randomized network ensembles. *Europhysics Letters*, 81(2):28005, 2007.
- [36] Ginestra Bianconi. Entropy of network ensembles. *Physical Review E*, 79(3):036114, 2009.
- [37] Kartik Anand and Ginestra Bianconi. Entropy measures for networks: Toward an information theory of complex topologies. *Physical Review E*, 80(4):045102, 2009.
- [38] Ginestra Bianconi, Anthony CC Coolen, and Conrad J Perez Vicente. Entropies of complex networks with hierarchically constrained topologies. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 78(1):016114, 2008.
- [39] Kartik Anand and Ginestra Bianconi. Gibbs entropy of network ensembles by cavity methods. *Physical Review E*, 82(1):011116, 2010.
- [40] Vincenzo Nicosia, Ginestra Bianconi, Vito Latora, and Marc Barthélemy. Growing multiplex networks. *Physical review letters*, 111(5):058701, 2013.