

Oscilaciones, armonía y simpatía

R. Quintero-Torres, M.A. Ocampo, B. Millán y J.L. Aragón

*Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada, Universidad Nacional Autónoma de México,
Apartado Postal 1-1010, 76000 Querétaro, México.*

*e-mail: rquintero@fata.unam.mx, oca@fata.unam.mx,
bmillan@fata.unam.m, aragon@fata.unam.mx*

G.G. Naumis

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México,
Apartado Postal 20-364, 01000 México, Distrito Federal, México.*

e-mail: naumis@fisica.unam.mx

Recibido el 6 de junio de 2006; aceptado el 9 de marzo de 2007

El presente trabajo ofrece una introducción didáctica al problema de la sincronización y simpatía entre sistemas dinámicos, que es abundante en diferentes ramas de la física, la biología, la ingeniería y los sistemas sociales. Sistemas tan diversos como la sincronización de relojes, el ritmo de vida circadiano, la regularidad de algunas funciones vitales, el aumento de potencia de emisores independientes y muchos otros más, basan su comportamiento en el fenómeno de la sincronización, cuya esencia se encuentra en el ajuste de ritmos debido a una interacción. Nuestra presentación se basa en el hecho de que un mejor entendimiento del fenómeno se consigue revisando, con un enfoque adecuado, los fundamentos elementales de los procesos oscilatorios.

Descriptor: Sincronización; osciladores acoplados; dinámica no lineal.

In this work we present a didactic introduction to the synchronization and enrailling of dynamical systems. This phenomenon is widely encountered in physics, biology, engineering and social phenomena. It is also the basis of phenomena such as the synchronization of clocks, rhythmic processes in physiology, lasers and many others that involve a slight coupling that produces an adjustment of rhythms. Our presentation takes into account that a better understanding of the synchronization phenomenon is achieved through an adequately oriented review of the fundamentals of the basic oscillatory phenomena.

Keywords: Synchronization; coupled oscillators; nonlinear dynamics.

PACS: 05.45.Xt; 05.45.-a

1. Introducción

En 1673 Christiaan Huygens (1629-1695), mientras permanecía en cama por efectos de una enfermedad, observó que un par de péndulos, colgados de un soporte común, se sincronizaban, es decir, después de un tiempo de iniciado sus movimientos, éstos alcanzaban un estado en que se movían establemente en direcciones opuestas “*con una sincronía tal que no se observaba el menor retraso de uno con respecto al otro y el sonido de los péndulos siempre se escuchaba simultáneamente. Aún más, si esta concordancia se perturbaba por alguna interferencia, sola se restablecía después de un tiempo corto*” [1, 2]. Hasta donde sabemos, éste fue el primer reporte del fenómeno de la sincronización. El mismo Huygens usó la palabra “simpatía” (*sympathy*) para describir este fenómeno que, ahora es sabido, tiene su origen en la no linealidad de los componentes de un sistema. La simpatía explica fenómenos dinámicos muy importantes, que van desde la sincronización de relojes, o el ritmo de vida controlada por el día y la noche, hasta la regularidad de algunas funciones vitales, pasando por problemas de interés tecnológico como el aumento de la potencia de emisores independientes [3].

En este trabajo ofrecemos una aproximación didáctica al problema de la sincronización o simpatía entre sistemas

dinámicos, partiendo de la hipótesis de que obtenemos una mejor comprensión del fenómeno si se revisan, con un enfoque adecuado, los fundamentos elementales de los procesos oscilatorios. Una vez hecha esta disgregación, orientamos nuestra presentación a la importancia de algunos elementos no lineales, como componentes esenciales para lograr un régimen autosostenido en un sistema dinámico, y que permiten la adaptación de un sistema a condiciones impuestas externamente. Una vez comprendidos los sistemas oscilatorios estabilizables es importante discutir la interacción entre ellos. La armonía y la simpatía entre sistemas se explican como procesos dinámicos que surgen de esta interacción. La armonía, considerada sinónimo de sincronía, se presenta como el estado dinámico del sistema en que las variables que definen su oscilación (amplitud y fase) presentan una correlación estable, independientemente del mecanismo que lo consigue. En general, dichos mecanismos corresponden a interacciones fuertes. Para terminar, presentamos el concepto de simpatía como sinónimo de encarrilar; definido también como el establecimiento de algún tipo de correlación de las variables dinámica. En este caso la interacción entre las componentes del sistema es débil, por lo que el acoplamiento requiere del ajuste paulatino de los modos dinámicos de cada componente. Es importante mencionar que el criterio para defi-

nir cuándo una interacción es débil está lejos de ser un tema simple. En el caso de láseres, por ejemplo, se puede establecer un criterio experimental bien definido: bajo interacciones débiles hay amarre de modos (*mode locking*) y bajo interacciones fuertes hay latido (*beating*). En sistemas mecánicos o biológicos, sin embargo, éste no es un asunto trivial y es un tema interesante. En la Tabla I presentamos un resumen de los términos antes mencionados.

Para recapitular, diremos que las características que identifican la simpatía entre sistemas dinámicos son:

1. Los sistemas oscilatorios son autosostenidos con un ritmo propio, cuyas características dependen de los parámetros del sistema.
2. Las interacciones entre los sistemas que presentan simpatía entre sí son débiles.
3. La simpatía se presenta sólo en regiones específicas de los parámetros del sistema compuesto.
4. La correlación entre las variables dinámicas de los sistemas que simpatizan obedece a mecanismos en que la variación lenta de uno de ellos puede ser seguida por el otro.

2. Osciladores lineales

En esta sección presentamos un enfoque práctico y conceptual de los fenómenos oscilatorios en un régimen lineal. Se hace énfasis en los circuitos eléctricos por su generalidad, en el sentido que no sólo incluyen todas las posibilidades de los péndulos y resortes sino que además nos permiten la libertad de reproducir situaciones que no son reproducibles con sistemas mecánicos.

Nuestra primera aproximación a las oscilaciones es el columpio y, de hecho, no hay nada más que saber, acerca del

patrón de oscilaciones, que no se pueda aprender con un poco de curiosidad y observación en un parque de juegos. Lo interesante es que este patrón de oscilaciones es común a muchas otras situaciones.

La conservación de la energía puede explicar el comportamiento oscilatorio de un columpio y de muchos otros sistemas oscilatorios. En el caso de una persona que se columpia, la energía potencial es proporcional a la altura que alcanza sobre el suelo la persona que se mece, y su energía cinética es proporcional al cuadrado de su velocidad; si el columpio se encuentra bien lubricado y sin fricción con el aire, la suma de ambas expresiones, es decir, su energía total, se mantiene constante durante el movimiento. Si una decrece, la otra aumenta en la misma medida, pero la suma permanece constante. En un planteamiento más realista, se puede remover energía si la persona arrastra los pies al pasar cerca del piso o por fricción en el mecanismo que sostiene el columpio; también se puede agregar energía si alguien nos asiste empujando el columpio en el momento adecuado, o bien, si la persona cambia de postura de una manera apropiada mientras recorre el ciclo del columpio. Si tanto la remoción de energía como su alimentación se compensan, el columpio permanecerá oscilando, tal vez de una manera ligeramente más complicada que la considerada inicialmente, pero los parámetros del movimiento no cambiarán significativamente a menos que se emplee un mecanismo que alimente o extraiga energía en grandes cantidades (comparadas con los valores característicos del sistema) en tiempos pequeños comparados con el periodo de la oscilación. Un caso muy sutil para mantener las oscilaciones sin la inclusión de fuentes se discutirá en la Sec. 4 (péndulo paramétrico) y consiste en, con mucha pericia, cambiar de postura mientras recorremos el ciclo del columpio. Al cambiar de postura cambiamos el centro de gravedad y es como si cambiáramos la longitud del péndulo.

TABLA I. Resumen de términos; en la armonía el estado inicial de un sistema auto sostenido esta definido por la frecuencia ν y la fase ϕ_1 , otro sistema no autosostenido no define una oscilación de manera independiente. Al alcanzar la sincronía, el sistema autosostenido no cambia sus variables de frecuencia ni fase, el otro sistema oscila a la frecuencia ν , con una fase ϕ_2 que puede o no ser igual a ϕ_1 . En la simpatía, pueden interactuar sistemas que difieren en la fase (caso a) y que al encarrilarse terminan en fase y esta puede ser igual o diferente a las iniciales. Pueden interactuar sistemas con diferente frecuencia y fase (caso b), que al encarrilarse terminan con la misma frecuencia pero en general con fases diferentes entre ellos.

Estado dinámico	Descripción	Condiciones dinámicas			
Armonía	Relación entre dos sistemas, uno es auto sostenido y el otro no.	Estado inicial autosostenido	Estado inicial no autosostenido	Estado final autosostenido	Estado final no autosostenido
	Armonía = sincronía.	$\nu\phi_1$	—	$\nu\phi_1$	$\nu\phi_2$
Simpatía	Relación entre dos sistemas, los dos son auto sostenidos.	Estado inicial 1	Estado inicial 2	Estado final 1	Estado final 2
	a)	$\nu_1\phi_1$	$\nu_1\phi_2$	$\nu_1\phi_f$	$\nu_1\phi_f$
	Simpatía = encarrilar.	b)	$\nu_1\phi_1$	$\nu_2\phi_2$	$\nu_3\phi_3$

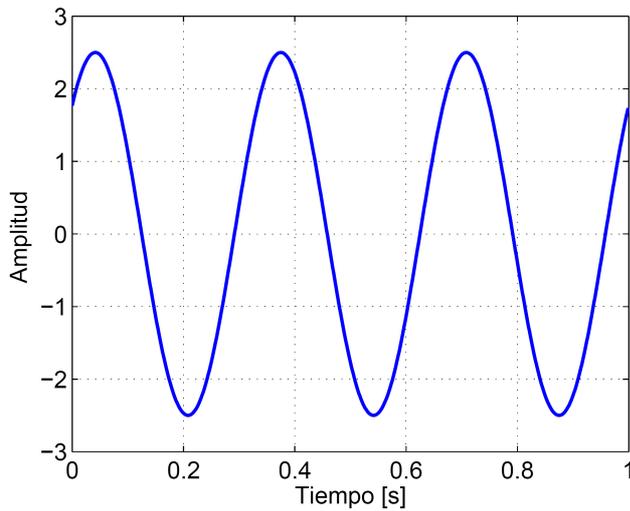


FIGURA 1. Gráfica de la ecuación (1) con $A_0 = 2.5$, $\nu_0 = 3$ Hz y $\phi = \pi/4$.

En otros sistemas oscilantes los argumentos generales expresados en el caso del colapso mantienen su validez; si tenemos cuidado de introducir tanta energía como extraemos, el sistema podrá mantenerse oscilando indefinidamente, sin importar los mecanismos de extracción y de alimentación de energía involucrados, ni el tipo de sistema bajo consideración. Las condiciones iniciales son indispensables para entender el estado particular de los procesos. Éstas se expresan, usualmente, en la forma de valores para las variables del sistema; en el ejemplo considerado, la altura inicial y la velocidad inicial del colapso.

En este trabajo deseamos analizar el comportamiento de sistemas oscilatorios acoplados, particularmente aquellos que presentan características no lineales. Sin embargo, para aclarar algunas ideas sobre ello, revisaremos primero algunas características de los sistemas lineales. Esto resulta ser muy importante si tomamos en cuenta que, con mucha frecuencia, los sistemas no lineales pueden ser aproximadamente descritos mediante el comportamiento típico de un sistema lineal, mediante un proceso conocido como linealización [4, 5].

La evolución de algunas variables dinámicas de los sistemas oscilatorios simples, como por ejemplo la posición o la velocidad, se gobierna por la ecuación diferencial lineal

$$\ddot{f} + (2\pi\nu_0)^2 f = 0,$$

que tiene como solución a la función

$$f(t) = A_0 \text{sen}(2\pi\nu_0 t + \phi), \tag{1}$$

donde A_0 es la amplitud, en las unidades de la variable dinámica del sistema. $(2\pi\nu_0 t + \phi)$ es el ángulo de fase, donde ν_0 es la frecuencia [Hz], t es el tiempo [s] y ϕ es el ángulo inicial de la fase en radianes. En esta expresión, los términos correspondientes a la fase del sistema, se expresan en radianes, en donde un ángulo que describe una vuelta completa es de 2π radianes.

En la Fig. 1 se esquematiza la ecuación (1) y se indica, además de los parámetros mencionados, que el período (T)

es el inverso de la frecuencia. En la figura, $T = 1/3$ s y la gráfica dura 3 periodos.

2.1. Oscilador armónico

Una masa que cuelga de un resorte, un péndulo en pequeña oscilación, un circuito eléctrico con capacitores e inductores, vibraciones de un diapason, las cajas acústicas de Helmholtz, el movimiento de carga en un material para producir luz, un sistema de control, algunas reacciones químicas, el comportamiento de ciertas poblaciones, los sistemas financieros y muchos otros, son ejemplos de sistemas que presentan oscilaciones. Bajo condiciones realistas, el caso más simple de ellas muestra una tendencia a oscilar de una manera determinada que puede ser descrita por la función senoidal, con la particularidad de que en muchos casos su amplitud tiende a decrecer con el tiempo debido a la pérdida de energía debido a la fricción. Este tipo de comportamiento se modela por la ecuación diferencial

$$\ddot{f} + \alpha \dot{f} + (2\pi\nu_0)^2 f = 0,$$

que tiene como solución a

$$f(t) = A_0 e^{-\frac{\alpha t}{2}} \text{sen}\left(\sqrt{(2\pi\nu_0)^2 - (\alpha/2)^2} t + \phi\right),$$

donde α es un término de atenuación; $f(t)$ corresponde a una oscilación subamortiguada siempre que $2\pi\nu_0 > \alpha/2$. Fuera de este caso, el sistema deja de oscilar; el comportamiento de $f(t)$ se transforma en un decaimiento exponencial (Fig. 2a).

2.2. Oscilador forzado: resonancia

Los sistemas simples presentan una frecuencia natural de oscilación ν_0 , que se observa cuando el término disipativo es suficientemente pequeño. La amplitud de la oscilación disminuye en el tiempo debido a la pérdida de energía asociada con los mecanismos disipativos del sistema. La tendencia de estos sistemas a oscilar con su frecuencia natural también puede verse afectada por fuerzas externas que induzcan un movimiento diferente. El comportamiento de sistemas más complejos puede presentar más de una frecuencia natural de oscilación. El estado inicial del sistema, o las características de su evolución natural, determinan cuál de las frecuencias naturales se va a manifestar.

Un sistema oscilante puede ser perturbado por fuerzas de naturaleza muy variada o por cambios en el mismo sistema (Fig. 3). La respuesta del sistema a estas fuerzas es motivo de problemas específicos, como la evaluación de la energía que absorbe o disipa el sistema en función de los parámetros del agente perturbador, la caracterización de la respuesta en fase del sistema con respecto a las características oscilatorias de la fuerza aplicada, el cálculo de la absorción y de la refracción en sistemas ópticos, y otras. En general, en un sistema lineal la respuesta consiste en la suma de una componente transitoria, y una respuesta forzada estacionaria, que puede

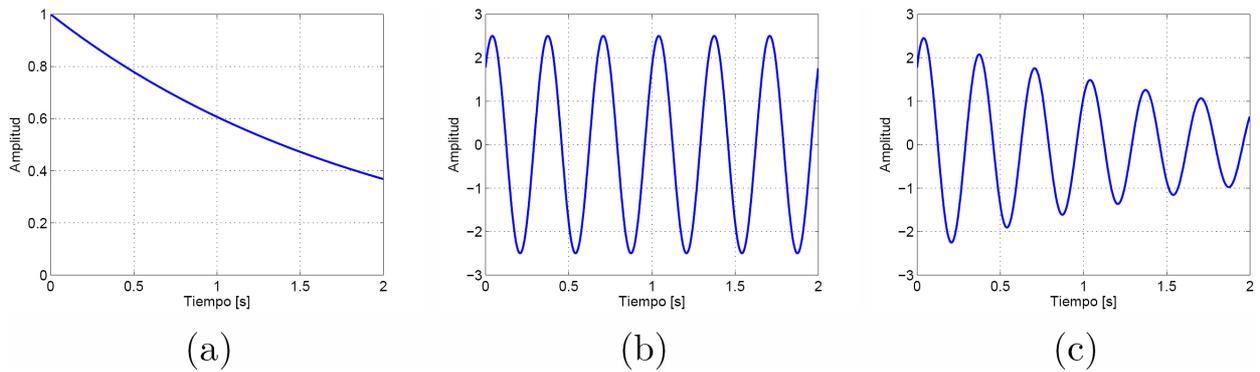


FIGURA 2. Oscilación de la Fig. 1 multiplicada por un exponencial de la forma $e^{-0.5t}$.

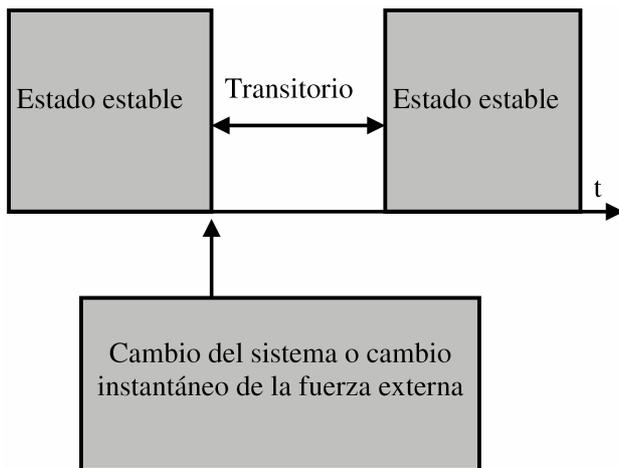


FIGURA 3. Transitorio de los sistemas.

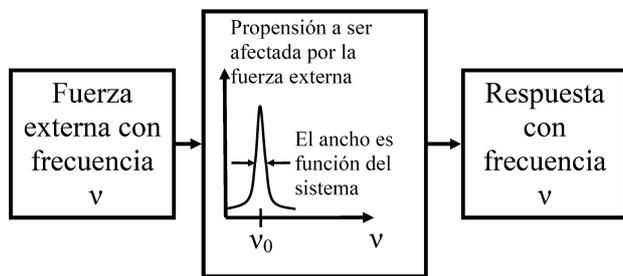


FIGURA 4. Resonancia de los sistemas.

presentar un factor de amplificación resonante. La respuesta transitoria se define como la componente amortiguada de la respuesta y se asocia con la transición entre un estado estacionario inicial y el estado final definido por las nuevas condiciones del sistema. Esta respuesta tiene asociado un tiempo característico requerido para que el sistema migre entre dichos estados, y es una característica propia del sistema. La respuesta forzada estacionaria corresponde a la componente de la respuesta del sistema que se estabiliza una vez que se atenúa la respuesta transitoria. Ésta refleja los mecanismos de adaptación y de acoplamiento del sistema a la fuerza externa aplicada, por lo que su estudio es muy útil para obtener información sobre el sistema o sobre los mecanismos de acoplamiento de éste con el agente forzante.

El conocimiento de la respuesta resonante de un sistema es muy útil para el estudio de materiales, sistemas electrónicos y para prever el comportamiento de las estructuras que diseña un ingeniero, como ilustra el colapso del puente Tacoma Narrows en 1940 debido a vibraciones inducidas por el viento [6], por mencionar algunos de los ejemplos más discutidos en el contexto de la física. Sin embargo, el reconocimiento de comportamientos oscilatorios en sistemas definidos en áreas ajenas a esta disciplina, han inducido el interés por el estudio de las respuestas resonantes bajo perspectivas más amplias. Actualmente se plantea la interrogante sobre los efectos que un estímulo periódico puede ocasionar sobre un organismo vivo, así como por los mecanismos generadores de una respuesta particular [7]; los economistas se cuestionan sobre el efecto de los ciclos económicos sobre áreas particulares de la actividad productiva [8], etc.

Los sistemas oscilatorios responden con mayor facilidad a los agentes que forzan oscilaciones a una frecuencia cercana a alguna de sus frecuencias naturales; las características del sistema determinan qué tan amplio es el intervalo de frecuencias en que la respuesta será extraordinaria, es decir, en que resonará (Fig. 4). Esta respuesta da información sobre la naturaleza del sistema o sobre la interacción entre el sistema y el agente causante de la resonancia. En los sólidos, por ejemplo, la absorción de energía luminosa o mecánica nos puede dar información sobre las características de sus enlaces moleculares [9]; en una región geográfica la respuesta local a un sismo puede informar sobre las características de su estructura geológica [10]; en una estructura arquitectónica la inducción de oscilaciones por agentes naturales nos previene sobre el riesgo de construir sistemas con características resonantes que pueden provocar un comportamiento indeseable [11].

El estudio de la respuesta forzada estacionaria de un sistema puede abordarse bajo diversos esquemas (Fig. 5). Una aproximación directa consiste en representar las fuerzas y las variables dinámicas asociadas al sistema en el dominio del tiempo, es decir, como funciones reales dependientes del tiempo. En este caso la respuesta del sistema se da también mediante funciones reales del tiempo y de los parámetros del sistema. De manera complementaria se puede estudiar el comportamiento del sistema en el espacio de las frecuencias,

en cuyo caso la fuerza y las variables del sistema se representan en dicho espacio. En este caso es necesario contar con un esquema de transformación entre el espacio de las frecuencias y el espacio convencional del tiempo real. Este esquema proporciona la manera de pasar de una a otra representación y viceversa. En algunos casos es necesario emplear una representación de las cantidades relevantes en el plano complejo, y se requiere un cuidado especial para evitar manipulaciones equivocadas o interpretaciones erróneas en el uso de herramientas tales como los fasores, la transformada de Laplace o la transformada de Fourier entre otras.

Los detalles de la respuesta forzada en un sistema simple se pueden apreciar al estudiar la respuesta del sistema a una excitación senoidal de amplitud B_0 y frecuencia ν , es decir,

$$\ddot{f} + \alpha\dot{f} + (2\pi\nu_0)^2 f = B_0 \text{sen}(2\pi\nu t). \quad (2)$$

La componente estacionaria de la solución de esta ecuación, es decir, la forma de la solución cuando la respuesta transitoria ha desaparecido, se puede escribir como

$$f(t) = A \text{sen}(2\pi\nu t + \phi),$$

donde

$$A = \frac{B_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2}} \quad \text{y} \quad \phi = \arctan\left(\frac{\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

y $\omega = 2\pi\nu$. En estas expresiones el ángulo inicial de la fase ϕ es la diferencia de fase entre la respuesta y la fuerza aplicada; cuando es cero se dice que la respuesta y el agente forzante se encuentran en fase.

En la Fig. 6 podemos ver que la amplitud de la respuesta del sistema a la fuerza aplicada depende de la frecuencia de ésta última. En el ejemplo considerado, la región cercana a 5Hz, la frecuencia natural del sistema, muestra los cambios más notables. El ancho de esta región es resultado del valor

asignado a α . En este sistema, la energía absorbida por el sistema se iguala con la disipada por el elemento disipativo, caracterizado por el parámetro α . Cuando la frecuencia del agente forzante es igual a la frecuencia natural del sistema, la diferencia de fase entre ellos es de $\pi/2$. En general, dicha diferencia de fase varía desde cero hasta π , con variaciones para este valor más marcadas cerca de la región de la frecuencia natural.

2.3. Amplitud y fase: la transformada de Hilbert

Dado que los detalles de la amplitud y la fase de la respuesta de un sistema oscilatorio son los parámetros importantes que establecen el grado de perturbación del sistema, es conveniente introducir una operación que permite obtener esta información en cualquier caso. En general, tanto la amplitud como la fase pueden depender del tiempo, por lo que el comportamiento oscilatorio descrito por una expresión como la Ec. (3) puede presentar unos parámetros en un instante

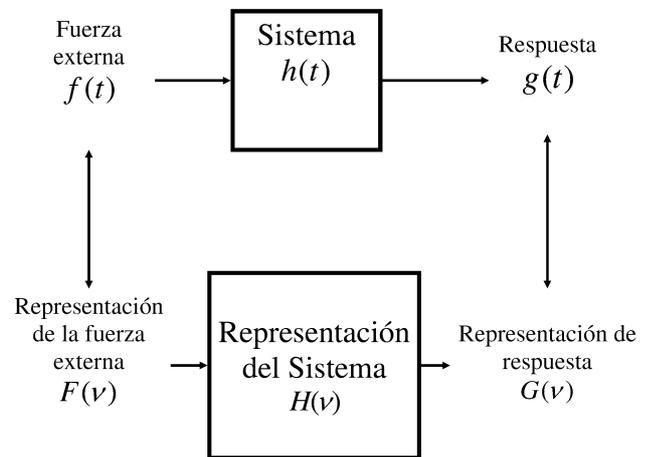
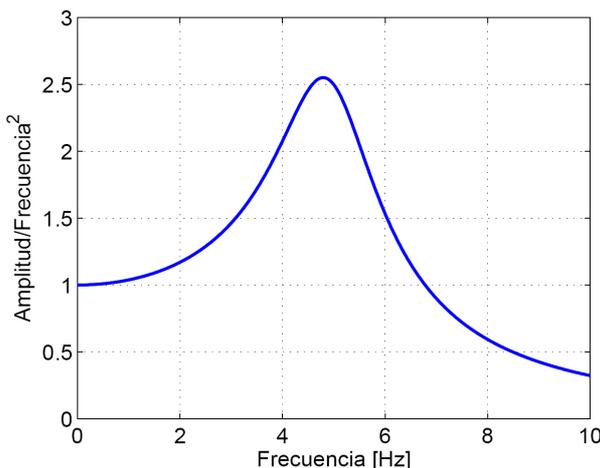
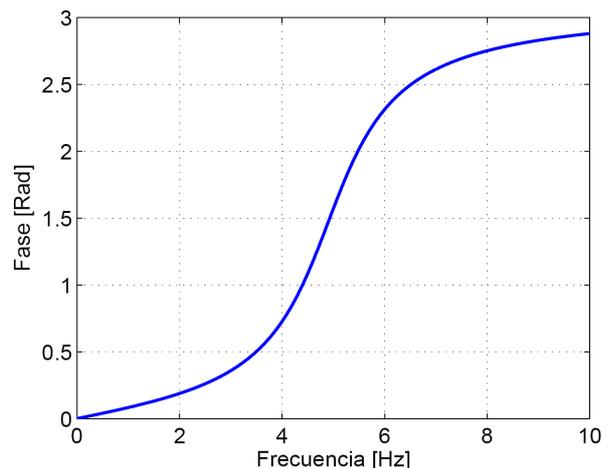


FIGURA 5. Esquema de la respuesta forzada estacionaria.



(a)



(b)

FIGURA 6. Gráfica de A y ϕ como función de la frecuencia, $\alpha = 2$ y $\nu_0 = 5$ que cumple la condición de subamortiguada.

dado y otros distintos un momento después. La Fig. 2 ilustra esta situación para una variable que oscila rápidamente mientras su amplitud cambia en el tiempo. En este caso se puede identificar una curva que define la amplitud de la señal en cada momento, y que recibe el nombre de envolvente de la oscilación rápida de la variable en cuestión. Si la señal tiene la siguiente forma:

$$s(t) = s_m(t) \cdot \cos(\omega t + \phi(t)), \quad (3)$$

entonces $s_m(t)$ es la envolvente de la oscilación. Un caso típico de envolvente variable en el tiempo lo son las transmisiones radiales mediante amplitud modulada o los sonidos producidos por instrumentos musicales, donde existe un tiempo de ataque, sostenimiento y decaimiento de la oscilación. La manipulación de $s_m(t)$ es fundamental en la síntesis artificial y modelado físico de instrumentos musicales [12].

Una de las herramientas más útiles para obtener la amplitud y el ángulo de fase instantáneos de una señal oscilatoria con fase y amplitud cambiantes, es la transformada de Hilbert. Dicha transformada se define para una función dada $s(t)$ como

$$\hat{s}(t) = H\{s(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Si la señal $s(t)$ tiene una envolvente $s_m(t)$ que modula una portadora senoidal,

$$\hat{s}(t) \approx s_m(t) \cdot \text{sen}[\omega t + \phi(t)],$$

entonces definimos la señal analítica $y(t)$ como

$$y = s(t) + j\hat{s}(t),$$

donde la parte real es la función temporal original y la parte imaginaria su transformada de Hilbertⁱ. Es sencillo ver que la magnitud de y corresponde a la envolvente de $s(t)$, y el ángulo polar de la variable compleja y corresponde a la fase instantánea. El cálculo de la envolvente y la fase se pueden realizar de manera muy sencilla usando paquetes de cómputo. Por ejemplo, en MATLAB, se tendría que

$$s_m(t) = \text{abs}(y),$$

$$\phi(t) = \text{unwrap}(\text{angle}(y)) - \omega t,$$

donde se ha empleado la función `abs` para la magnitud de la función analítica, y `unwrap` para determinar la fase de una función analítica. El comando `unwrap` permite que los ángulos se desdoblén continuamente, eliminando las discontinuidades que aparecen cuando el ángulo devuelto alcanza valores de múltiplos enteros de 2π (así, por ejemplo, el ángulo devuelto cuando una función ha dado tres vueltas al círculo es 6π en lugar de cero). En la fase de la función analítica se incluye un término de la fase instantánea (ωt) que es fácil de eliminar, ya que es lineal en el tiempo.

Al obtener la transformada de Hilbert mediante cálculos numéricos, se debe tener en cuenta que los extremos con

cambios extremadamente rápidos requieren atención especial. Fuera de esta sutileza, esta herramienta es muy poderosa para extraer la información requerida.

Como ejemplo veamos la manera en que un sistema oscilatorio simple llega a su estado estacionario. Consideremos un circuito RLC en paralelo con una fuente de corriente oscilante a una frecuencia (ω), siendo R el valor de la resistencia, L la inductancia y C la capacitancia. La Tabla II indica el comportamiento de cada elemento del sistema; en la columna del tiempo este comportamiento se da como una relación diferencial entre las variables dinámicas (ecuación fundamental del elemento eléctrico) para los elementos que componen el sistema, mientras que en la columna de la frecuencia se presenta la misma relación transformada al espacio de las frecuencias empleando los llamados fasores [13]. Un fasor es, simplemente, un vector en dos dimensiones. En notación polar, la magnitud del vector puede representar la amplitud del voltaje, o de la corriente, y su dirección determina el ángulo de fase respecto a la señal de referencia cuyo ángulo de fase es conocido. Dada la equivalencia entre números complejos y vectores en dos dimensiones, es claro entonces que los fasores pueden representarse como números complejos. Los fasores son utilizados generalmente para indicar variables que cambian en el tiempo, la impedancia \mathbf{Z} de cada elemento eléctrico lineal, se representa por variables complejas que indican una especie de "resistencia dinámica". La impedancia de un inductor se obtiene mediante una transformación en frecuencia, por ejemplo, si tomamos la ecuación diferencial del elemento inductor y le aplicamos la transformada de Fourier, se tiene que

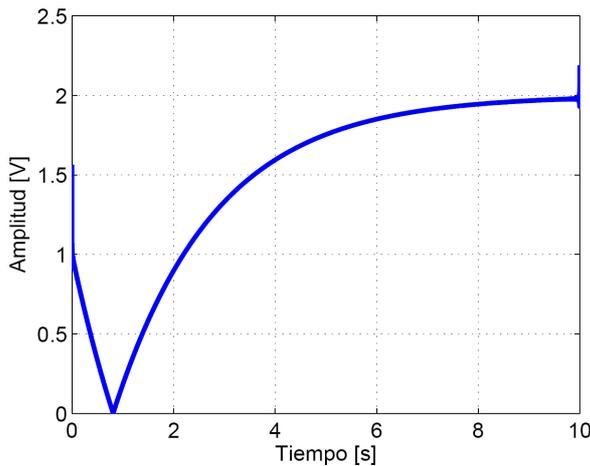
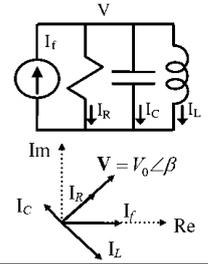
$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} V(t)e^{-j\omega t} dt = L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dI(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt \\ &= j\omega L \mathbf{I}(\omega), \end{aligned}$$

donde j es el número imaginario y $\mathbf{I}(\omega)$ es la transformada de Fourier de la corriente. Si definimos $\mathbf{Z}_L \equiv j\omega L$, tendremos una ecuación en el espacio de frecuencias $\mathbf{V}(\omega) = \mathbf{Z}_L \mathbf{I}(\omega)$ análoga a la ecuación de Ohm en el espacio real, sólo que esta vez la resistencia es un número complejo. Dado que los elementos están conectados en paralelo, es sencillo demostrar que la ecuación diferencial del circuito en tiempo real puede escribirse en el espacio de frecuencias como $\mathbf{V}(\omega) = \mathbf{Z}_T \mathbf{I}(\omega)$, donde \mathbf{Z}_T es la impedancia total, en este caso dada por la suma de los inversos de las impedancias de los elementos: $1/\mathbf{Z}_T = 1/\mathbf{Z}_R + 1/\mathbf{Z}_C + 1/\mathbf{Z}_L$, tal y como se haría en un circuito con tres resistencias conectadas en paralelo. Notemos que la fase entre corriente y voltaje se obtiene mediante el ángulo polar de \mathbf{Z}_T en el plano complejo, $\beta \equiv \arctan(\text{Im}(\mathbf{Z}_T)/\text{Re}(\mathbf{Z}_T))$.

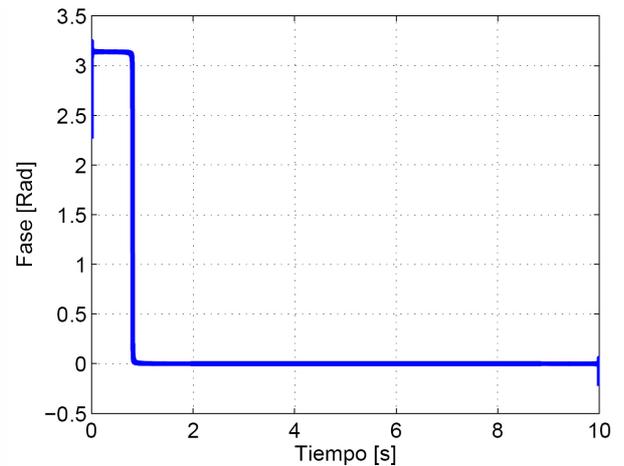
En el recuadro central se muestra la ecuación para las variables dinámicas del sistema en sus dos representaciones: tiempo y frecuencia, mientras que en el de la derecha se ilustra la representación gráfica en el plano complejo de las expresiones transformadas.

TABLA II. Elementos de un circuito RLC.

Elementos de circuito RLC, R, L, C , y ω son constantes positivas			
	Tiempo		Frecuencia
Resistor	$V = RI$		$Z_R = R$
Capacitor	$I = C \frac{dV}{dt}$		$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$
Inductor	$V = L \frac{dI}{dT}$		$Z_L = j\omega L$
Fuente	$I_f = B_0 \sin(2\pi\nu t)$		$I_f = B_0 \angle 0$



(a)



(b)

FIGURA 7. Envolvente y ángulo inicial de la fase para el voltaje del circuito RLC en paralelo. $R = 1/L = 1/C = 1000$, $V(0) = -1$ [V] y $I_f = 2 \times 10^{-3} \text{sen}(\omega t)$ [A]. La evolución de la oscilación requiere mover el ángulo inicial de la fase π radianes y la amplitud disminuye a cero por un instante para después alcanzar el estado estacionario.

La Tabla II indica las cuatro variables dinámicas para los elementos del sistema: el voltaje (igual para los cuatro elementos), las corrientes del resistor, del inductor y del capacitor. La representación gráfica de estas variables se puede usar para determinar las amplitudes y los ángulos de fase de las variables eléctricas. La corriente en el resistor siempre tiene la misma fase que el voltaje del circuito, mientras que está $\pi/2$ radianes adelantada en el capacitor y $\pi/2$ radianes retrasada en el inductor. El voltaje del circuito está en fase con la corriente de la fuente sólo cuando la corriente del inductor es la misma que la corriente del capacitor, ya que la impedancia total Z_T deberá ser un número real (*i.e.*, el fasor no tiene componente en y), y por otra parte, la parte imaginaria de Z_T es

$$\text{Im}(1/Z_T) = \text{Im}(1/Z_R + 1/Z_C + 1/Z_L) = j\omega(C - L).$$

El caso $\text{Im}Z_T = 0$ es completamente equivalente a la condición de resonancia. En otras condiciones, dicha relación de fase depende del valor de los parámetros del sistema y de la

frecuencia,

$$\beta = \arctan\left(\frac{\omega(C - L)}{R}\right).$$

A muy bajas frecuencias, la corriente del inductor domina el comportamiento del sistema y β es negativa. A muy altas frecuencias, es el capacitor el que consume prácticamente toda la corriente de la fuente y β es positiva.

En la condición de resonancia, la corriente que sale del inductor es consumida en su totalidad por el capacitor y viceversa, la frecuencia de la fuente se relaciona con los valores de L y de C mediante la expresión $\omega^2 = 1/LC$. En este caso el resistor consume íntegramente la corriente de la fuente, el voltaje del circuito coincide con el del resistor y su fase es iguala con la de la fuente.

En la Fig. 7 se presenta un caso particular de la evolución del sistema, empleando la transformada de Hilbert para extraer la amplitud y la fase del voltaje en el circuito utilizando MATLAB. En el caso representado se considera una diferencia de fase inicial de π entre dicho voltaje y la corriente que

circula por el circuito. El análisis de las gráficas presentadas indica que la sincronía entre estas variables se da como resultado de la pérdida de medio ciclo de la oscilación al pasar por el cero de amplitud. Aparentemente, en este momento, la fuente establece un dominio sobre el circuito que le permite imponer su fase. Este comportamiento cualitativo se repite sin importar las condiciones iniciales, ni la frecuencia natural del sistema. En el caso de que la frecuencia de la fuente sea diferente de la frecuencia natural, el ángulo de fase y la amplitud final toman valores relativos diferentes como se indica en la Fig. 6b.

2.4. Espacio fase y figuras de Lissajous

La visualización de la dinámica de los sistemas se puede apreciar con ayuda de las figuras de Lissajous o, más formalmente, mediante la trayectoria seguida por el sistema en el espacio fase. Las figuras de Lissajous surgen de graficar en los ejes cartesianos a dos variables que cambian en el tiempo. En sistemas oscilatorios como el descrito en la sección anterior, en el eje horizontal se puede graficar a la función del agente forzante (la corriente de la fuente) y en el eje vertical la variable que representa la respuesta del sistema (el voltaje del circuito). En el caso ejemplificado en la Fig. 7, para el cual la frecuencia de la fuente es la misma que la frecuencia

natural del sistema, y en el que se impuso una condición inicial para el ángulo de fase de π radianes. El trazo temporal de la Fig. 8, oscilograma, no permite ver la información de la fase, solo la amplitud. Las figuras de Lissajous de los insertos permiten ver los detalles de las fases para tiempos especificados por las flechas. Las figuras de Lissajous recorren en el tiempo una trayectoria que inicia como un segmento de recta en el segundo y el cuarto cuadrante y termina como otro segmento recto entre el primer y tercer cuadrante, pasando por un estado representado por el cero del plano cartesiano. La evolución del sistema en el tiempo corresponde a un segmento de recta que gira en el sentido contrario de las manecillas del reloj, cuya longitud cambia de un valor inicial a su valor final de estabilidad, pasando por su transformación en un punto, el origen de coordenadas en el espacio fase, en un momento determinado.

En el caso de que la fuente tenga una frecuencia diferente de la frecuencia natural del oscilador, la trayectoria del sistema no termina como un segmento de recta, sino como una elipse cuya orientación describe una evolución similar al caso mencionado (ver Fig. 9). En este caso, sin embargo, la trayectoria del sistema nunca se deforma en un punto, aunque el semieje mayor de la elipse si pasa por un valor mínimo en el momento en que este cambia de cuadrante.

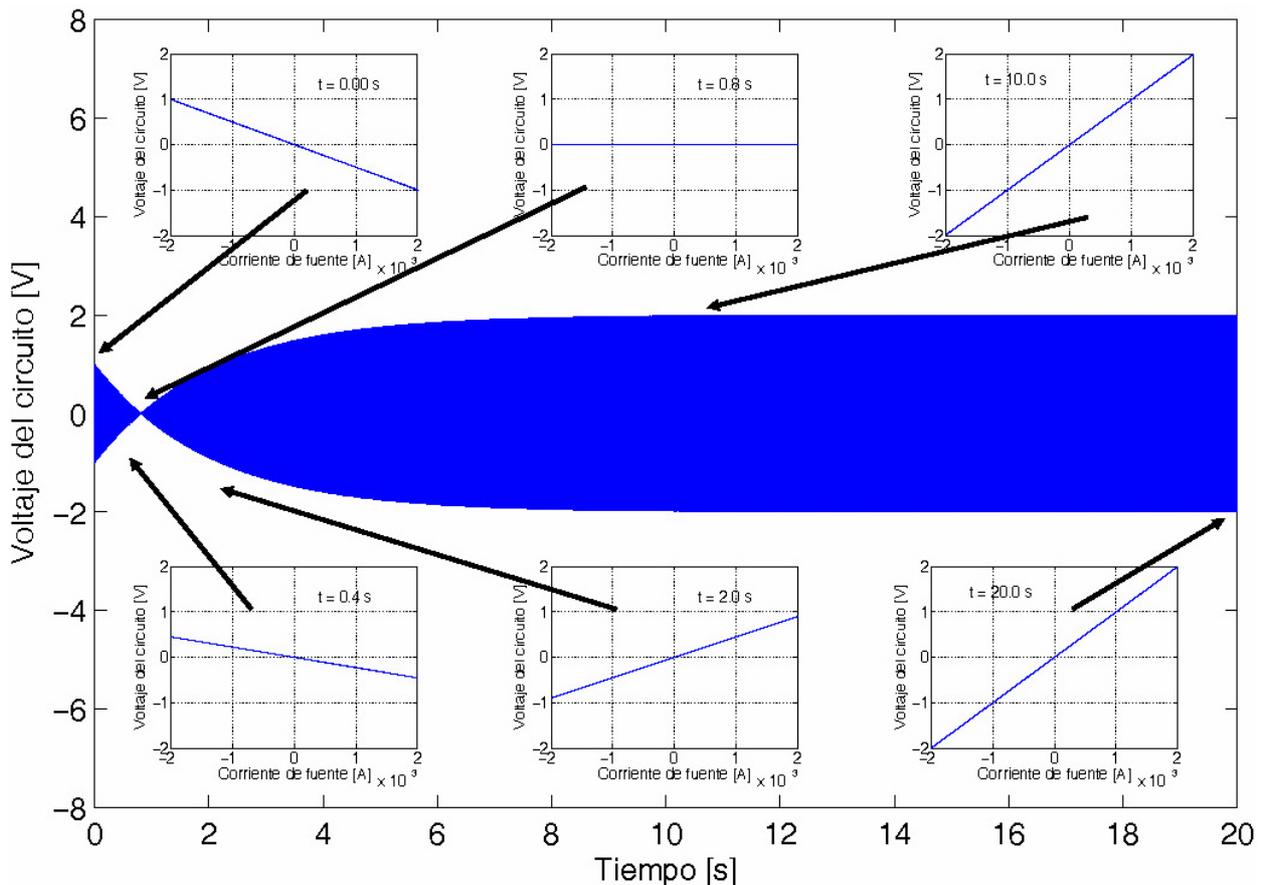


FIGURA 8. Figura de lissajous para el ejemplo mostrado en la Fig. 7. El trazo temporal cambia tan rápido que sólo se aprecia una región continua y resulta útil sólo para apreciar la amplitud. Las figuras de lissajous de los insertos permiten ver los detalles de las fases para los tiempos especificados por las flechas.

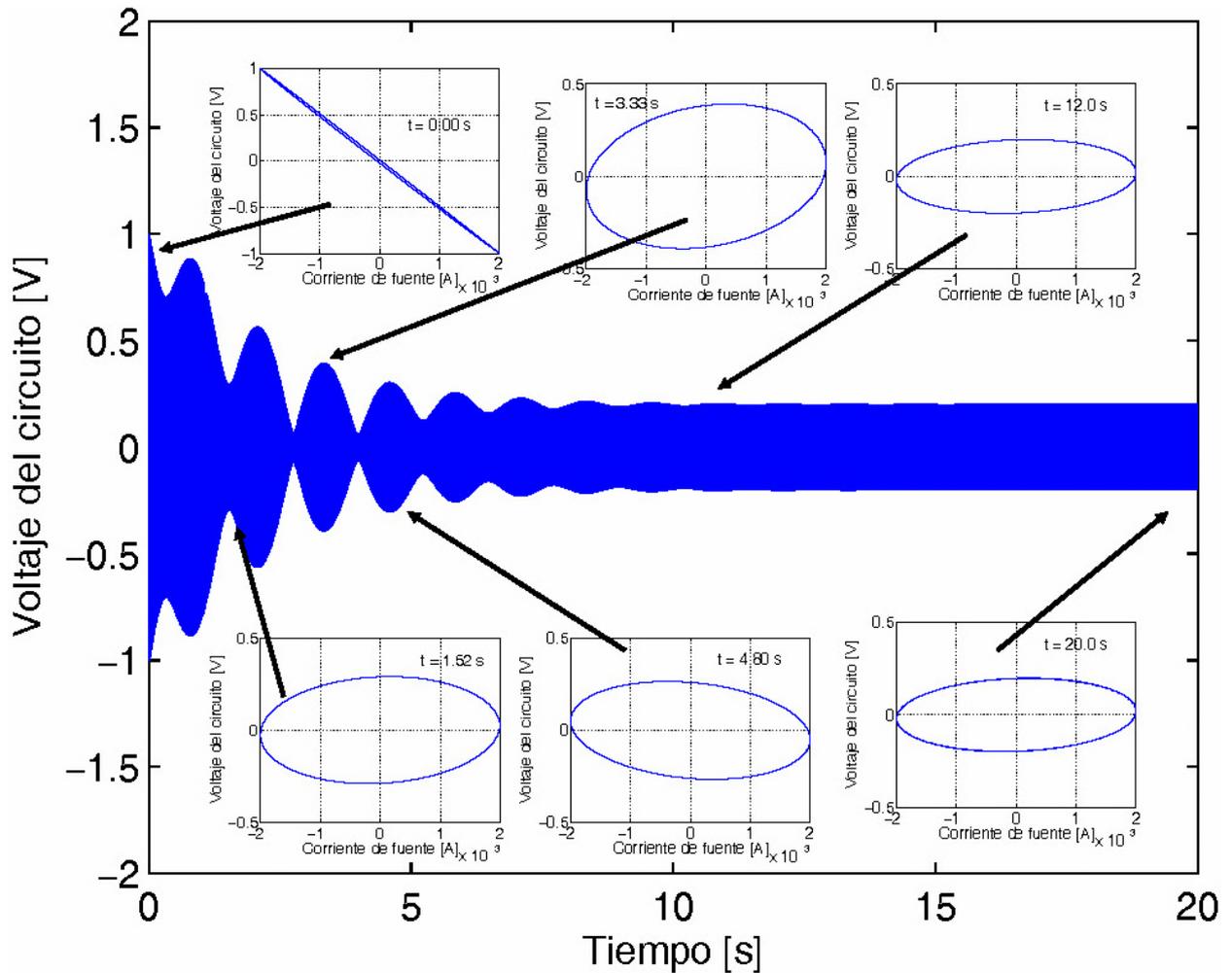


FIGURA 9. Trazo temporal rápido y figuras de Lissajous para el ejemplo mostrado en la Fig. 7 modificado aquí con una fuente de frecuencia diferente a la frecuencia natural del oscilador.

El espacio fase de un sistema dinámico simple se construye representando en un eje a la variable espacial x y en el otro a la derivada de esta variableⁱⁱ. En el caso de un péndulo lineal, el espacio fase se construye al asignar el ángulo θ con un eje y su derivada $d\theta/dt$ con el otro; el péndulo sin amortiguamiento con amplitud pequeña describe una trayectoria elíptica, y si se introduce amortiguamiento describe una espiral que se acerca asintóticamente al origen de coordenadas, su atractor [5]. Para un circuito eléctrico RLC en paralelo sin fuente, se emplea el voltaje del circuito y la corriente del inductor que es proporcional a la derivada del voltaje. La evolución del sistema presenta las mismas características que el péndulo.

3. Acoplamiento de dos osciladores

Una vez discutidos los sistemas oscilatorios, el paso siguiente es discutir la interacción entre ellos. La armonía y la simpatía entre sistemas se explican como procesos dinámicos que surgen de esta interacción.

Consideremos el caso de dos sistemas oscilatorios acoplados, estos pueden ser, por ejemplo, dos péndulos sujetos al

mismo soporte o dos circuitos RLC interconectados mediante un resistor. De manera específica, consideremos el segundo caso (Fig. 10). El sistema de ecuaciones correspondiente, escritas para las variables de estado V e I , es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{fuente1}} - \frac{V_1}{R_1} - I_{L_1} - \frac{V_1 - V_2}{R_3} &= C_1 \frac{dV_1}{dt}, \\
 I_{\text{fuente2}} - \frac{V_2}{R_2} - I_{L_2} - \frac{V_2 - V_1}{R_3} &= C_2 \frac{dV_2}{dt}, \\
 \frac{V_1}{L_1} &= \frac{dI_{L_1}}{dt}, \\
 \frac{V_2}{L_2} &= \frac{dI_{L_2}}{dt}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Antes de enfrentar este sistema de ecuaciones para obtener la solución general, en muchos problemas es prudente proponer que los voltajes instantáneos se representen por las siguientes funciones:

$$\hat{V}_1 = V_1 e^{i\phi_1} e^{i\omega_x t}, \quad \hat{V}_2 = V_2 e^{i\phi_2} e^{i\omega_x t},$$

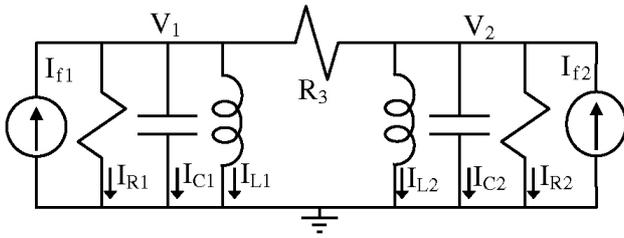


FIGURA 10. Dos circuitos RLC acoplados mediante un resistor.

donde V_1 y V_2 se pueden considerar envolventes de la señal $e^{i\omega_x t}$ de frecuencia ω_x que actúa como portadora, y ϕ_1 y ϕ_2 son las fases instantáneas correspondientes.

Si suponemos que las envolventes y las fases son funciones temporales que cambian lentamente y que la portadora tiene un cambio temporal relativamente grande, se puede obtener la ecuación para el inductor de manera aproximada integrando dos veces por partes:

$$\begin{aligned} I_L &= \int \hat{V} dt = \int V e^{i\phi} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{V e^{i\phi} e^{i\omega t}}{i\omega} - \int \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \frac{d(V e^{i\phi})}{dt} dt \\ &= -i \frac{V e^{i\phi} e^{i\omega t}}{\omega} + \frac{i}{\omega} \left[\frac{d(V e^{i\phi})}{dt} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} + \int \frac{d^2(V e^{i\phi})}{dt^2} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} dt \right] \\ &\approx -i \frac{V e^{i\phi} e^{i\omega t}}{\omega} + \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2} \frac{d(V e^{i\phi})}{dt}. \end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\begin{aligned} \frac{d(V e^{i\phi})}{dt} &= \dot{V} e^{i\phi} + iV \dot{\phi} e^{i\phi}, \\ \frac{d(V e^{i\phi} e^{i\omega t})}{dt} &= \dot{V} e^{i\phi} e^{i\omega t} + iV \dot{\phi} e^{i\phi} e^{i\omega t} + i\omega V e^{i\phi} e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Si sustituimos todo esto en las Ecs. (4), escritas para las variables V_1 y V_2 , y separando las partes real e imaginaria se obtiene que

$$\begin{aligned} 2\dot{V}_1 + \left(\frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_3} \right) V_1 &= \frac{V_2}{C_1 R_3} \cos(\phi_2 - \phi_1), \\ 2\dot{V}_2 + \left(\frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_2 R_3} \right) V_2 &= \frac{V_1}{C_2 R_3} \cos(\phi_1 - \phi_2), \\ 2V_1 \dot{\phi}_1 + (\omega_x - 1) V_1 &= \frac{V_2}{C_1 R_3} \cos(\phi_2 - \phi_1), \\ 2V_2 \dot{\phi}_2 + (\omega_x - 1) V_2 &= \frac{V_1}{C_2 R_3} \cos(\phi_1 - \phi_2), \end{aligned} \quad (5)$$

donde

$$\omega_x^2 = \frac{L_1 + L_2}{(C_1 + C_2)L_1 L_2}.$$

Las frecuencias de los dos osciladores independientes son

$$\omega_1^2 = \frac{1}{C_1 L_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{C_2 L_2},$$

y en la ecuación anterior se tomó en cuenta que ω_1 es muy cercana a ω_2 y ω_x , de manera que $\omega_1/\omega_x \approx 1$ y $\omega_2/\omega_x \approx 1$.

El propósito de este ejercicio, además de mostrar las bondades de la suposición de que la respuesta se puede describir por medio de una portadora rápida y de una envolvente lenta, es llamar la atención sobre el comportamiento dinámico de los dos péndulos. La presencia del resistor que permite acoplar las variables eléctricas es un medio que permite desplazar la energía de un oscilador al otro de manera mutua. La analogía es completa con dos péndulos oscilando en el mismo plano y sujetos a una sola viga, donde se intercambia la energía.

En la Fig. 11 los trazos negros corresponden a dos osciladores con la misma frecuencia natural $\omega_1/\omega_2 = 1$ y con una razón entre las amplitudes se fijó igual a 2. Ambos sistemas empezaron a oscilar fuera de fase y, por el acoplamiento entre ellos, terminaron en fase. Como tienen la misma frecuencia natural, no se extrae energía del sistema al alcanzar su estado estacionario. Dos casos adicionales están ilustrados en esa misma figura, $\omega_1/\omega_2 = 1.0025$ y $\omega_1/\omega_2 = 1.005$. Conforme esta razón entre frecuencias se incrementa, la diferencia de fase también se incrementa y, además, la amplitud decae con el tiempo más rápidamente, disipando eventualmente toda su energía por el acoplamiento entre ellos. Es importante observar que antes de que la energía se disipe por completo, el comportamiento observado es semejante a la simpatía entre sistemas. Si la diferencia de frecuencias naturales es mayor, la simpatía no se manifiesta y la disipación de energía es muy rápida.

Es interesante notar que, como ocurre en el caso de un sólo oscilador, los cambios acelerados de fase se presentan cuando el oscilador correspondiente presenta una baja amplitud. En la Fig. 11, para cuando las frecuencias son iguales, se puede ver que la amplitud de ambos osciladores decrece rápidamente hasta que uno de ellos alcanza el cero de amplitud, después de este momento la amplitud del oscilador que ha llegado al cero crece a expensas del otro, estabilizándose posteriormente ambos con la misma amplitud.

Cuando las frecuencias naturales de ambos osciladores coinciden, ambos permanecen oscilando sin pérdidas en su ciclo natural. Sin embargo, cuando sus frecuencias naturales no coinciden, el sistema pierde su energía irremediablemente sin lograr que la frecuencia sea la misma para los dos sistemas. La Fig. 12 muestra esto con mayor claridad, aquí $\omega_1/\omega_2 = 1.005$ y se ha definido una menor transferencia de energía entre los dos sistemas. La amplitud de los dos sistemas decae a cero rápidamente, y la fase instantánea esta cambiando en el tiempo sin mostrar indicios de estabilizarse. En estos sistemas acoplados de osciladores no autosostenidos, un comportamiento similar a la armonía se da cuando la frecuencia natural de ambos sistemas es igual y un comportamiento similar a la simpatía se da cuando la frecuencia natural es muy cercana entre ellos. En este último caso, la diferencia de frecuencias naturales de los sistemas acoplados que produce simpatía es una función de la fracción de energía que se acopla entre los sistemas. No se consigue armonía ni

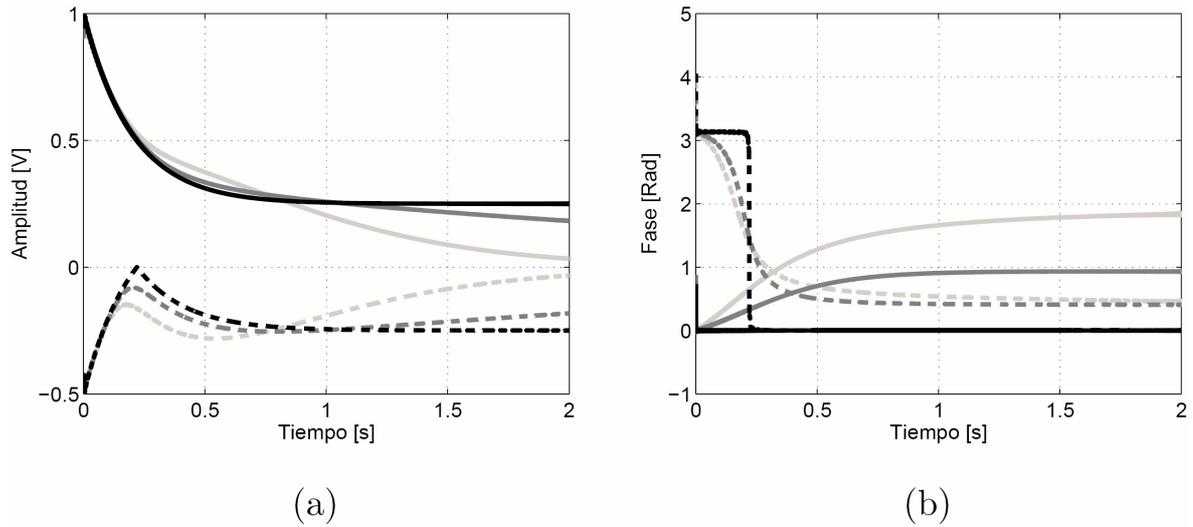


FIGURA 11. Resultados del sistema de ecuaciones (5) con la razón de frecuencia de los oscilador $\omega_1/\omega_2 = 1$, $\omega_1/\omega_2 = 1.0025$ y $\omega_1/\omega_2 = 1.005$ etiquetadas en negro, gris oscuro y gris claro respectivamente. Las líneas continuas corresponden a los valores para un oscilador y las líneas segmentadas corresponden al otro. A la izquierda aparecen las envolventes y a la derecha aparecen las fases para ambos sistemas oscilatorios. Es interesante notar que los osciladores empezaron π radianes fuera de fase y terminan en fase, cuando las frecuencias son iguales. Cuando las frecuencias son diferentes, la amplitud irremediamente cae a cero, pero terminan con una diferencia de fase finita.

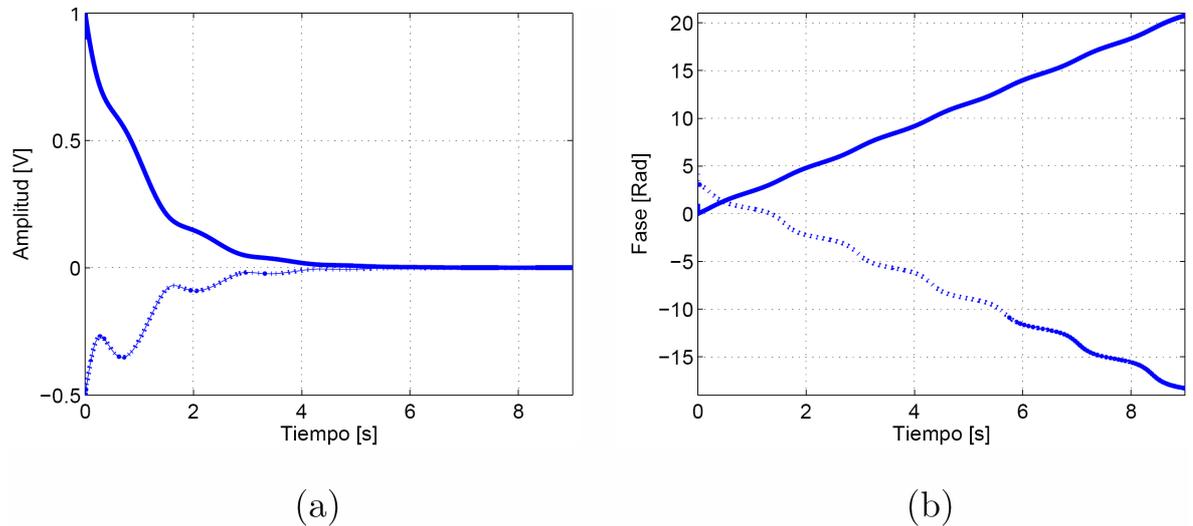


FIGURA 12. Resultados del sistema de ecuaciones (5) con $\omega_1/\omega_2 = 1.005$. Este caso corresponde a una modificación del resistor de acoplamiento del tercer caso de la Fig. 11 para visualizar el efecto. Se resolvió un intervalo de tiempo de 9 segundos y se muestran las envolventes (izquierda) y las fases (derecha) para los dos osciladores. Es interesante notar cómo los osciladores empezaron π radianes fuera de fase y al transcurrir el tiempo suficiente, ambos osciladores pierden su energía sin alcanzar a ajustar sus frecuencias.

simpatía si la diferencia de frecuencias naturales es muy grande. Una manera simple de observar estos efectos, consiste en realizar experimentos con dos metrónomos sobre una tabla. La frecuencia natural de los metrónomos se puede variar de manera muy simple moviendo unos pesos situados sobre el péndulo [14].

4. Osciladores no lineales y simpatía

Todos los sistemas oscilatorios de los que hemos hablado se pueden representar por medio de ecuaciones diferenciales li-

neales, con coeficientes constantes, de la forma (2). En ellos la disipación de energía aumenta con la amplitud de la oscilación, de tal manera que, como se aprecia en la Fig. 13, se observa una disminución en la amplitud de su oscilación al evolucionar (excepto cuando la magnitud del término disipativo, controlada por el parámetro α en la Ec. (2) es cero). Cuando α es diferente de cero, la oscilación se puede mantener sólo con ayuda de una fuerza externa, pero en este caso el sistema tiende a sincronizarse con la fuerza de excitación, que en un régimen estable, aporta una energía idéntica a la disipada en cada ciclo de oscilación.

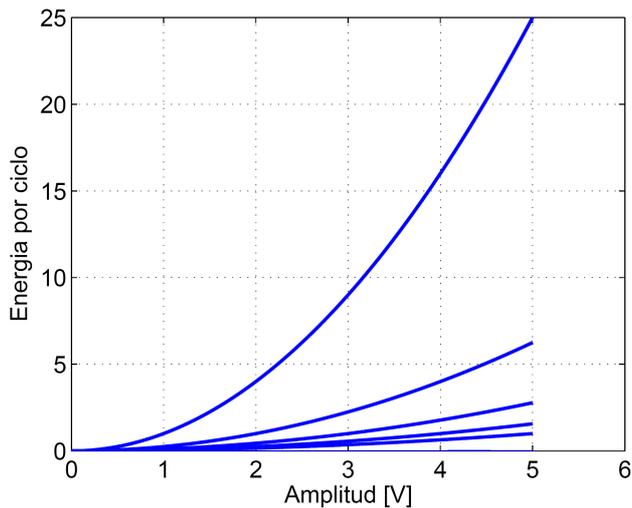


FIGURA 13. La energía extraída como función de α aumenta con la amplitud de la oscilación y solo se hace cero cuando α es cero.

Existen casos en la naturaleza en que los coeficientes α y ν_0 no son constantes o en que la función f es altamente no lineal en forma de impulsos. Estos últimos casos son menos frecuentes pero muy interesantes. A continuación se presentan, mediante sus ecuaciones de evolución dinámica, algunos modelos de dichos sistemas:

Péndulo no lineal (la frecuencia de oscilación disminuye al aumentar la amplitud):

$$\ddot{f} + \alpha \dot{f} + (2\pi\nu_0)^2 \sin f = 0.$$

Van der Pol (ecuación del tiristor, el sistema tiende a la misma solución estable):

$$\ddot{f} + \alpha(f^2 - 1)\dot{f} + (2\pi\nu_0)^2 f = 0.$$

Ecuación de Mathieu (oscilador paramétrico):

$$\ddot{f} + \alpha \dot{f} + \left[(2\pi\nu_0)^2 + B_1 \sin(2\pi\nu t) \right] f = 0.$$

A diferencia de la primer ecuación, las dos últimas se caracterizan porque conducen a oscilaciones autosostenidas, lo que implica que son sistemas activos en el sentido de que si son aislados o perturbados, después de un estado transiente continuarán oscilando con período y fase definido de manera única por las características del sistema. Esto se consigue debido a que el sistema incluye una fuente interna de energía que compensa la que se pierde por disipación. Así por ejemplo, si las características del sistema inducen un estado estable con una cierta amplitud de oscilación A_0 , las oscilaciones con amplitudes mayores a ésta se caracterizan por tener una pérdida neta de energía, produciéndose una disminución de la amplitud de la oscilación hasta reducirse al valor de A_0 . Para amplitudes menores que A_0 , el sistema contiene una fuente interna de energía que hace crecer la amplitud de oscilación hasta llegar a A_0 . En el espacio fase, todo esto implica que el espacio fase el sistema sigue una trayectoria cerrada, llamada ciclo límite o atractor.

En el caso de la ecuación de van der Pol, el auto-sostenimiento es afortunado ya que la no-linealidad en el término disipativo estabiliza la dinámica del sistema y lo lleva hacia el atractor. Para un sistema descrito por la ecuación de Mathieu, el caso $B_1 = 0$ corresponde a un oscilador amortiguado y resulta no ser autosostenido. Para el caso en que B_1 es diferente de cero, aún existe una gran región de la dinámica del sistema que produce oscilaciones no autosostenidas. También se encuentran regiones, conocidas como regiones de inestabilidad (el atractor está en infinito), y regiones en las que el término oscilatorio se comporta como una fuente externa que respeta la frecuencia natural del sistema y puede producir, además de estados dinámicos muy interesantes, oscilaciones autosostenidas.

4.1. Osciladores acoplados que no desaparecen en el tiempo, el caso de sistemas de van der Pol

Tenemos ahora al alcance de la mano el propósito de este artículo: ilustrar las características del acoplamiento entre dos sistemas oscilatorios autosostenidos que definen y determinan la simpatía dinámica entre éstos. El oscilador de van der Pol cumple la condición de ser autosostenido (su atractor cíclico es la trayectoria final en el espacio fase) y de tener un ritmo propio (su frecuencia natural). Nos interesa analizar el comportamiento dinámico de dos de estos osciladores acoplados.

En su representación eléctrica, un oscilador de van der Pol se construye con un capacitor, un inductor y un resistor no-lineal, conectados en paralelo. Dos de estos osciladores se pueden acoplar por medio de un resistor lineal que permite el intercambio de energía. Lo que observamos al analizar este sistema es que si los dos osciladores tienen la misma frecuencia natural ν_0 , intercambian energía para ajustar el ángulo de fase relativo a cero. Si los dos osciladores tienen frecuencias naturales diferentes (digamos ν_0^A y ν_0^B), la respuesta dinámica dependerá de esta diferencia. Cuando $\nu_0^A - \nu_0^B$ es pequeña, los osciladores adoptan una misma frecuencia intermedia, por el continuo intercambio de energía. Esta situación requiere que el oscilador alimentado en forma neta por la fuente, pueda transferir energía al otro, que normalmente queda subalimentado. En dicho estado, se establece una diferencia de fase fija diferente de cero. A esta condición se le llama frecuentemente amarre de fase y hay sistemas dinámicos, como los osciladores láser, cuyo comportamiento obedece a este tipo de acoplamiento [15]. Si la diferencia de las frecuencias naturales es relativamente grande, se tendría que intercambiar una gran cantidad de energía para estabilizar la oscilación, resultando imposible el acoplamiento. Los osciladores mantienen, en este caso, sus frecuencias naturales y se observa un batido entre estas dos frecuencias en el elemento que los acopla.

El comportamiento descrito para un par de osciladores van der Pol acoplados resistivamente se ilustra en la Fig. 14. En la práctica, estos osciladores se pueden construir usando diodos túnel como resistores no lineales. Los circuitos así contruidos se pueden mantener oscilando establemente

cuando la corriente que pasa por el diodo túnel se encuentra entre dos valores límite, un máximo y un mínimo en la llamada región de resistencia negativa. En el ejemplo mostrado en la Fig. 14, la ecuación del circuito acoplado se resolvió numéricamente y se determinaron la amplitud y la fase instantáneas de las respuestas obtenidas para cada oscilador mediante la transformada de Hilbert. En el caso considerado, las condiciones iniciales fueron: el voltaje en el tiempo inicial para un oscilador es igual a 1 volt y el voltaje en el tiempo inicial para el otro oscilador es igual a $-1/2$ volt, esto es $V_1 = 1, V_2 = -1/2$ y consecuentemente $\beta = \pi$ radianes.

Las gráficas de la Fig. 14 corresponden a casos con frecuencias naturales progresivas. Cuando esta diferencia de frecuencias es nula (gráfica en negro), la fase de uno de los

osciladores tiene un cambio brusco de 180° en el momento en que la amplitud de su envolvente desaparece. Allí la oscilación de dicho oscilador pierde medio período. Cuando la diferencia de frecuencias naturales es pequeña (gráficas gris oscuro y gris claro), los osciladores ajustan su frecuencia a una frecuencia intermedia y se establece una diferencia de fase diferente de cero, que aumenta cuanto más diferentes son las frecuencias naturales, manifestándose la simpatía entre ambos osciladores si la diferencia en frecuencias no es muy grande. La simpatía se logra más lentamente al aumentar la diferencia de frecuencias naturales, hasta alcanzar un valor en que ya no se consigue la simpatía de los circuitos. En ese caso, la fase relativa entre los dos osciladores ya no se estabiliza y cambia continuamente con el tiempo.

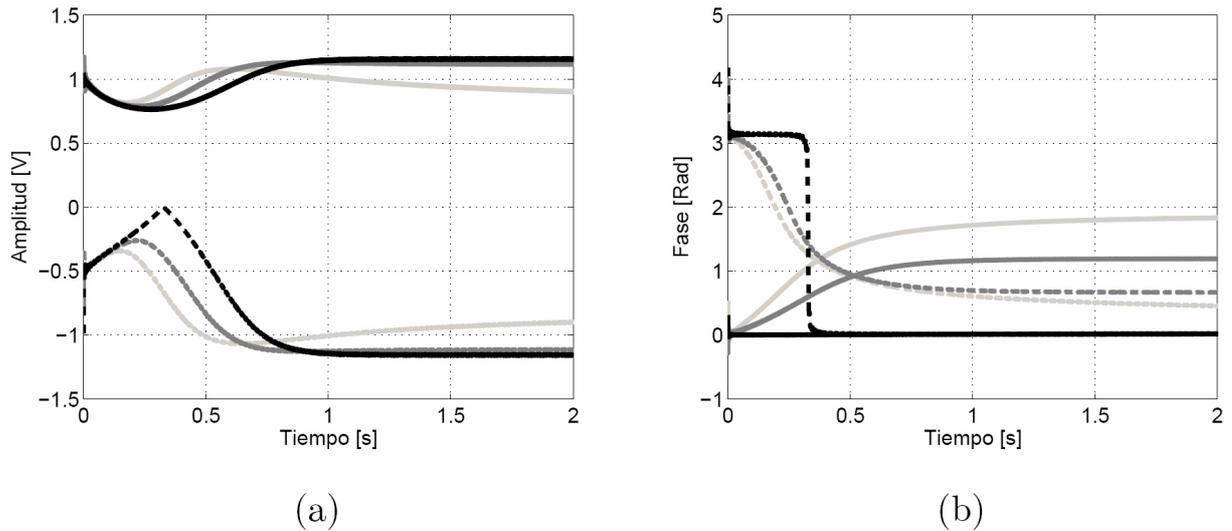


FIGURA 14. Comportamiento de dos osciladores de van der Pol acoplados mediante un resistor. La razón de frecuencias es $\omega_1/\omega_2 = 1$ (negro), $\omega_1/\omega_2 = 1.0025$ (gris oscuro) y $\omega_1/\omega_2 = 1.005$ (gris claro). Se grafican las envolventes del lado izquierdo y las fase del lado derecho. Las líneas continuas corresponden al primer oscilador mientras que las líneas segmentadas corresponden al otro. Es interesante notar como los osciladores empezaron π radianes fuera de fase y tienden a mantener una fase fija

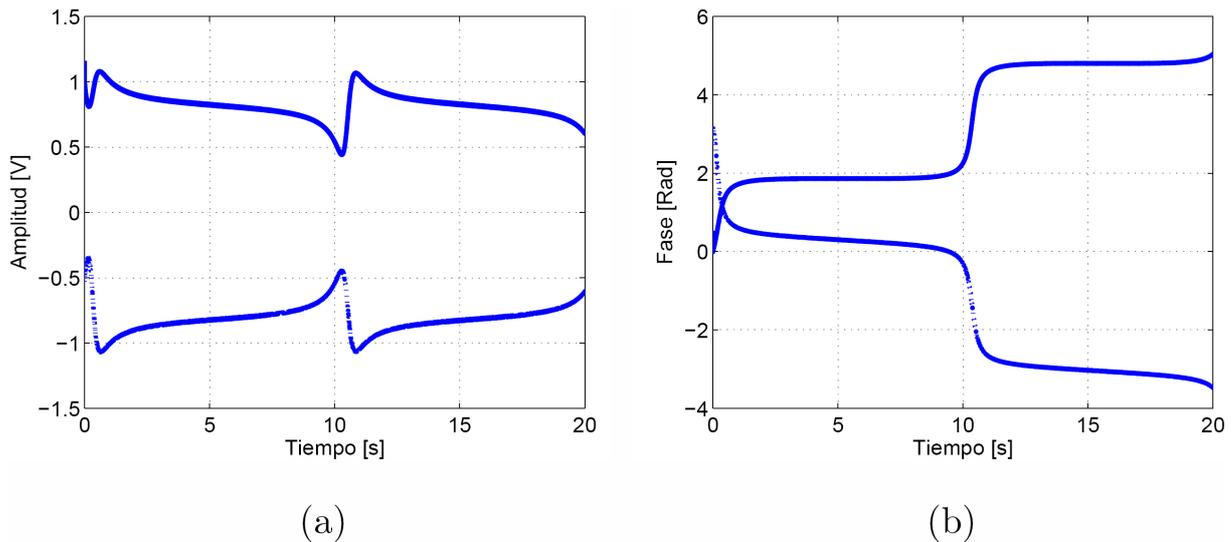


FIGURA 15. Resultados de osciladores de van der Pol con $\omega_1/\omega_2 = 1.005$. A la izquierda aparecen las envolventes y a la derecha aparecen las fases para ambos sistemas oscilatorios. Es interesante notar como los osciladores empezaron π radianes fuera de fase y el sistema hace intentos por amarrar la frecuencia, pero la diferencia es tal que no lo consigue, no son simpáticos.

La Fig. 15 ilustra una situación en la que no se manifiesta la simpatía dinámica entre los osciladores. Como vemos, la diferencia del ángulo de fase cambia continuamente, generándose un batido entre las dos oscilaciones y la variación periódica de las envolventes de las respuestas dinámicas correspondientes, indicando la diferencia en frecuencias naturales.

Se podría pensar que el encarrilamiento de dos osciladores mediante un acoplamiento débil es un caso poco frecuente en la naturaleza, o que su utilidad tecnológica es improbable o impráctica, sin embargo, ocurre todo lo contrario. Como se comenta en la última sección de este trabajo, la simpatía de dos osciladores es más común de lo que parece y su importancia tecnológica ya ha sido reconocida y se explota gracias al desarrollo de la nanotecnología [16].

5. Generalizaciones

La manifestación de la simpatía dinámica en la naturaleza es muy frecuente y el objetivo de este trabajo fue proporcionar herramientas adecuadas para estudiarla con mayor claridad y al mismo tiempo, marcar la diferencia con la sincronización forzada. En una gran diversidad de sistemas naturales percibimos un comportamiento oscilatorio autosostenido. Su acoplamiento débil lleva a su sincronización o respuesta coordinada de sus componentes. Existe una gran variedad de fenómenos que presentan sincronización y simpatía: por ejemplo, los relojes de Huygens, la sincronización de instrumentos musicales dentro de una orquesta [17] o el acoplamiento entre circuitos electrónicos. En el último caso, el

fenómeno puede usarse para producir una respuesta de mayor amplitud que la generada por la simple superposición de respuestas parciales. Otro uso importante es la inyección de frecuencias en láseres que permite sincronizarlos para producir una frecuencia particular. Tal vez más impresionante, es la variedad de sistemas biológicos en que la sincronización se manifiesta. Por ejemplo, los destellos producido por las luciérnagas se sincronizan produciendo un espectáculo natural de explicación compleja [18]. Existen efectos de sincronización en la actividad neuronal [19] y múltiples ejemplos en sistemas biológicos [20, 21]. Otros ejemplos son la actividad colectiva de las células intestinales en los mamíferos, la coordinación de los movimientos de la columna vertebral de los peces, la sincronización del aplauso entre los asistentes a un concierto, la respiración y el ritmo cardiaco. Se cree que la enfermedad de Parkinson tiene que ver con la interacción colectiva de un grupo particular de neuronas [22]. En general, la esencia del funcionamiento del cerebro y de los relojes biológicos, radica en la sincronización de diversos osciladores. Sin duda, el estudio de estos fenómenos será muy importante durante los próximos años. A modo de reflexión, diremos que el oscilador armónico es tan importante porque de alguna manera explica, mediante un modelo simple, una gran diversidad de fenómenos.

Agradecimientos

Este trabajo fué financiado por proyectos de la DGAPA-UNAM (Nos. IN-117806-3 y IN118406-3) y CONACYT (No. 50368).

-
- i* MATLAB la construye con la función $y = \text{hilbert}(s(t))$.
 - ii* La dimensión del espacio fase aumenta con el orden de la ecuación diferencial. En general la dimensión del espacio fase corresponde al orden de la ecuación diferencial.
1. C. Huygens, *Christiaan Huygens' the Pendulum Clock or Geometrical Demonstrations Concerning the Motion of Pendula As Applied to Clocks* (Iowa State University Press series in the history of technology and science, Ames, 1986).
 2. M. Bennet, M.F. Schatz, H. Rockwood y K. Wiesenfeld, *Proc. R. Soc. Lond. A* **458** (2002) 563.
 3. A. Pikovsky, M. Roseblum y J. Kurths, *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*. (Cambridge University Press, Nonlinear Science Series 12, Cambridge, 2001).
 4. V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations* (Massachusetts Institute of Technology Press, Massachusetts, 1973).
 5. G. Nicolis, *Introduction to Nonlinear Science* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
 6. D. Smith, *A Case Study and Analysis of the Tacoma Narrows Bridge Failure*, 99.497 Engineering Project, Department of Mechanical Engineering, Carleton University, Ottawa, Canada, March 29, 1974. Supervised by Professor G. Kardos. http://www.civeng.carleton.ca/Exhibits/Tacoma_Narrows/
 7. L. Glass, *Nature* (London) **410** (2001) 277.
 8. S.H. Strogatz, *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*, Hyperion (New York, 2003).
 9. G. Gauglitz (Editor), *Handbook of Spectroscopy* (Wiley-VCH, New York, 2003).
 10. B.A. Bolt, *Earthquakes*. (Freeman, New York, 2003).
 11. C.F. Beards, *Structural Vibration: Analysis and Damping* (Elsevier, The Netherlands, 1996).
 12. H.F. Olson, *Music, Physics and Engineering* (Dover Publications, New York, 1967).
 13. W.H. Hayt, J.E. Kemmerly, *Engineering Circuit Analysis* (McGraw-Hill, New York, 2006) 7 edition.
 14. J. Pantaleone, *Am. J. Phys.* **70** (2002) 992.
 15. R. Lang, *IEEE J. Quant. Elect.* **18** (1982) 976.
 16. F.B. Mancoff, N.D. Rizzo, B.N. Engel, and S. Tehrani *Nature* (London) **437** (2005) 393.
 17. M. Roseblum and A. Pikovsky, *Contemp. Phys.* **44** (2003) 401.
 18. J. Buck y E. Buck, *Sci. Am.*, **234** (1976) 74.

19. C.M Gray, *J. Comp. Neurosci.* **1** (1994) 11.
20. S.H. Strogatz y I. Stewart, *Sci. Am.* **269** (1993) 68.
21. E. Post y M.C. Forchhammer, *Nature* (London) **410,420** (2002) 168.
22. P. Tass *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 3291.