

## Prefacio

Esta tesis está destinada para aquellos que están interesados en conocer cómo la física estadística se puede aplicar en algunos fenómenos sociales, así como a los que desean estudiar la importancia que las interacciones de tres cuerpos tienen en los mismos.

El fenómeno social con el que se va a trabajar es el de la formación de coaliciones o alianzas entre un conjunto de actores, ya que este proceso de agregación es un buen candidato para crear un modelo relacionado con la física estadística. Los modelos de la física estadística que se van a utilizar son el modelo de Ising y el de Potts, donde en el primero se contemplan solamente dos estados posibles para los espines, mientras que en el segundo se cuenta con  $p$  estados posibles. Este último además de contemplar más estados, recupera también los resultados del modelo de Ising y por lo tanto es una de las muchas generalizaciones del mismo. Estos modelos trabajan con sistemas complejos como son los vidrios de espines, en donde los intercambios magnéticos están distribuidos aleatoriamente entre enlaces ferro y antiferromagnéticos.

Los modelos creados para simular el comportamiento de los sistemas sociales dependen de las interacciones que tienen los actores entre sí. El proceso de formación de coaliciones no es una excepción, y los resultados del modelo están determinados por la forma en la que interactúan los agentes del sistema. Todos los modelos de este fenómeno social presentados hasta la fecha, han contemplado solamente interacciones por pares entre los actores, es decir, se considera que cada agente solamente puede interactuar con otro simultáneamente, presentando una especie de “ceguera” hacia los demás y dejando a un lado la influencia que estos tendrían sobre la relación entre los actores en cuestión. Pero lo que pasa en la sociedad es diferente, la presencia de más individuos en una relación es determinante para la misma. Por ejemplo, en una familia, la relación que un hijo tiene con la madre afecta inevitablemente la que él mismo tiene con el padre. Por lo que para que estos modelos proporcionen resultados más apegados a lo que sucede en este fenómeno social, se tienen que tomar en cuenta las interacciones de mayor orden entre los actores del sistema.

El objetivo principal de esta tesis es mostrar que estas interacciones de mayor orden sí tienen consecuencias cuantitativas y cualitativas importantes, por lo que no pueden despreciarse en los modelos. Por lo tanto, se propone una extensión a uno de los modelos existentes (el modelo de Galam), en donde se considera el caso más sencillo para estas interacciones: la interacción de tres cuerpos. Siendo ésta la forma más simple en la que se puede abordar el problema, resulta suficiente para

mostrar los efectos que estas interacciones tienen sobre el proceso de formación de coaliciones.

La tesis está organizada de la siguiente manera. Los capítulos 1 y 2 son introductorios ya que se presenta la información necesaria para entender los siguientes capítulos. En el primero de estos se presentan las principales características de los sistemas complejos junto con una breve explicación de lo que es la sociofísica. También se dan las bases teóricas de la física estadística sobre las que se va a trabajar dando una recapitulación de los modelos de Ising y Potts. En el segundo capítulo se presentan los dos principales modelos de formación de coaliciones basados en el modelo de Ising. El capítulo 3 es donde se desarrolla el argumento principal de la tesis: las interacciones de tres cuerpos en la formación de coaliciones son muy importantes y no pueden ser despreciadas, por lo que se presenta una mejora a uno de los modelos presentados en el capítulo 2, donde sí se toman en cuenta las interacciones de tres cuerpos. Además se aplica el modelo presentado a una simplificación de la Guerra de Irak que comenzó en el 2003. El capítulo 4 presenta una generalización del modelo anterior: en lugar de utilizar el modelo de Ising donde sólo se cuenta con dos estados de espín, se utiliza el modelo de Potts para  $p$  estados del espín, considerándose así el caso de la neutralidad en los modelos de formación de alianzas. Se muestra de igual manera la aplicación de este modelo al mismo ejemplo que se utilizó en el capítulo 3 para mostrar las ventajas del modelo de Potts. En el capítulo 5 se concluye el trabajo, comparando los modelos presentados y los anteriores, se discuten las posibles aplicaciones y la importancia de los resultados obtenidos.

Fernando De Samaniego Steta

Ciudad Universitaria, Mayo 2007.

# Capítulo 1

## Introducción

### Sistemas Complejos y Sociofísica

En esta sección se presentan las principales características de los sistemas complejos y algunas de las aplicaciones que se han hecho sobre sistemas naturales y sociales.

### Generalidades de los Sistemas Complejos

En las últimas décadas se han realizado varios intentos por mejorar el entendimiento de sistemas que están formados por muchos componentes que interactúan entre sí, los cuales tienen una estructura estratificada donde cada uno de los niveles está formado por las entidades del nivel anterior [1]. En otras palabras, se puede decir que cualquiera de las entidades de estos niveles, producen o forman parte de las entidades que constituyen el siguiente nivel del mundo. La experiencia junto con muchos experimentos a lo largo de la historia, han propiciado que la ciencia recurra a una estratificación del mundo de esta naturaleza. Un buen ejemplo es la división en capas o niveles que se ha hecho del Universo, ya que se plantea que las partículas elementales forman átomos. Estos a su vez forman moléculas tanto simples como complejas, las cuales forman todos los objetos del Universo, de los que se pueden escoger aquellos que están formados por moléculas orgánicas muy complicadas, con las que se pueden generar células, que a su vez pueden formar tejidos y con éstos se pueden generar organismos. Los humanos son parte de este nivel, los cuales forman grupos y estos pueden crear sociedades y civilizaciones.

La palabra **complejo** proviene del latín *complexus* que significa enlazados, por lo que a los sistemas que están formados por componentes que se “enlazan”

y cumplen ciertas propiedades se les suele llamar “complejos”[2, 3]. Cualitativamente, para entender el funcionamiento de un sistema complejo no sólo se deben entender las propiedades de cada uno de los elementos que lo constituyen, es necesario también considerar las interacciones entre estos para recuperar así los fenómenos que emergen de la colectividad.

Una cuestión importante acerca de estos sistemas es qué tan ligada está la complejidad del sistema a la complejidad de las partes o en otras palabras, para tener un sistema de esta naturaleza ¿es necesario que los elementos constituyentes sean complejos?. La respuesta es no, ya que existen varias posibilidades. Una de ellas se manifiesta cuando elementos simples presentan un comportamiento colectivo complejo gracias a las interacciones entre ellas, teniendo un fenómeno llamado complejidad emergente. Por otro lado, la simplicidad emergente es aquella donde el comportamiento colectivo de los componentes es simple, mientras la naturaleza de los mismos es compleja [3]. Por lo tanto, en la formación de un sistema complejo no resulta relevante la naturaleza de las partes que lo conforman sino más bien lo importante son las interacciones entre ellas.

Otra propiedad importante de los sistemas complejos es su sensibilidad a perturbaciones pequeñas. Se puede ver en estos sistemas que la misma acción puede desencadenar un gran rango de respuestas, haciendo muy difícil la predicción o el desarrollo de cualquier “escenario típico” proveniente de la experiencia. La situación se agrava aún más ya que algunos sistemas complejos, por ejemplo los de carácter ecológico o social, experimentan un proceso de adaptación a los constantes cambios de su alrededor. Un ejemplo de esto es el efecto que resulta al ocupar el mismo antibiótico contra el mismo tipo de bacteria. Esto genera que en poco tiempo por medio de procesos evolutivos, la bacteria genere resistencia y por lo tanto la sustancia utilizada se vuelve inútil. Con este ejemplo se puede ver que la respuesta de un sistema a cierta estrategia puede volver a esta última redundante. Esos sistemas complejos se adaptan y cambian sus propiedades fundamentalmente como un resultado de la dinámica intrínseca del sistema la cual es de gran importancia para entender esos fenómenos.

Ahora que se tiene una mejor noción de lo que son los sistemas complejos se puede dar una definición concreta de los mismos. Un sistema complejo es aquel que está formado por muchos componentes cuyo comportamiento es emergente, esto es que el comportamiento del sistema no puede inferirse por medio del comportamiento de los componentes. La cantidad de información necesaria para describir el sistema es una medida de la complejidad del mismo [3].

En la física los sistemas complejos son muy importantes, esto se puede ver ya que en la mayoría de las ramas de esta ciencia se pueden encontrar numerosos

fenómenos que requieren de su estudio. Algunos ejemplos son el atascamiento en sistemas granulares, los sistemas gravitacionales de muchos cuerpos, los vidrios de espines, los fluidos turbulentos, los solitones, entre otros. Debido a que los sistemas complejos juegan un papel muy importante en esta ciencia, se han desarrollado muchas herramientas para el estudio de los problemas que han surgido a partir de estos. De manera especial, la física estadística ha sido una de las disciplinas con mayor aporte al estudio de estos sistemas, ya que ésta trabaja con fenómenos que emergen de las interacciones de una gran cantidad de elementos. Por otro lado, una multitud de interacciones simultáneas no necesariamente genera complejidad, de hecho, esta disciplina encuentra a menudo fenómenos contrarios. Mientras que el comportamiento de los componentes individuales puede llegar a ser muy diverso y complicado para seguirse detalladamente, los efectos que emergen de la colectividad pueden ser muy simples [4].

Con el paso de los años ha aumentado el reconocimiento de que el progreso de muchas disciplinas científicas depende de la importancia del entendimiento de los sistemas complejos [5]. Se han estudiado muchos sistemas tanto biológicos como sociales que tienen este comportamiento. Ejemplos de estos son el sistema inmune del cuerpo humano, la organización que presentan los animales que se mueven en enjambres, los procesos de concenso, entre otros. Dentro de esta clase de sistemas, son de gran importancia los que se organizan por sí solos o presentan auto-organización, los cuales incluyen estadísticas fractales y comportamiento caótico [6]. Existen muchos modelos que describen fenómenos de la naturaleza que presentan auto-organización, como por ejemplo los incendios forestales [7], los terremotos [8] y la desertificación [9]. También se han realizado modelos de sistemas sociales aplicando las herramientas de los sistemas complejos y la física estadística como por ejemplo, en el estudio del movimiento de las personas [10, 11] y el tráfico de automóviles en una ciudad [12, 13].

### **La sociofísica**

La física y las ciencias sociales estudian diferentes esferas de la realidad, la primera se evoca a los fenómenos que suceden en la naturaleza y la segunda estudia los fenómenos generados por los seres humanos. Además de esta importante diferencia, una de las principales barreras que separan a estas ciencias es la predicción de los fenómenos. En la física se han formulado leyes por medio de la abstracción de la realidad que permiten conocer la probabilidad con la que puede ocurrir un suceso, mientras que en las ciencias sociales las predicciones no son posibles pues no existen métodos que permitan conocer cómo va a evolucionar un

sistema social. La falta de predicción de los fenómenos sociales siempre ha generado mucha controversia, ya que uno de los objetivos primordiales de las ciencias es poder predecir los fenómenos. Entre otros factores, este problema se puede atribuir a que al estudiar los fenómenos sociales de manera cuantitativa el número de variables que surge de estos es demasiado grande. Sin embargo la pregunta acerca de si existen o no leyes que gobiernan los fenómenos sociales ha sido motivo de discusión a lo largo de la historia, y hasta hoy en día se mantiene en duda. En caso de que se encontraran leyes para los sistemas sociales ¿qué tipo de predicciones se podrían hacer? Más específicamente, ¿cuáles aspectos de la evolución de la sociedad pueden verse como inevitables?, ¿cuáles son susceptibles a una estimación probabilística? y ¿cuáles, de los que dependen del comportamiento humano, pueden ser predecibles?

A lo largo de la historia han existido diferentes pensadores que desarrollaron teorías de la sociedad y que trabajaron con este tipo de preguntas, las cuales se han planteado desde *La República* de Platón. En Roma en el siglo II D.C., Cicerón creía en leyes que trascendían las fronteras y particularidades de las naciones individuales, las cuales podrían ser aplicadas a las sociedades en cualquier lugar [4]. La noción del desarrollo de una ciencia social se tiene desde la Ilustración. En este periodo de principios del siglo XVII fue cuando el trabajo de Galileo, Descartes y Newton generó la idea de que la naturaleza puede ser entendida como una máquina, en la cual las fuerzas que actúan entre los constituyentes del Universo dan lugar a leyes precisas formuladas matemáticamente, las cuales permiten predecir el comportamiento de estos en el futuro. Conforme se siguieron encontrando fenómenos de la naturaleza que se podían describir por medio de leyes físicas, los filósofos comenzaron a preguntarse si estas regularidades se podían aplicar también a la esfera humana. Se empezó a observar al cuerpo humano como un mecanismo bien aceitado, ensamblado por medio de muchas palancas, bombas y contadores. El siguiente paso fue el de progresar de los individuos a la sociedad como conjunto, es decir, buscar una física de la sociedad.

El primer intento para desarrollar algo de esta naturaleza fue hecho por el filósofo inglés Thomas Hobbes en 1630-1640. Hobbes en su famosa obra *Leviathan* escrita en 1651, utilizó física del movimiento creada por Galileo para llegar a la conclusión que el despotismo absoluto es la mejor forma de gobernar una nación [14]. Sin embargo hoy en día los intereses de aplicar las herramientas de la física a los fenómenos sociales son muy diferentes a los de Hobbes. No se intenta responder a la pregunta ¿cómo debemos gobernar?, o ¿cómo debemos construir nuestras sociedades?, sino más bien: si establecemos las cosas para ciertas reglas particulares ¿podemos predecir cuál va a ser el resultado? La ciencia se está utili-

zando no para decirnos cuál es la forma correcta o incorrecta de hacer las cosas, sino más bien, para entender cuáles decisiones llevan a tales consecuencias.

En la búsqueda de extender las ciencias físicas al ámbito social, emerge la pregunta ¿existen leyes de la sociedad?, en la misma forma en la que se tienen leyes de gravitación o magnetismo. El filósofo francés Auguste Comte (1798-1857) postuló que esas leyes se podrían descubrir cuando planteó el término de *physique sociale*, o física social. En su *Cours de Philosophie Positive* (1830-1842), él argumentó que su obra completaría la descripción científica del mundo que Galileo, Newton y otros habían empezado [14].

Muchos pensadores del siglo XVIII y XIX, se preguntaron si el modo en el que la historia avanza resulta inevitable, de tal forma que el entendimiento de las fuerzas que generan esto podría generar cierto grado de predicción en el futuro del mundo.

Los físicos que hoy en día buscan leyes que gobiernan el tráfico o las bolsas de valores heredaron en cierta forma esta tradición. Implícito en sus modelos y ecuaciones se asume que a pesar de las indecisiones y caprichos de la naturaleza humana, existen leyes y propiedades universales emergentes que describen a estos sistemas complejos [4].

Por lo tanto, si existen leyes que describen ciertos fenómenos sociales puede plantearse la posibilidad de predecir los mismos. El problema principal para hacer predicciones de estos fenómenos es la infinidad de escenarios posibles que los individuos tienen al enfrentarse a una situación. Esto se debe a que las personas tienen diferentes opiniones, objetivos, gustos, religiones, o en otros términos, cuentan con el libre albedrío, que les brinda el poder para decidir qué hacer en cada situación. Sin embargo si se deja a un lado la individualidad y se consideran las sociedades o los conjuntos de individuos, el panorama puede ser más sencillo de analizar.

Las normas sociales y las convenciones existen en cierta forma para reducir la necesidad de tomar muchas decisiones [4]. Las personas dentro de una misma cultura visten de la misma forma, comen el mismo tipo de comida y utilizan las mismas palabras. Al manejar un automóvil no se tiene total libertad, se tienen que seguir los sentidos establecidos por las leyes de tránsito y las velocidades marcadas por las mismas. En los procesos para elegir un gobernante, sólo se puede votar por las personas que están en la papeleta, las cuales han sido elegidas previamente por los partidos políticos. Por lo que en cierta forma, las opciones que se tienen en una sociedad no son tan variadas como se cree. En algunos fenómenos estudiados en la física estadística ocurre algo similar, se plantea que el número de escenarios posibles para un conjunto de entes físicos es limitado, y la elección se

da típicamente por las interacciones que se tienen con los vecinos.

La física estadística ha desarrollado diversas herramientas para el estudio de sistemas complejos y por otro lado, se ha encontrado que los fenómenos sociales se comportan de manera muy variada generando sistemas de gran complejidad [15], por lo que la idea de aplicar la física estadística para el estudio de sistemas sociales resulta plausible. Sin embargo, se mantiene la cuestión de cómo hacer esto. Si bien se han logrado explicar sistemas complejos no-vivos, como las transiciones de fase por las que pasa un líquido, pero esto no implica que se pueda hacer una extensión para los de carácter social en donde interactúan individuos vivos. Por otro lado, la idea no resulta tan ingenua ya que se pueden encontrar fenómenos sociales que se comporten de manera similar a los físicos, como por ejemplo, la forma en la que un grupo de personas cambia de opinión. Esto puede parecerse a una transición de fase ya que las personas cambian de opinión constantemente y esto hace que el grupo cambie globalmente de una opinión a otra.

Entonces, ¿se puede aplicar la física estadística a los sistemas sociales? La respuesta es sí. Una justificación ingenua se da al pensar que las conglomeraciones de átomos o moléculas tienen mucho en común con los conjuntos de personas, y que gracias a esto se pueden ocupar las leyes de esta rama de la física en los seres humanos. Sin embargo la verdadera justificación surge del estudio de las transiciones de fase, en la teoría del grupo de renormalización.

A partir de la experiencia se conoce que la materia puede existir en diferentes fases y que las transiciones de una fase a otra pueden ocurrir si se cambia, por ejemplo, la temperatura. Estos cambios de fase se pueden observar cuando al calentar suficientemente un líquido, éste se convierte en gas, o también cuando al calentar un metal éste se derrite al alcanzar cierta temperatura. Otro ejemplo importante de este fenómeno de la naturaleza se da cuando un imán pierde su magnetización al disminuir su temperatura por debajo de un valor crítico. Los fenómenos críticos ocurren en las transiciones de fase. Si se considera la transición de líquido a gas, al encontrarse cerca el punto crítico, van a aparecer fluctuaciones en la densidad del líquido en todas las escalas posibles. Estas fluctuaciones se manifiestan a través de gotas mezcladas con burbujas de gas. En la vecindad de este punto van a existir gotas y burbujas de todos tamaños y exactamente en el punto crítico, la escala de las fluctuaciones se vuelve infinita, es decir, se tienen de todos tamaños dentro de nuestro sistema. Esto sugeriría que se deberían de tomar en cuenta sólo las fluctuaciones de escalas mayores ya que tendrían más importancia, pero en realidad el papel de las fluctuaciones pequeñas no puede ignorarse. Una buena teoría de los fenómenos críticos debe tomar en cuenta todas las escalas de longitud debido a que sólo así se puede tener una descripción acertada de los



mismos. Este problema requería del desarrollo de un nuevo tipo de teoría, capaz de describir los fenómenos a todas las escalas posibles. En 1971 Wilson construyó esta teoría al hacer modificaciones esenciales en un método de la física teórica llamada teoría del grupo de renormalización.

Esta es la teoría moderna de los fenómenos críticos y está basada en el concepto fundamental de que las variables ocupadas son irrelevantes y universales, por lo que se plantea que sistemas físicos diferentes, como por ejemplo un líquido y un imán, se comportan de la misma forma cuando se pasa de un estado macroscópico a otro [15]. La mayoría de las propiedades microscópicas de los compuestos físicos resultaron ser irrelevantes para describir el cambio macroscópico que, por otro lado, parece ser universal. Este planteamiento demuestra que fenómenos que parecían estar desconectados, como el magnetismo y los cambios de fase de líquidos y gases, tienen características similares. Mientras el número de sistemas físicos que sufren transiciones de fase es muy grande, todas las transiciones de fase pueden ser descritas en términos de un pequeño número de clases de universalidad. Sólo unos cuantos parámetros, como la dimensión espacial, determina a qué clase de universalidad pertenece el sistema. El concepto de universalidad plantea que en algunos casos los detalles no son importantes. Este planteamiento acerca de los fenómenos macroscópicos de la física estadística hace tentadora la extensión de estas nociones a sistemas que no son físicos, en particular a sistemas sociales, para los cuales en muchos casos, existe una relación entre propiedades microscópicas y realidades macroscópicas.

Esta extensión a los sistemas sociales debe de controlarse cuidadosamente. El hecho de sólo mapear una teoría física construida para una realidad física sobre una realidad social, puede resultar como una buena metáfora sin poder de predicción en casos optimistas, o como una teoría social errónea en el peor de los casos. La tarea en este caso, es tomar prestada de la física las técnicas y conceptos utilizados para atacar la complejidad de las agregaciones. El reto es entonces construir una teoría colectiva del comportamiento social bajo el mismo lineamiento, pero con las constricciones de la realidad psico-social.

El nuevo campo de la física social o **sociofísica** consiste en la aplicación de la física estadística para estudiar el comportamiento de los fenómenos sociales, y ha generado en los últimos 20 años un gran interés por parte de los físicos, principalmente de los teóricos [16]. Algunos ejemplos de las aplicaciones realizadas son la creación de modelos para describir procesos de huelgas [17], de toma de decisiones en un grupo [18, 19], de procesos electorales [20, 21], de los mercados de bolsa [22], de la formación de coaliciones [23, 24, 25], entre otros.

Es importante hacer notar que los modelos que se proponen para los siste-

mas sociales no intentan explicar todos los aspectos del comportamiento humano. Como en todos los intentos de modelación, las herramientas desarrolladas para esto sólo se pueden aplicar en algunos fenómenos de las ciencias sociales y no en todos.

### **Los modelos de formación de coaliciones**

La formación de coaliciones entre un grupo de actores es un fenómeno social que resulta buen candidato para crear un modelo con herramientas desarrolladas en la física estadística [24]. Estos actores pueden ser países que se alían en coaliciones internacionales, compañías que adoptan estándares comunes, partidos políticos que forman alianzas, individuos que forman diferentes grupos, entre otros.

Los conceptos de la teoría de los vidrios de espines han sido utilizados para el estudio de las coaliciones como forma de agregación en varias ocasiones [23, 24, 26, 27, 28, 29]. Un vidrio de espines es un material desordenado que exhibe alta frustración magnética [30] debido a las interacciones competitivas que se tienen en el sistema. Por otro lado, en los modelos de formación de coaliciones, se plantea que las propensiones bilaterales que tienen dos actores a cooperar o a pelear, puede ser simuladas por el tipo (o signo) de las interacciones que entre ellos es planteado. Además se establece que si dos agentes cooperan (pelean), estos tienden a estar en la misma coalición (diferente coalición). Por último, en estos modelos se propone que las coaliciones óptimas pueden ser determinadas siguiendo un principio de conflicto mínimo, i.e., las coaliciones más probables serán aquellas en las que existan menos diferencias entre las tendencias de los actores. En ambos fenómenos (el social y el físico) se cuenta con un problema similar, el cual emerge al intentar satisfacer simultáneamente fuerzas opuestas entre sí (sistemas frustrados). En otras palabras, en el sistema social el problema radica en resolver qué tipo de alianza, si existe alguna, va a optimizar las tendencias de todos los actores a pelear o a cooperar.

Los primeros en aplicar este tipo de modelos fueron Axelrod y Bennett [23] (modelo AB). Ellos estudiaron las alianzas establecidas entre diecisiete naciones europeas durante la Segunda Guerra Mundial, así como las que se produjeron entre nueve compañías de software para establecer los estándares del sistema operativo UNIX [26]. Para el primer caso las propensiones fueron obtenidas de las experiencias de conflictos pasados, fronteras, religiones, etc.

Galam [27, 28] reformuló el modelo de Axelrod y de Bennett obteniendo un modelo análogo al de Ising para vidrios de espines. Posteriormente junto con Florian [24], ocuparon este modelo para describir la fragmentación de la antigua Yu-

goslavia y mostraron que el número de coaliciones óptimas podía ser mayor a dos.

Sin embargo, existen dos principales problemas en los modelos para la formación de coaliciones que se han generado hasta el momento. El primero proviene de la poca claridad con la que se obtienen las propensiones bilaterales, ya que si bien engloban muchas características sociales de los actores, no se ha mostrado de qué forma se pueden obtener las mismas al contar con la información necesaria. El segundo es de carácter más general, los modelos anteriores no consideran en ningún momento las interacciones de orden mayor a dos, dejando a un lado los efectos que estas puedan producir.

### **Los efectos de tres cuerpos**

En los sistemas sociales, el considerar la interacción entre muchos actores es determinante para el estudio de los mismos, ya que la presencia de más agentes en una relación bilateral es muy importante y no puede ser despreciada. Es claro que las relaciones humanas siempre se ven afectadas cuando existen más personas alrededor. Un ejemplo de esto son las relaciones internacionales entre países o coaliciones de estos, ya que los pactos económicos establecidos entre dos naciones están determinados por la posición que éstas tienen con otros países de la comunidad internacional. Este es el caso de nuestro país, donde todos los acuerdos internacionales que se hacen con países de sudamérica por ejemplo, están supeditadas a lo que los Estados Unidos deseen.

Haciendo una analogía de lo anterior a los sistemas físicos, el efecto de tres cuerpos ha sido muy estudiado en casi todas las ramas de la Física. Se ha observado a lo largo de la historia de esta ciencia, que las interacciones de orden mayor a dos han sido determinantes en el estudio de muchos fenómenos. Por ejemplo, en el estudio del núcleo de los átomos las distancias entre los nucleones son muy pequeñas, por lo que las interacciones entre uno de ellos y sus vecinos cercanos no pueden ser despreciadas si se quiere entender su comportamiento. Otro ejemplo se da en el estudio de los coloides, ya que las interacciones de tres cuerpos juegan un gran papel pues el movimiento de las partículas depende en gran medida de las mismas.

Las interacciones de mayor orden y sus efectos no han sido considerados en los modelos sociales, se ha trabajado con idealizaciones donde sólo se contemplan las interacciones entre dos agentes al mismo tiempo. Esta omisión debe de tratarse con mucho cuidado pues el considerar las interacciones de muchos cuerpos en un sistema grande no es una tarea fácil, ya que puede requerir de mucho trabajo y

tiempo de cálculo pues conforme más agentes se tienen más interacciones hay que calcular. Considerando este problema, en esta tesis se va a trabajar con las interacciones de tres cuerpos, las cuales son suficientes para demostrar que los efectos del problema de muchos cuerpos son de vital importancia en la modelación de los sistemas sociales.

En esta tesis, con el espíritu de aplicar los conceptos de vidrios de espines al proceso de la formación de coaliciones, se van a generalizar los modelos anteriores al incluir las interacciones de tres cuerpos, y se va a mostrar la relevancia de las mismas al aplicar el nuevo modelo a un caso real, como es la Guerra de Irak iniciada en el 2003. Esta generalización se va a hacer tanto para modelos tipo Ising como para uno tipo Potts, el cual se va a plantear siguiendo la línea de modelación que sugiere Galam.

Para entender la física detrás de los modelos, se va a dar un breve repaso de lo que son los modelos de espines de la física estadística.

### **Modelos de espines: un recordatorio breve**

En esta sección se va a presentar un repaso breve de los modelos que se utilizaron para simular los procesos de agregación mencionados anteriormente. Primero se va a mostrar el modelo de Ising, el cual ha sido uno de los modelos de la física estadística más estudiados en los últimos 50 años. Esto se debe en gran parte a que la aplicación del mismo ha encontrado lugar en muchos fenómenos que presentan una especie de transición de fase, como por ejemplo en las redes neuronales, en el doblamiento de proteínas, en las parvadas de aves y en las células del corazón [[31]]. Además este modelo estudia un sistema de gran complejidad que sigue siendo un tema de investigación, ya que todavía no se tiene una solución exacta para este modelo en tres dimensiones.

Se presentan también dos tipos de generalizaciones para el modelo de Ising, la primera plantea estados discretos para los espines (modelo de Potts), y la segunda estados continuos (modelos XY y de Heisenberg). Para esta tesis resulta de mayor importancia la primera generalización pues en ésta se plantean  $p$  estados discretos para los espines, y por lo tanto en el modelo social en cuestión, el número de coaliciones aumenta. Mientras que los demás modelos no son tan relevantes en la aplicación que se está buscando, ya que carece de sentido hablar de un número infinito de alianzas.

El paradigma típico para los sistemas que se van a describir a continuación es el de un sistema gobernado por una función Hamiltoniana  $H$  de donde se obtiene la energía total del sistema en un estado particular. Dos modelos de los modelos

que se van a presentar (Ising y Potts), tienen conjuntos discretos de estados donde cada uno tiene su propia energía [31]. El estado con energía más baja  $E_0$  recibe el nombre de estado base.

### El modelo de Ising

El modelo de Ising es un modelo de un imán. La premisa esencial detrás de esto, y detrás de muchos modelos magnéticos, es que el campo magnético generado por un cuerpo continuo es el resultado de la combinación de muchos momentos magnéticos dipolares atómicos o moleculares dentro del material. El modelo postula una rejilla (la cual puede tener la geometría que se desee) con dipolos magnéticos o espines en cada sitio. Supongamos que hay  $N$  espacios en la rejilla y el mismo número de espines, etiquetados por  $i = 1, 2, \dots, N$  [32].

En este modelo los espines asumen la forma más simple posible, la cual no es particularmente realista, de variables escalares  $\sigma_i$  con valores de  $\pm 1$ . Cada espín  $\sigma_i$  apunta a lo largo de algún eje preferencial o en la dirección opuesta exactamente. Por lo que el valor de  $+1$  se asigna cuando el espín está paralelo al eje escogido como preferencial, y  $-1$  cuando se encuentra anti-paralelo. Se dice que el espín está 'arriba' cuando  $\sigma_i = +1$ , y 'abajo' cuando  $\sigma_i = -1$ .

Los estados del sistema de Ising son los diferentes conjuntos de valores que los espines pueden tomar. Debido a que solamente se tienen dos estados para los espines, hay un total de  $2^N$  estados para una rejilla con  $N$  espines dentro de ella.

En los materiales magnéticos reales los espines se relacionan entre sí, por ejemplo a través de interacciones de intercambio, las cuales se intentan considerar en el modelo de Ising al incluir en el Hamiltoniano productos de espines  $\sigma_i \sigma_j$ . En el caso más simple, todas las interacciones tienen la misma fuerza, denotada por  $J$  que tiene dimensiones de energía y recibe el nombre de constante de acoplamiento de los espines. Estas interacciones sólo se tienen entre espines que son vecinos cercanos en la rejilla propuesta. También se puede introducir un campo magnético externo  $B$  que afecta a los espines. El Hamiltoniano toma entonces la forma

$$H = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j - B \sum_i \sigma_i, \quad (1.1)$$

donde la notación  $\langle i, j \rangle$  indica que los lugares  $i$  y  $j$  que aparecen en la suma son vecinos cercanos. Los signos negativos son convencionales. Estos determinan qué signo va a tener el parámetro de interacción  $J$  y el campo magnético externo  $B$ . Con los signos tal y como se presentan en 1.1, un valor positivo de  $J$  hace

que los espines tiendan a alinearse uno con otro (modelo ferromagnético), mientras que un valor negativo hace que intenten mantenerse desalineados (modelo anti-ferromagnético). Para el signo del campo magnético funciona de la misma manera, si  $B > 0$  entonces los espines tienden a estar alineados con el mismo y si  $B < 0$  intentan desalinearse respecto a éste [31].

Una variación de este modelo permite tener un parámetro de interacción para cada espín, así como un campo magnético que varíe espacialmente en el Hamiltoniano. Por lo tanto el Hamiltoniano se convierte en

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_i B_i \sigma_i, \quad (1.2)$$

La función de partición del modelo es

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-H/kT}, \quad (1.3)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura del sistema. Al realizar esta suma se puede ocupar esta función de partición 1.3 para encontrar varias propiedades del sistema, como son la energía interna, la entropía, la energía libre, el calor específico, entre otras.

La magnetización media  $\langle M \rangle$  del modelo se puede obtener directamente de un promedio sobre los estados

$$\langle M \rangle = \left\langle \sum_i \sigma_i \right\rangle.$$

A menudo, resulta de mayor interés la magnetización media por espín  $\langle m \rangle$ , la cual es solamente

$$\langle M \rangle = \frac{1}{N} \left\langle \sum_i \sigma_i \right\rangle.$$

### El modelo de Potts

Supongamos que tenemos una rejilla con  $N$  lugares, etiquetados con  $1, 2, \dots, N$ . A cada lugar  $i$  se le asocia una cantidad  $\sigma_i$  que puede tomar  $p$  valores, por ejemplo  $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ . Como en el modelo de Ising, le llamaremos espín a cada  $\sigma_i$ . Dos espines adyacentes  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$  interactúan con una energía de interacción de  $-J_{ij} \delta_{\sigma(i), \sigma(j)}$ , donde  $\delta_{\sigma(i), \sigma(j)} = 1$  si  $\sigma_i = \sigma_j$ , y  $\delta_{\sigma(i), \sigma(j)} = 0$  si  $\sigma_i \neq \sigma_j$ . A esta función  $\delta_{\sigma(i), \sigma(j)}$  se le llama delta de Kroenecker.

La energía total está dada por [29]

$$E = - \sum_{\langle i,j \rangle} (pJ_{ij}\delta_{\sigma(i),\sigma(j)} - 1), \quad (1.4)$$

donde la notación  $\langle i, j \rangle$  indica que los lugares  $i$  y  $j$  que aparecen en la suma son vecinos cercanos.

Para el caso en el que  $p = 2$ , el modelo de Potts es equivalente al de Ising. Esto se puede ver debido a que si  $\sigma_i = \sigma_j$  entonces  $(2\delta_{\sigma(i),\sigma(j)} - 1) = +1$ , y cuando  $\sigma_i \neq \sigma_j$  entonces  $(2\delta_{\sigma(i),\sigma(j)} - 1) = -1$ .

Para valores de  $p$  mayores a 2 el modelo de Potts se comporta de manera similar al del Ising. Para  $J > 0$  (el caso ferromagnético) se tienen  $p$  estados base equivalentes, en donde todos los espines tienen el mismo valor y conforme la temperatura va aumentando el sistema sufre una transición de fase a un estado en donde cada uno de los  $p$  estados se manifiestan con la misma frecuencia a lo largo de toda la rejilla. Sin embargo, existen diferencias respecto al modelo de Ising. En particular, la entropía del modelo de Potts con  $p > 2$  es mayor que la que presenta el modelo de Ising a una misma temperatura, esto es debido a que la densidad de estados del sistema como función de la energía es mayor. Por ejemplo, si tomamos una temperatura cercana a  $T = 0$ , casi todos los espines van a estar en el mismo estado, mientras que van a haber unas cuantas excitaciones aisladas en la rejilla, justo como sucede en el modelo de Ising. Pero a diferencia de este último, en Potts cada excitación puede tomar cualquiera de los valores posibles para los espines, los cuales pueden ser muchos si  $p$  es grande, y esto da lugar a mucho más variados estados excitados que los que se tienen en el caso de Ising.

La función de partición para el modelo de Potts es

$$Z_N = \sum_{\sigma} \exp \left\{ K \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \right\}, \quad (1.5)$$

donde

$$K = \frac{J}{k_B T}.$$

En la expresión 1.5 la suma sobre  $\sigma$  se hace sobre todos los valores de los espines  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ . Por lo tanto existen  $q^N$  términos en la suma.

Existen soluciones exactas para algunos casos del modelo de Potts en dos dimensiones, por ejemplo: para  $p = 1$ , para  $p = 2$  (modelo de Ising), para el modelo de rejilla cuadrada con  $p = 3$  y  $K = -\infty$ , y para la rejilla triangular con  $p = 4$  y  $K = -\infty$  [32].

### Los modelos XY y de Heisenberg

Una generalización diferente del modelo de Ising la presentan los modelos de espines continuos, en los cuales se tiene que los espines que se encuentran en la rejilla cuentan con un rango continuo de valores posibles, en lugar de un espectro discreto como sucede en los modelos de Ising y de Potts. Los modelos más ampliamente estudiados son el modelo XY y el de Heisenberg. En el primero de estos los espines son vectores de dos componentes de longitud unitaria, los cuales pueden apuntar en cualquier dirección dentro del plano bidimensional. Por lo tanto los espines pueden ser representados por las componentes  $s_x, s_y$ , donde  $s^2 \equiv s_x^2 + s_y^2 = 1$ , o pueden ser representados por una sola variable angular  $\theta$ , que registra la dirección en la que apunta el espín. De lo anterior se observa que aunque los espines se plantean como bidimensionales no hay ninguna razón para la que la rejilla debiera ser de la misma dimensión. Por ejemplo, podemos colocar los espines XY en una rejilla cúbica en tres dimensiones.

El modelo de Heisenberg sigue esta idea, pero en este caso los espines son vectores tridimensionales unitarios. Al igual que en el modelo XY, la dimensionalidad de los espines y la de la rejilla son independientes. Los espines de Heisenberg pueden ser representados por vectores de tres componentes que cumplen lo siguiente  $s^2 \equiv s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$ , o por dos variables angulares  $\theta$  y  $\phi$  como las utilizadas en las coordenadas esféricas.

El Hamiltoniano para cada uno de estos modelos es la siguiente generalización del modelo de Ising,

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j,$$

donde  $\mathbf{s}_i$  y  $\mathbf{s}_j$  son vectores representando los espines en los lugares  $i$  y  $j$  de la rejilla. Esta expresión puede reescribirse como

$$H = \sum_{ij\alpha} J_{ij}^\alpha s_i^\alpha s_j^\alpha$$

donde los índices  $i, j$  especifican los lugares de la rejilla, y el índice  $\alpha$  los componentes  $x, y$  y  $z$ , de los espines. Si se toman los valores de  $J_{ij}^z = 0, J_{ij}^x = J_{ij}^y \neq 0$ , se obtiene el modelo XY; y tomando  $J_{ij}^x = J_{ij}^y = 0, J_{ij}^z \neq 0$ , se recupera el modelo de Ising [33].

Si tomamos una  $J_{ij} = J$ , es decir, que se tenga el mismo valor para todos los sitios de la constante de acoplamiento, entonces cuando  $J > 0$  los espines pueden bajar su energía alineándose y el modelo que se tiene es de tipo ferromagnético, como en el caso de Ising. Cuando  $J < 0$ , el modelo es anti-ferromagnético.



En estos modelos de espines continuos donde el espectro de estados posibles es continuo, es importante notar que las energías pueden tomar cualquier valor real entre el estado base y el de mayor energía.

## Capítulo 2

# Modelos de formación de coaliciones

En el capítulo que se presenta a continuación, se van a mostrar de manera cronológica los principales modelos que se han desarrollado en los últimos años para la descripción de la formación de alianzas o coaliciones entre un grupo de  $N$  actores. Los modelos a exponer son el de Axelrod-Bennett (AB) y el de Galam (G), donde cada uno ocupa como principal herramienta el modelo de Ising, ya que al tener sólo dos estados para el espín, se puede representar un conjunto dividido en dos bandos muy fácilmente, teniendo a unos con el espín arriba y otros abajo.

En el modelo de AB se utiliza el concepto físico de mínima energía para escoger la coalición más estable dentro de un paisaje de configuraciones posibles, además que se introduce el concepto de propensiones naturales donde se da una cuantificación de qué tan afines son dos actores del sistema. Sin embargo, Galam demuestra posteriormente que este modelo no es totalmente consistente con su contenido físico y construye un modelo reformulando el anterior. El modelo de Galam está basado en enlaces aleatorios entre los agentes del sistema y en intercambios también aleatorios de los lugares entre ellos.

### 2.1. El Modelo de Axelrod-Bennett (AB)

En 1993 Robert Axelrod y Scott Bennett utilizaron el concepto físico de mínima energía para construir un modelo de paisajes de agregación y publicaron “A Landscape Theory of Aggregation” [23] (modelo AB); donde se entiende por agregación a la organización de elementos de un sistema en patrones donde los elementos afines tienden a reunirse y los demás a separarse.

En su teoría de los paisajes de agregación Axelrod y Bennett hacen dos supo-

siciones básicas, las cuales se plantearon al reconocer que resulta difícil para un actor evaluar la importancia de cada alineación potencial.

1. Cada agente evalúa su afinidad con otro independientemente de todos los otros miembros del sistema. Esto se modeló a través de interacciones por pares, por lo que cada nación evade el problema de considerar todas las combinaciones al mismo tiempo.
2. El cambio de alineaciones se da solo individualmente y de manera gradual (uno por uno), i.e., no es posible cambiar más de una alineación al mismo tiempo. Con esto se elimina la posibilidad de que una coalición cambie de alineación en bloque.

El modelo AB [23] aborda el problema de alineación entre  $n$  actores (por ejemplo naciones, compañías, partidos políticos, etc.) que buscan formar dos coaliciones que compiten entre sí. La premisa clave de esta teoría de agregación es la introducción de las afinidades entre parejas, las cuales son llamadas propensiones bilaterales  $p_{ij}$  entre actores  $i$  y  $j$ . Donde se puede ver a las  $p_{ij}$  como una medida de qué tan dispuestas están dos naciones para estar en la misma coalición. Si un país tiene una fuente de conflicto con otro (como lo podría ser una frontera, diferencias religiosas, económicas, etc.), entonces ambos van a tener la misma propensión. Por lo tanto, la teoría supone que las propensiones son simétricas, i.e.,  $p_{ij} = p_{ji}$ .

Una configuración del sistema es una partición del conjunto de actores, esto es que se coloca cada uno en solo un agrupamiento. En el caso más simple de esta teoría sólo se van a tener dos agrupamientos o coaliciones, por lo que se hablará de un sistema de coaliciones bimodal.

Para una configuración  $X$  se define la distancia  $d_{ij}(X)$  entre los actores  $i$  y  $j$ , donde debido al carácter bimodal de las coaliciones  $d_{ij}(X) = 0$  cuando dos actores están en la misma agrupación, y 1 cuando están en una diferente.

Utilizando las distancias  $d_{ij}(X)$  y las propensiones bilaterales  $p_{ij}$ , se define una cantidad llamada frustración del sistema  $F_i(X)$ , la cual depende de una configuración  $X$  dada y se calcula para cada actor  $i$  de la siguiente manera:

$$F_i(X) = \sum_{j=1}^n s_j p_{ij} d_{ij}(X) \quad (2.1)$$

donde  $s_i$  es el tamaño del  $i$ -ésimo actor, que puede ser medido por factores demográficos, industriales, militares, o una combinación de estos, dependiendo del

peso que se le quiera dar a cada uno. La  $d_{ij}(X)$  es la distancia de  $i$  a  $j$  en la configuración  $X$ , y la  $p_{ij}$  es la propensión de que  $i$  se encuentre en la misma coalición que  $j$ . La suma está tomada sobre todos los actores incluyendo al  $i$ -ésimo, considerando que  $p_{ii} = 0$ . Esta frustración  $F_i(X)$  se puede entender como una cuantificación de qué tanto beneficia una configuración  $X$  a las propensiones del actor  $i$  para estar cerca o lejos de cualquier otro país.

La suma de las frustraciones de todos los actores se define como la energía del sistema,

$$E(X) = \sum_i s_i F_i(X). \quad (2.2)$$

Esta energía que mide el nivel de satisfacción entre las propensiones, puede reescribirse sustituyendo la ecuación (2.1) ,

$$E(X) = \sum_{i>j}^n s_i s_j p_{ij} d_{ij}(X), \quad (2.3)$$

donde la suma corre sobre los  $n(n-1)/2$  pares distintos  $(i, j)$ . Existen por simetría  $2^n/2$  conjuntos de coaliciones ya que cada actor sólo tiene dos opciones. La ecuación (2.3) es la fórmula central del modelo AB.

Este modelo plantea que la configuración que tenga la menor energía va a ser la mejor para describir las coaliciones que se van a formar, por lo que se define  $p_{ij} > 0$  cuando los actores  $i$  y  $j$  tienden a estar alineados y  $p_{ij} < 0$  cuando no, y así se asegura que la verdadera configuración del sistema va a ser aquella que minimize la energía. En otras palabras, se modela que los países que quieren trabajar juntos van a estar en la misma agrupación, y los que quieran trabajar en contra estarán en diferentes coaliciones.

La dinámica del sistema se basa principalmente en la segunda suposición básica y el principio de mínima energía, ya que los actores van a cambiar su alineación (uno por uno) solo si se logra una disminución en la energía local. Por lo que se se inicia en una configuración de mayor energía, el sistema va a cambiar hasta llegar al mínimo de la energía, donde ya no hará más re-alineaciones. Dados los conjuntos de las  $\{s_i, p_{ij}\}$ , el conjunto  $\{d_{ij}\}$  es calculado al minimizar la ecuación (2.3).

Axelrod y Bennett hacen las siguientes afirmaciones acerca de su modelo:

1. De la ecuación (2.2) se afirma que “una fuente de conflicto con un país pequeño no es tan importante para determinar las alineaciones como lo es una fuente de conflicto con un país grande” [23, pp. 210].

2. Se habla de que el concepto físico de frustración [30] está plasmado en el modelo con “Por ejemplo, si hay tres naciones que tienen aversión entre ellas (como Israel, Siria e Irak), entonces cualquier configuración bipolar posible va a dejar a alguna de ellas frustrada” [23, pp. 217].
3. Se afirma que las alineaciones pueden predecirse en casos reales: “La teoría del paisaje comienza con tamaños y propensiones bilaterales que se ocupan para calcular la energía de cada configuración posible, y después utiliza el paisaje resultante para hacer predicciones acerca de la dinámica del sistema” [23, pp. 217].

Resulta muy importante el papel que los tamaños de los países  $s_i$  desempeña en el modelo AB, debido a que una correcta elección de estos valores provee una configuración más precisa.

El modelo AB fue aplicado al estudio de las alianzas de la Segunda Guerra Mundial [23] como se puede ver en la figura 1, así como para el de las alianzas entre las compañías que desarrollaron el sistema operativo UNIX [26].

### 2.1.1. Otra perspectiva del modelo

Serge Galam mostró que en el caso de coaliciones bimodales, el modelo AB es equivalente al de un vidrio de espines no frustrado de tamaño finito a temperatura cero, más particularmente, del modelo de Ising ferromagnético a  $T = 0$  [27]. Primero denota a las coaliciones como  $A$  y  $B$ . Después asocia una variable  $\eta_i$  a cada  $i$ . Esta variable va a ser  $\eta_i = 1$  si el actor se encuentra en la coalición  $A$ , y  $\eta_i = -1$  si se encuentra en la  $B$ . De la simetría del sistema todos los agentes que estén en la coalición  $A$  se pueden ir a la  $B$  haciendo que los de la  $B$  se vayan a la  $A$ , donde lo importante de las nuevas variables es denotar en qué coalición se encuentra el  $i$ -ésimo actor.

Dado un par de actores  $(i, j)$  su alineación respectiva está dada por  $\eta_i \eta_j$ , donde el producto será 1 si los actores  $i$  y  $j$  se encuentran en la misma coalición, y  $-1$  si están en una diferente. Utilizando este nuevo conjunto de variables  $\{\eta_i\}$ , la distancia entre  $i$  y  $j$  se puede reescribir de la siguiente forma,

$$d_{ij}(X) = \frac{1}{2} (1 - \eta_i(X) \eta_j(X)), \quad (2.4)$$

por lo que la energía de una configuración se convierte en,

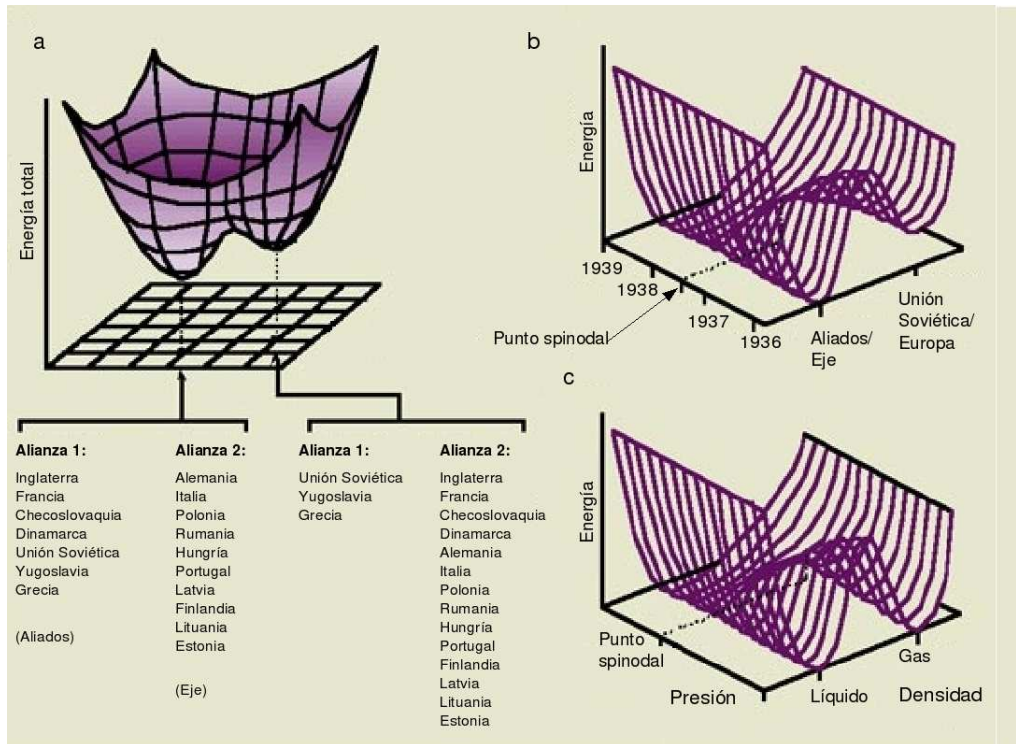


Figura 2.1: Aplicación del modelo de Axelrod y Bennet a la Segunda Guerra Mundial de 1936. Este modelo predice con poco error las coaliciones que se formaron en este conflicto, i.e., las de los aliados y el eje (a). Existe otro estado metaestable con energía mínima, sin embargo éste escenifica otra historia muy diferente a la conocida, en la cual Europa se une en contra la Unión Soviética. Debido a que las interacciones entre las naciones cambiaron algunos años después de 1936, esta configuración metaestable desaparece (b) en un punto análogo al que se tiene en una transición de fase de primer orden, como se muestra en (c).

$$E(X) = E_0 - \frac{1}{2} \sum_{j>i}^n J_{ij} \eta_i(X) \eta_j(X), \quad (2.5)$$

donde

$$J_{ij} \equiv s_i s_j p_{ij}, \quad (2.6)$$

con  $J_{ij} = 0$  y

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{j>i}^n J_{ij}, \quad (2.7)$$

es una constante que depende de las propensiones y tamaños iniciales de cada uno de los actores (países, firmas, partidos políticos, etc.). Sin embargo esta constante es independiente de la distribución de coaliciones, por lo que no tiene ningún efecto en la dinámica de las alineaciones entre actores para encontrar configuraciones estables y por lo tanto, podemos despreciarla de la ecuación (2.5). Por lo que la dinámica opera mediante la expresión,

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{j>i}^n J_{ij} \eta_i \eta_j, \quad (2.8)$$

la cual tiene que ser minimizada con respecto a  $\{\eta_i\}$  conociendo previamente el conjunto  $\{J_{ij}\}$ . La ecuación (2.8) resulta ser el Hamiltoniano del modelo de Ising para interacciones en competencia [30]. Las nuevas variables  $J_{ij}$  equivalen a las constantes de acoplamiento entre espines del modelo de Ising. En este caso  $J_{ij} > 0$  cuando hay cooperación entre los actores, mientras que  $J_{ij} < 0$  cuando se tiene un conflicto.

Como en este caso la configuración estable del sistema minimiza la energía, entonces el modelo de AB está en efecto a "T = 0". De otra manera si se tuviera "T ≠ 0" se tendría que minimizar la energía libre. En la práctica para un sistema finito, la teoría puede decir cuáles coaliciones son posibles y cuantas existen. Pero cuando varias configuraciones tienen la misma energía, no es posible predecir cuál de ellas es que tiene más validez.

### 2.1.2. La crítica de Galam al modelo AB

Galam [27] plantea que las afirmaciones que se hacen en el artículo de Axelrod y Bennett [23] (expuestas en la sección 2.2), son erróneas dentro del marco teórico

en el que se sustenta el modelo AB. El expone tres problemas de la teoría del paisaje de agregación, *el efecto de la asimetría en los tamaños, el efecto de la frustración y la predicción de alineaciones.*

### **El efecto de la asimetría en los tamaños**

Si se consideran dos países, uno grande y otro pequeño, que tienen una propensión a estar alineados pero que se encuentran en diferentes coaliciones, el costo de energía es la multiplicación del tamaño de los países en cuestión. Pero en este caso, el costo va a ser el mismo, independientemente de qué país esté fuera de la coalición que le corresponde según su propensión bilateral. Esto resulta una inconsistencia al evaluar la energía con países desalineados, ya que sí debería haber diferencia entre el costo de energía que genera un país grande desalineado y uno pequeño.

### **El efecto de la frustración**

Un arquetipo de frustración es cuando un sistema tiene varias configuraciones que minimizan la energía. Éste no se puede estabilizar debido a que no hay diferencia entre estar en una configuración o en otra. Esto quiere decir que existen varios estados base con exactamente la misma energía.

Sin embargo, para interacciones no uniformes el sistema tiene un mínimo estable y no hay frustración dentro de la significación física que se le dio en el párrafo anterior. El hecho de que algunas interacciones no sean satisfechas no implica frustración automáticamente. Esta situación prevalece en los casos estudiados por Axelrod y Bennett, ya que los mínimos existen y son estables. En otras palabras, el hecho de que el modelo AB localize mínimos bien definidos es la prueba de que no hay frustración. Dentro del área de trabajo de los modelos físicos, el modelo AB junto con las propensiones numéricas usadas para obtener los resultados es un modelo de Mattis, i.e., un vidrio de espines colocados aleatoriamente sin frustración. Como se encontró eventualmente un mínimo estable, eso significa a posteriori que es posible encontrar un conjunto de variables que van a permitir una factorización de las  $p_{ij}$ 's iniciales. Sin embargo la discusión y las afirmaciones de la teoría presentada en [23] están basadas en un vidrio de espines conectados entre todos.

En el modelo de AB no se plantea la existencia de actores neutrales.



### La predicción de las alineaciones

Galam [27] demuestra que el conjunto de  $\{J_{ij}\}$  determina la configuración estable (la que cuenta con la mínima energía). Muestra en particular para una configuración dada, siempre existe un conjunto de  $\{J_{ij}\}$  que va convertirla en el mínimo único de la energía asociada. En realidad lo que realmente importa es el cálculo de las propensiones bilaterales, ya que el hecho de obtener buenos resultados no es gracias al modelo, sino a las propensiones proporcionadas. Por lo tanto, la salida del modelo AB (alineaciones correctas) se reduce a la entrada (propensiones) y la predicción que el modelo hace no es válida.

Los cálculos de las propensiones y por lo tanto del conjunto  $\{J_{ij}\}$  son los resultados relevantes de Axelrod y Bennett.

Para resolver las dificultades mencionadas arriba se introduce el modelo G, el cual se discutirá a continuación.

## 2.2. El Modelo de Galam (G)

Galam comienza con un grupo de  $N$  actores y dos coaliciones  $A$  y  $B$  [27]. Se definen las propensiones bilaterales  $J_{i,j} \equiv J'_{i,j}$  entre los países  $i$  y  $j$ , las cuales se calculan considerando factores históricos, económicos y culturales. Cuando existe cooperación entre dos países  $J'_{i,j} > 0$ , si hay conflicto  $J'_{i,j} < 0$ , y en caso de indiferencia  $J'_{i,j} = 0$ . Estas propensiones solo dependen del par  $(i, j)$ , y en este caso la factorización sobre  $i$  y  $j$  no es posible. El modelo trabaja con enlaces asignados que compiten entre sí. Estos enlaces son locales y se mantienen constantes entre los agentes, por lo que prevalece el carácter simétrico que se requiere entre actores, i.e.,  $J'_{i,j} = J'_{j,i}$ .

El modelo G se refiere a las propensiones  $J'_{i,j}$  como locales ya que no toman en cuenta ninguna organización global o red. Para tomar en cuenta el macro-nivel de alineaciones se considera el caso de dos coaliciones en competencia  $A$  y  $B$ .

Se considera que cada actor tiene una propensión natural de estar en una de las dos coaliciones establecidas. Una variable  $\varepsilon_i$  se le asocia a cada  $i$ , donde  $\varepsilon_i = 1$  si éste debería estar en la coalición A,  $\varepsilon_i = -1$  para la B y  $\varepsilon_i = 0$  en caso de no tener ninguna tendencia hacia cualquiera de las agrupaciones. Las propensiones naturales se pueden establecer a través de los intereses culturales, políticos, e históricos de cada uno de los agentes. Dentro del marco global de las dos grandes agrupaciones, el beneficio  $C_{i,j}$  obtenido por cada actor de los intercambios que hace con los demás es siempre positivo ya que el compartir recursos, información, armas es

siempre rentable. Sin embargo la propensión de un par de actores  $(i, j)$  a cooperar, al conflicto o a la ignorancia es  $J_{i,j} = \varepsilon_i \varepsilon_j C_{i,j}$ , la cual puede ser positiva, negativa o cero respectivamente.

Al tomar en cuenta los intercambios locales y los globales el resultado que se obtiene es la propensión total,

$$J_{i,j} = J'_{i,j} + \varepsilon_i \varepsilon_j C_{i,j}, \quad (2.9)$$

entre dos actores  $i$  y  $j$  con  $C_{i,j} > 0$ . Se considera que todos los agentes están conectados entre sí y por lo tanto la red tiene todas las conexiones posibles.

La pertenencia actual de un actor  $i$  a cualquiera de las dos coaliciones está determinada por las variables de espín  $\eta_i$ , tomando el valor de  $\eta_i = 1$  si se pertenece a la agrupación A,  $\eta_i = -1$  para la B. Gracias a la simetría del sistema, todos los elementos de la coalición A se pueden cambiar a la B al hacer un traspaso simultáneo de los elementos de B hacia A.

Para tomar en cuenta las presiones económicas o militares que se ejercen en las alineaciones con ciertos actores, se introduce la variable  $\beta_i = \pm 1$ . En el caso de favorecer a la coalición A  $\beta_i = 1$ , para la B  $\beta_i = -1$  y en caso de no haber ninguna presión  $\beta_i = 0$ . La magnitud con la que se ejerce esta presión está considerada a través de un campo positivo  $b_i$ , el cual toma en cuenta el tamaño y la importancia del  $i$ -ésimo agente. Los conjuntos  $\{\varepsilon_i\}$  y  $\{\beta_i\}$  son independientes.

Las decisiones que los actores tomen para la cooperación o el conflicto entre ellos van a estar determinadas por las cantidades descritas. La energía asociada es

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i>j}^N J_{i,j} \eta_i \eta_j - \sum_i^N \beta_i b_i \eta_i, \quad (2.10)$$

el cual es básicamente el Hamiltoniano del modelo de Ising en su estado base para vidrios de espines con un campo magnético externo  $h_i = \beta_i b_i$ , como se puede ver al compararlo con la ecuación 1.2.

En el modelo G se consideran varios escenarios que dependen de los valores que tomen las variables establecidas anteriormente, considerando a cada uno de los actores de la red como países [27, 28].

### 2.2.1. El escenario de la Guerra Fría

El modelo G se refiere al escenario de la Guerra Fría cuando existen dos coaliciones a nivel mundial que generan uniones mucho más fuertes que las bilaterales, i.e.,  $|J'_{i,j}| < C_{i,j}$  ya que el pertenecer a una de las coaliciones globales produce

más ventajas que las generadas por las uniones locales. En otras palabras, las propensiones locales fueron deshabilitadas debido a la gran fuerza del bloque de dos coaliciones por lo que se puede tomar  $J'_{i,j} = 0$ . Por lo que en este caso

$$J_{i,j} = \varepsilon_i \varepsilon_j C_{i,j}. \quad (2.11)$$

Por otro lado, la presión generada por las dos agrupaciones hace que todos los actores tengan que pertenecer a alguna de ellas, i.e.,  $\varepsilon_i \neq 0$  y  $\beta_i \neq 0$ . Por lo tanto, la energía asociada al escenario de la Guerra Fría es [27],

$$H_{GF} = -\frac{1}{2} \sum_{i>j}^N J_{i,j} \eta_i \eta_j - \sum_i^N \beta_i b_i \eta_i. \quad (2.12)$$

Dentro de este escenario se proponen dos casos dependiendo del valor de los parámetros  $\beta_i$  con respecto a las propensiones naturales  $\varepsilon_i$ . El primero es el de las tendencias coherentes donde  $\beta_i = \varepsilon_i$  y cada país escoge su coalición de acuerdo a su propensión natural, i.e.,  $\eta_i = \varepsilon_i$ . El segundo es el de las tendencias incoherentes donde  $\beta_i \neq \varepsilon_i$ .

### 2.2.2. El escenario del Líder Único

El escenario del Líder Único contempla la desaparición de una de las coaliciones del sistema, sin embargo, la otra permanece tal y como estaba antes de este suceso. El colapso de uno de los bloques genera una nueva distribución de los elementos del sistema. Si la coalición que desaparece es la B, no va a haber cambio alguno para los actores de la A ya que van a seguir tomando sus decisiones de acuerdo a las propensiones  $C_{i,j}$ . Para los elementos de B la situación es distinta, sus decisiones van a ser tomadas de acuerdo a los enlaces competitivos  $J'_{i,j}$  los cuales no siempre coinciden con las  $C_{i,j}$ . Al considerar este caso, el modelo G pasa de ser un vidrio de espines de Mattis de posicionamiento aleatorio sin frustración a un vidrio de espines de enlaces aleatorios con frustración. En otras palabras, el conjunto de elementos B ha cambiado de un mínimo estable a un paisaje inestable altamente degenerado con muchos mínimos locales.

El hecho de contar con una sola coalición a la que tengan que pertenecer todos los países hace que los intereses de cada uno sean parte de los intereses de la coalición, es por esto que bajo este escenario  $\beta_i = 1$  para todo actor  $i$ .

En este caso las propensiones  $J_{i,j}$  se vuelven igual a  $J'_{i,j}$  en los casos donde  $\varepsilon_i = 0$ ,  $\varepsilon_j = 0$  y  $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0$ . El Hamiltoniano asociado al subconjunto de actores donde  $\varepsilon_i = 0$  es [27],

$$H_{LU} = -\frac{1}{2} \sum_{i>j}^N J'_{i,j} \eta_i \eta_j - \sum_i^N b_i \eta_i, \quad (2.13)$$

que es equivalente al Hamiltoniano del modelo ferromagnético de Ising con un campo externo afectándolo como se muestra en la expresión 1.2. Para este escenario  $\eta_i = 1$  representa que el  $i$ -ésimo actor pertenece a la coalición A, mientras que para  $\eta_i = -1$  se tiene una pertenencia de dicho país a una coalición B que no existe, por lo tanto se considera que solamente está fuera de la agrupación A.

Para campos externos pequeños respecto a las interacciones entre los actores el sistema va a presentar frustración dependiendo de las diferentes  $J'_{i,j}$ .

Este modelo fue utilizado para explicar la estabilidad de las alianzas durante la Guerra Fría, considerando la oposición de la OTAN y el pacto de Varsovia [27]. También se hizo un análisis de la construcción Europea versus la estabilidad, así como de la estabilidad de China [27]. En otro trabajo [24] se ocupó el modelo G para el estudio de la separación de la antigua Yugoslavia (1991-1992), encontrando que el número de las coaliciones óptimas era mayor a dos.

## Capítulo 3

### Interacciones de tres cuerpos

En este capítulo se plantea un modelo de tres cuerpos para el proceso de formación de coaliciones entre  $N$  actores. Este se presenta al introducir un término que considera dichas interacciones en el modelo G, y se aplica a un ejemplo muy simplificado de las alianzas que se formaron en la Guerra de Irak que comenzó en el 2003.

Pero, ¿qué tan importante es la presencia de más personas (naciones, partidos políticos, etc.) al tomarse una postura ante un conflicto? La posición que un individuo adopta ante un conflicto o una situación de polarización, siempre está determinada por la relación que se tiene con todas las personas involucradas en el mismo. Por ejemplo, todas las posturas ante la comunidad internacional que México ha tenido en los últimos sexenios, han estado influenciadas en gran medida por la posición que los E.U.A. hayan tenido en ese momento. Haciendo un análisis acerca de los conflictos entre dos países, estos siempre están influenciados por las presiones que terceros ejercen ya sea por intereses políticos, económicos o religiosos.

En los modelos de la formación de coaliciones que se han desarrollado hasta el momento, no se han considerado otras interacciones mas que las que se tienen entre parejas. Esta simplificación hace que los actores sólo consideren a un vecino a la vez para interactuar con él. Si se establece esta “ceguera” hacia los demás vecinos entonces el modelo se aleja mucho de la realidad, ya que las naciones, los partidos políticos, los individuos o cualquier otra agrupación social que se polarize y tienda a formar alianzas, siempre considera al menos a un segundo actor del sistema para decidir cuál va a ser su posición ante un conflicto. En otras palabras, la presencia de más agentes en un sistema es un factor determinante en los fenómenos sociales, en especial en el proceso de formación de coaliciones,

por lo que es necesario que los modelos que busquen representar este tipo de fenómenos consideren las interacciones de mayor orden entre los actores.

En este trabajo las interacciones que se van a considerar son las de tres cuerpos, es decir que cada agente va a considerar sus interacciones con otros dos para poder evaluar su pertenencia a cualquiera de las coaliciones existentes. El modelo a presentar se apoya en los anteriores pero incluye un término que considerará las interacciones de tres cuerpos.

### 3.1. La falla en las interacciones entre dos actores

Para ilustrar el “problema” que emerge al utilizar las interacciones por parejas, se utilizará como ejemplo una simplificación de la guerra de Irak del 2003 al aplicarle el modelo de Galam [25]. En este caso se van a tomar solamente los cuatro principales actores del conflicto: Iraq ( $Q$ ), Israel ( $I$ ), una Coalición Musulmana ( $M$ ) y los Estados Unidos ( $U$ ). Los países de la Unión Europea no se incluyeron en el ejemplo simplemente debido a que se llega esencialmente al mismo resultado con este modelo simplificado, por lo que se tomaron en cuenta solamente los actores cruciales para mayor entendimiento.

Las propensiones naturales que se presentan en este ejemplo fueron asignadas de acuerdo a la historia bélica, a los intereses políticos y económicos que han mostrado estos cuatro agentes desde la Guerra del Golfo en 1991, i.e. se tomó en cuenta que Estados Unidos ha apoyado a Israel incondicionalmente tanto con armas como ante el Consejo de Seguridad de la ONU, así como siempre ha tratado de invadir Irak por cuestiones económicas, más concretamente por el petróleo que este país posee. Por otro lado los Musulmanes siempre han estado contra Israel debido a que los judíos invadieron sus tierras bajo el argumento de ser un territorio sagrado para ellos, se consideró a una Coalición Musulmana porque es una población muy grande y muy unida en el Medio Oriente; las religiones siempre han generado un lazo muy fuerte entre los países a lo largo de la historia por lo que es crucial considerar ese factor en cada una de las propensiones.

Se consideran dos coaliciones siguiendo la línea del modelo G, y las propensiones naturales de los actores son [25],

País	$\varepsilon_i$
$Q$	-1
$I$	+1
$M$	-1
$U$	+1

Cuadro 3.1: Propensiones naturales de cada uno de los  $i$  países.

	$Q$	$I$	$M$	$U$
$Q$	0	$C_E$	$C$	$C_E$
$I$	$C_E$	0	$C_E$	$C_F$
$M$	$C$	$C_E$	0	$C$
$U$	$C_E$	$C_F$	$C$	0

Cuadro 3.2: Parámetros de interacción  $J_{i,j}$  entre los países  $i$  y  $j$ .

La principal característica considerada en la reciente guerra en Irak, es la fuerte propensión natural que existe entre Israel ( $I$ ) y Estados Unidos ( $U$ ), lo que conlleva a un parámetro de gran magnitud  $C_{U-I}$ . Como las interacciones entre actores tienen diferente magnitud, se tomaron tres principales parámetros de interacción  $C_F$ ,  $C_E$  y  $C$ . Los parámetros  $J_{i,j}$  se asignaron como se muestra en el cuadro 3,2, donde existe una jerarquía entre los parámetros presentados:  $C_F > C_E > C \gg |J'_{i,j}|$ .

Los modelos anteriores solamente toman en cuenta las interacciones por pares entre actores, por lo que para acentuar esto se va a colocar un superíndice (2) en las expresiones de los mismos, mientras que para las interacciones de tres cuerpos se va a colocar un (3) sobre las fórmulas correspondientes.

Utilizando las tablas anteriores se encontró el estado base del Hamiltoniano  $H^{(2)}$  con diferentes valores para los parámetros. Tomando el principio de la mínima energía (como en los modelos anteriores), este modelo predice que  $I$  entra a la guerra aliado con  $U$  peleando contra una coalición formada por los actores restantes ( $M$  y  $Q$ ). Siguiendo el cambio de variable que Galam propone [27],  $\tau_i = \varepsilon_i \eta_i$ , se puede demostrar que la configuración que presenta la menor energía es aquella donde las coaliciones están formadas de manera que satisfagan las propensiones naturales de los actores, i.e., se creó una coalición  $A$  que contiene a  $U$  e  $I$  y una  $B$  con  $Q$  y  $M$ . El estado base correspondiente tiene una energía  $E_0^{(2)} = -(C_F + 3C_E + 2C)$ . El único cambio significativo en la solución, se daría asumiendo un escenario en el que se tenga a un gran líder o un imperio, como

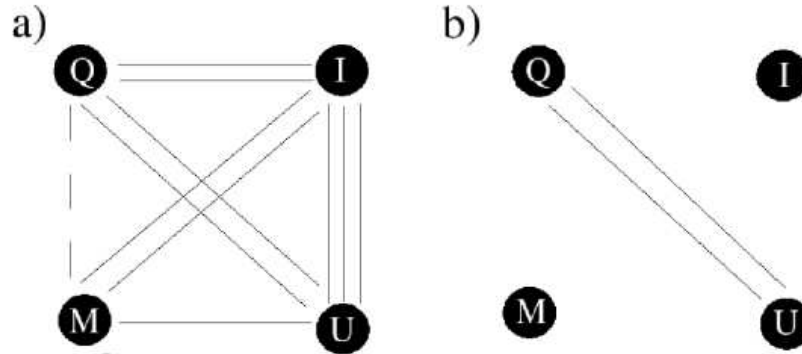


Figura 3.1: a) Red simplificada de la guerra de Irak. Una amistad fuerte ( $C_F$ ) está representada por tres líneas, un enemigo fuerte ( $C_E$ ) por dos líneas, y enemigos (amigos) con una interacción débil ( $C$ ) entre ellos por una línea continua (punteada). b) La misma red pero con  $M$  e  $I$  neutrales.

sería el caso de  $U$ , en donde se tendría un gran campo externo  $b \gg 1$  donde  $M$  se vería obligado a entrar en una coalición con  $U$  para bajar la energía del sistema.

A pesar de los cálculos anteriores, en la guerra real los Israelitas y los Musulmanes permanecieron neutrales respecto a la situación. Incluso resulta más impactante el hecho de que en la Guerra del Golfo de 1991, Irak mandó misiles a Israel y éste permaneció neutral ante el ataque. Dentro de los modelos anteriores, con un Hamiltoniano de interacciones por pares  $H^{(2)}$ , para tomar en cuenta el caso de la neutralidad entre  $I$  y  $M$ , es necesario comparar la energía del sistema anterior con el caso en el que estos dos actores están desconectados (Figura 3,2 b)). En un escenario en el que tenemos fuertes enemigos y grandes amistades, i.e. asumiendo que  $C_{i,j} \gg J'$ , la solución que considera a  $M$  y a  $I$  como neutrales tiene una energía de  $E_{0,U-Q}^{(2)} = -C_E$ . Como los parámetros  $C_{i,j}$  tienen la jerarquía establecida arriba, entonces  $C_F > C_E$ , de donde se puede ver claramente que  $E_0^{(2)} < E_{0,U-Q}^{(2)}$ , por lo que la mejor solución es mantener a todos los actores en conflicto. Como se puede ver esta solución no muestra las coaliciones correctas que se siguen manteniendo en esta guerra por lo que debe haber algo que no se está tomando en cuenta. Una de las cosas que no se plantea correctamente es la neutralidad de los actores. El sistema no debe contar solamente con dos coaliciones  $A$  y  $B$ , sino que se debe considerar una tercera  $D$  donde entren los países neutrales, por lo que una forma de lograrlo sería considerar un Hamiltoniano de



tres estados, como por ejemplo el modelo de Potts para  $p$  estados, donde las variables  $\eta_i$  pueden tener más valores, como por ejemplo  $\eta_i = 0$ . Esto podría ser una mejora al modelo pero no logra aclarar la situación ya que en realidad se está evadiendo el problema principal de los modelos anteriores: las interacciones por parejas. No se consideran las interacciones de tres cuerpos ni los daños bélicos asociados. Por lo tanto, la interacción entre  $U$  y  $M$  depende también de  $I$ . Si se toma la idea original de Galam de “distancias entre países”, si la distancia  $X$  entre dos de ellos se reduce, entonces la distancia con un tercero aumentará.

Esto último muestra que la primera suposición básica del modelo AB [23, pp. 213] simplifica demasiado la situación, es decir que el planteamiento en donde cada nación atiende de manera independiente cada una de las interacciones con cualquier otro país elimina la posibilidad de tomar en cuenta las interacciones de tres cuerpos.

### 3.1.1. Generalizando el modelo de Galam

Por lo tanto se requiere un nuevo modelo en el que se incluyan las interacciones no contempladas por los anteriores, pero que a su vez pretenda rescatar los resultados generados por el modelo G (que es una mejora al modelo AB). Esto se logra incluyendo un término que va a tomar en cuenta las interacciones de mayor orden. Para lograr lo anterior se tiene que modificar el Hamiltoniano  $H^{(2)}$  del modelo de Ising ferromagnético para vidrios de espines. Como en esta expresión sí se consideran los ingredientes principales del proceso de formación de coaliciones, la interacción de tres cuerpos se puede introducir como un Hamiltoniano extra  $H^{(3)}$ , el cual se adiciona al original  $H^{(2)}$ ,

$$H = H^{(2)} + \alpha H^{(3)}, \quad (3.1)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro que mide la magnitud de los efectos de tres cuerpos entre los actores en cuestión. En esta expresión el término  $H^{(3)}$  va a tomar en cuenta a estos tres actores y es considerado como una perturbación de  $H^{(2)}$ , donde la forma más simple para esta expresión es,

$$H^{(3)} = \sum_{i,j,k} \frac{t_{ijk}}{3} \eta_i \eta_j \eta_k, \quad (3.2)$$

con  $t_{ijk}$  como parámetro de acoplamiento para cada uno de los triángulos formados por los actores  $i$ ,  $j$  y  $k$  en la red. Esto se puede pensar como si se formaran triángulos con los actores en cada uno de los vértices, donde los lados fungen

como las conexiones entre los mismos (Figura 3). Estas conexiones van a variar en intensidad al igual que en los modelos anteriores y se encuentran determinadas por el parámetro  $t_{ijk}$  que está dado por,

$$t_{ijk} \equiv \gamma_{ijk} J_{ij} J_{jk} J_{ki}, \quad (3.3)$$

donde la  $\gamma_{ijk}$  es la magnitud del conflicto o daño asociado a la interacción de tres cuerpos entre los actores  $i$ ,  $j$  y  $k$ . Las propensiones bilaterales  $J_{ij}$  son las que se plantean en la ecuación (2.9). Sin embargo, en el Hamiltoniano anterior (3.2) no se consideran algunas características muy importantes para el modelo, ya que se evaden las diferentes situaciones que se dan en cada uno de los triángulos formados por los actores  $i$ ,  $j$  y  $k$ . Es por esto que se deben de hacer modificaciones pertinentes al mismo para considerar las interacciones entre estos actores:

1. Cuando tres actores interactúan entre sí formando un triángulo, se puede decir que se genera un conflicto si dos de ellos no tienen la misma propensión natural, determinada por sus  $\varepsilon_i$ 's correspondientes. A esto se le vamos a llamar un conflicto natural. Como resultado, la energía debe aumentar. Retomando el ejemplo mostrado arriba, cuando se forma el triángulo  $U$ ,  $M$  e  $I$ , se genera un conflicto natural debido a las diferentes propensiones naturales que se tienen (Figura 3 a) y b)). Por lo tanto, la ecuación (3.2) se puede modificar al introducir una función tal, que sea cero cuando todos los actores tengan la misma propensión natural, y uno en el caso contrario. Por lo tanto el Hamiltoniano correspondiente es,

$$H^{(3)} = \sum_{i,j,k}^N \frac{t_{ijk}}{3} \left( \frac{3 - |\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k|}{2} \right) \eta_i \eta_j \eta_k. \quad (3.4)$$

2. En el caso de tener un conflicto natural en un triángulo, el aumento de la energía depende de la configuración relativa de los espines. Si se observa la ecuación (3.2), el Hamiltoniano no resulta invariante hacia las mismas orientaciones relativas entre los espines. En otras palabras, la energía del estado en el que  $\eta_i = \eta_j = \eta_k = 1$ , es diferente a la que se obtiene cuando  $\eta_i = \eta_j = \eta_k = -1$ , aunque ambos estados cuentan con la misma orientación relativa entre ellos (todos son paralelos). Este problema se puede solucionar modificando el Hamiltoniano (3.4) al incluir la función de valor

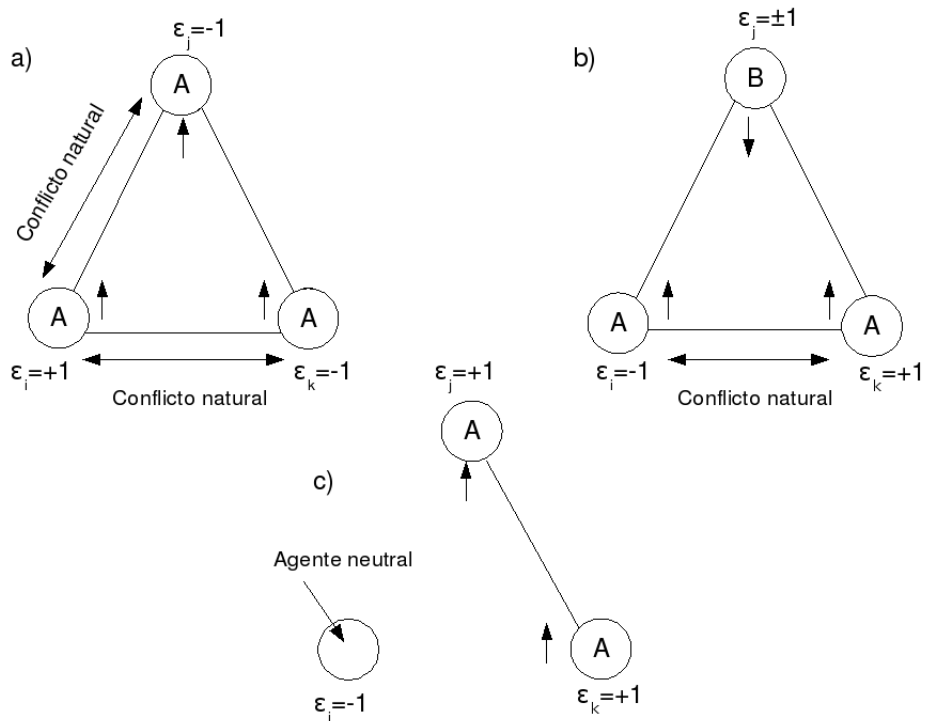


Figura 3.2: Configuraciones en donde se tiene un conflicto natural. El primer caso se da cuando todos los agentes están en la misma coalición pero sus propensiones naturales son diferentes (a). Dos actores están en una coalición y uno está en la opuesta (b). Dos agentes están en conflicto con otro y éste prefiere romper la red permaneciendo neutral ante la situación (c). Las flechas indican el estado del espín del agente, el cual determina la coalición en la que se encuentra ( $A$  ó  $B$ ).

absoluto sobre las  $\eta_i$ 's como se muestra a continuación:

$$H^{(3)} = \sum_{i,j,k}^N \frac{t_{ijk}}{3} \left( \frac{3 - |\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k|}{2} \right) |\eta_i \eta_j \eta_k|. \quad (3.5)$$

Como estamos en un sistema donde tenemos sólo dos coaliciones por ahora, entonces los valores de las variables  $\eta_i = \pm 1$  para cada  $i$ , por lo que  $|\eta_i \eta_j \eta_k| = 1$  en cualquier caso, y por lo tanto la ecuación (3.5) queda como:

$$H^{(3)} = \frac{|t_{ijk}|}{6} (3 - |\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k|). \quad (3.6)$$

3. Se pueden tener tres posibles configuraciones donde se genere un conflicto natural: cuando todos los actores se encuentran en la misma coalición (todos los espines hacia abajo o hacia arriba) (Figura 3 a)), dos actores se alían contra un tercero (Figura 3 b)), y uno de los actores prefiere “romper” el triángulo y mantenerse neutral abandonando la red (Figura 3 c)). Se necesita asignar una penalización en la energía para cada uno de estos escenarios, por lo que se va a insertar una función  $f(\eta_i, \eta_j, \eta_k)$  en la ecuación anterior (3.6). Se puede ver en el ejemplo de la guerra de Irak que el sistema es más estable cuando el triángulo se rompe, por lo que el modelo prefiere este caso en lugar de tratar de construir una coalición o una pelea artificial. Esta solución es la de menor costo energético debido a que la penalización asociada es considerada automáticamente por la definición de la  $|t_{ijk}|$  (3.3), la cual es cero si el triángulo está roto. En otro de los escenarios, cuando  $\eta_i = \eta_j = \eta_k$ ; el conflicto se resuelve por medio una coalición artificial. Esta situación se va a penalizar con una energía  $W_1$  y se va a introducir en la  $f(\eta_i, \eta_j, \eta_k)$  a través de la función auxiliar  $f_1(\eta_i, \eta_j, \eta_k)$ . Donde esta última vale uno cuando todos los actores pertenecen a la misma coalición, y cero en el caso contrario,

$$f_1(\eta_i, \eta_j, \eta_k) = \left( \frac{|\eta_i + \eta_j + \eta_k| - 1}{2} \right). \quad (3.7)$$

En el último escenario posible, donde dos de los actores se encuentran en la misma coalición y el tercero es el enemigo, se puede utilizar una función  $f_2(\eta_i, \eta_j, \eta_k)$  que va a permitir considerar este caso al encontrar la energía. Esta función vale uno si dos actores se encuentran en la misma coalición y cero en el otro caso, por lo que la expresión para esta función queda como,

$$f_2(\eta_i, \eta_j, \eta_k) = 1 - f_1(\eta_i, \eta_j, \eta_k) = \left( \frac{3 - |\eta_i + \eta_j + \eta_k|}{2} \right). \quad (3.8)$$

Para esta función se agrega también una penalización de energía  $W_2$  cuando  $f_2(\eta_i, \eta_j, \eta_k) = 1$ . De lo anterior se puede ver que la  $f(\eta_i, \eta_j, \eta_k)$  queda como,

$$f(\eta_i, \eta_j, \eta_k) = W_1 f_1(\eta_i, \eta_j, \eta_k) + W_2 f_2(\eta_i, \eta_j, \eta_k)$$

y por lo tanto, la expresión para el Hamiltoniano de tres cuerpos es,

$$H^{(3)} = \frac{|t_{ijk}|}{6} (3 - |\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k|) \times \quad (3.9)$$

$$[W_1 f_1(\eta_i, \eta_j, \eta_k) + W_2 f_2(\eta_i, \eta_j, \eta_k)]. \quad (3.10)$$

Por lo que finalmente tenemos que,

$$H^{(3)} = \frac{\delta W}{6} |t_{ijk}| (3 - |\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k|) |\eta_i + \eta_j + \eta_k| + E_r^{(3)}, \quad (3.11)$$

donde  $\delta W = (W_1 - W_2)/2$ , y  $E_r^{(3)}$  es un cambio en la energía que sólo depende del número de triángulos en conflicto natural,

$$E_r^{(3)} = \frac{|t_{ijk}|}{6} (3 - |\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k|) \left( \frac{3W_2 - W_1}{2} \right). \quad (3.12)$$

Este Hamiltoniano final  $H^{(3)}$  considera todos los posibles escenarios que se tienen al presentarse efectos de tres cuerpos. El efecto de (3.11) es incrementar la energía de los triángulos en los que se tiene un conflicto natural. Si se inserta una coalición artificial, esta tiene una penalización determinada por  $W_1$ , mientras que si el conflicto natural se resuelve peleando contra del enemigo común (como sería el caso en el que tenemos dos aliados y un enemigo), el valor de  $W_2$  es el que establece cuantitativamente el aumento de la energía.

Este término de tres cuerpos considera que las configuraciones que van a minimizar la energía, van a ser aquellas en donde los actores estén en una alianza tal, que su estado de espín coincida con las propensiones naturales, evitando así la mayor cantidad de conflictos naturales posibles. Por lo tanto, este modelo plantea que los actores del sistema van a cooperar (pelear) entre sí en caso de tener las mismas (diferentes) propensiones naturales, permaneciendo así en la misma línea en la que Galam presentó su modelo. Esto nos indica que las interacciones de tres cuerpos también van a estar determinadas por las propensiones naturales, lo cual hace que nuevamente sean unos conceptos de vital importancia dentro del modelo, y por lo tanto, resulta muy importante la descripción de las mismas en términos sociales, ya que estos parámetros son los que van a representar en mayor medida las características económicas, sociales, políticas, religiosas o militares, que tiene cada actor del sistema.

## 3.2. Aplicación a la Guerra de Irak

Ahora que ya se tiene un modelo donde sí se toman en cuenta las interacciones de tres cuerpos entre los actores, por lo que se va a retomar el ejemplo presentado al inicio del capítulo donde se plantea un modelo simplificado de la guerra de Irak que comenzó en el 2003.

Como el término de tres cuerpos se incluyó en el modelo de Galam como una perturbación, resulta muy importante cómo se comporta el modelo para diferentes valores del parámetro perturbativo. Para hacer este análisis es necesario tomar a las energías  $E_X$  de cada configuración  $X$  como función de  $\alpha$ , para así obtener una gráfica con  $\alpha$  en las abscisas y  $E_X(\alpha)$  en las ordenadas y poder realizar el análisis de mejor manera mediante la observación del comportamiento de las energías de cada configuración para cada  $\alpha$ .

Para el cálculo de las energías de cada configuración se utilizaron los siguientes valores para los parámetros establecidos en el Hamiltoniano:  $|J'_{ij}| = 0$ ,  $t_{ijk} = C_{ij}C_{ik}C_{jk}$ , con  $C_F = 10$ ,  $C_E = 3$  y  $C = 1$  para todas las  $i, j, k$ . El valor de las energías que penalizan las diferentes situaciones son:  $W_2 = 1$  y  $W_1 = 0$ . El hecho de anular a la  $W_1$  implica que no va a haber ninguna penalización por insertar alguna coalición artificial, es decir, que no se le va a dar importancia al hecho de que todos los actores estén en la misma coalición o no. Esta consideración es válida debido a que  $H^{(3)}$  no cambia la energía de las configuraciones donde hay triángulos de actores con el mismo estado de espín (o que pertenecen a la misma coalición). La energía correspondiente no es alterada por  $\alpha$  como se puede ver en la figura 3,3.

Los resultados presentados en la figura 3,3 muestran la sensibilidad del modelo presentado al parámetro  $\alpha$ , lo cual es de gran importancia para cuantificar el papel que juega el término de tres cuerpos al obtener las energías de las configuraciones del sistema. Sin embargo para entender más a fondo el funcionamiento del Hamiltoniano  $H^{(3)}$ , se va a considerar el caso del  $\alpha$  pequeña. El espín es el objeto físico con el que se han desarrollado todos los modelos hasta ahora presentados, y es por esto que se pueden obtener las eigen-energías del Hamiltoniano (3.1) al tomar el valor esperado de  $H^{(3)}$  en el estado  $|\Phi\rangle$  de  $H^{(2)}$ , con energía  $E^{(2)}$ ,

$$E = E^{(2)} + \langle \Phi | H^{(3)} | \Phi \rangle, \quad (3.13)$$

donde para obtener el valor del último término de la ecuación (3.13), se debe retomar la expresión (3.11). Haciendo un análisis de este término de tres cuerpos para este caso en particular, podemos separar el mismo en dos sumas. En la pri-

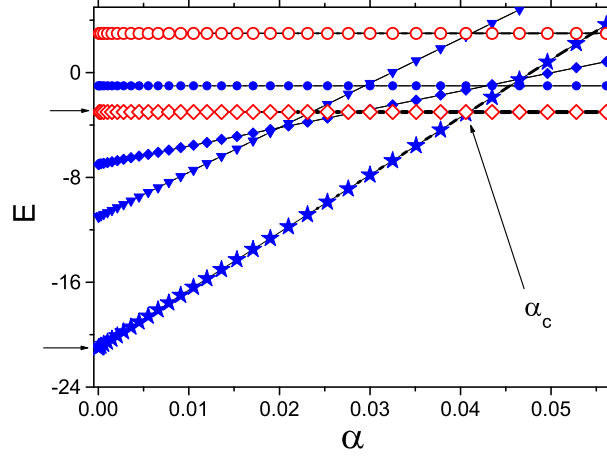


Figura 3.3: Variación de las energías con el aumento del parámetro perturbativo  $\alpha$ .

mera se contempla el caso de los triángulos donde dos de los actores están en una coalición y el tercero está en otra, coincidiendo las propensiones naturales con los estados del espín, i.e.,  $\eta_i = \varepsilon_i, \eta_j = \varepsilon_j, \eta_k = \varepsilon_k$ . La segunda suma considera los triángulos donde se tienen conflictos naturales, por lo tanto los actores se encuentran en la misma coalición ( $\eta_i = \eta_j = \eta_k$ ) pero sus propensiones naturales son diferentes. Tomando en cuenta el análisis anterior podemos reescribir el último término de la ecuación (3.13) como,

$$\langle \Phi | H^{(3)} | \Phi \rangle = \frac{\alpha \delta W}{6} (2 \sum_{\Delta} |t_{ijk}| + 6 \sum_{\Delta'} |t_{ijk}|) + \alpha E_r^{(3)}, \quad (3.14)$$

donde  $\Delta$  representa a los triángulos donde hay dos actores en una misma coalición y el restante está en la contraria sin tener conflictos naturales, mientras que  $\Delta'$  son los triángulos donde sí se tienen estos conflictos. De la expresión (3.14) podemos ver que hay diferentes cambios de energía para diferentes estados de espín. La forma en la que se planteó el valor esperado de  $H^{(3)}$  resulta conveniente para analizar y comparar el modelo de tres cuerpos respecto a los resultados obtenidos cuando no se consideraban más de dos interacciones.

Para probar la modificación que se le hizo al modelo (el término perturbativo que se introdujo en el Hamiltoniano de Galam), es necesario comparar los

resultados obtenidos con el modelo de tres cuerpos con los que se obtuvieron al considerar a  $M$  e  $I$  neutrales sin el término de tres cuerpos. En este segundo caso no había triángulos en el sistema y el único enlace que se tenía era el de  $-C_E$ . Sin embargo, al considerarse las interacciones de tres cuerpos la solución con el  $H^{(3)}$  puede tener más energía. Esto sucede gracias a que existen cuatro triángulos donde hay conflictos naturales. La energía del sistema en el estado base  $E_0 \approx E_0^{(2)} + \langle \Phi_0 | H^{(3)} | \Phi_0 \rangle$  al considerar a todos los países es,

$$E_0 \approx E_0^{(2)} + \frac{\alpha \delta W}{3} \left( \sum_{\Delta} |t_{ijk}| \right). \quad (3.15)$$

Ya que en el estado base no hay conflictos naturales debido a que el sistema está estable, eliminándose así tanto la suma que considera los triángulos con este tipo de conflictos de la ecuación (3.14), como el término dado por (3.12) que representa una energía que sólo depende de los triángulos en conflicto natural.

El caso en el que  $M$  e  $I$  son neutrales resulta favorable cuando,

$$E_0^{(2)} + \frac{\alpha \delta W}{3} \sum_{\Delta} |t_{ijk}| > -C_E, \quad (3.16)$$

lo que lleva a la condición sobre el parámetro  $\alpha$  de cumplir la siguiente relación,

$$\alpha > \frac{3}{\delta W} \left( \frac{C_F + 2C_E + 2C}{\sum_{\Delta} |t_{ijk}|} \right), \quad (3.17)$$

donde si tomamos el siguiente caso en particular,

$$\sum_{\Delta} |t_{ijk}| = \sum_{\Delta} C_{ij} C_{jk} C_{ki} = C_E (C_F + C) (C_E + C). \quad (3.18)$$

En la figura 3,3 podemos ver que hay un cruce entre las líneas que tienen una flecha al inicio. El resultado anterior se puede utilizar para predecir en qué punto es el cruce, es decir, para qué valor de  $\alpha$  la energía del modelo de tres cuerpos resulta igual a la que se calculó con el modelo de Galam al considerar la neutralidad de algunos actores. Utilizando el valor de los parámetros establecidos para la figura 3,3 se obtiene que el valor “crítico” del parámetro es  $\alpha_C = 18/44 = 0,409\dots$ . Este valor coincide con el de la intersección entre las soluciones del modelo de tres cuerpos y cuando  $M$  e  $I$  están neutrales, el cual es una línea horizontal en la figura 3,3 con  $E = -C_E = -3$ . De hecho, se puede hacer un análisis más detallado de



la naturaleza de la solución en el caso general al suponer que  $C_F \gg C_E \gg C$ , de donde se obtiene que,

$$\alpha_C \approx \frac{3}{\delta W C_E^2} \left( 1 + 2 \frac{C}{C_F} + 2 \frac{C_E}{C_F} \right) \approx \frac{3}{\delta W C_E^2}. \quad (3.19)$$

Si se observa con detenimiento este resultado puede encontrarse que en el límite donde  $C_E \rightarrow 0$  entonces  $\alpha_C \rightarrow \infty$ . Esto indica que en caso de que el enlace o la “amistad” más fuerte sea mucho más grande que las otras y que a su vez, estas sean casi cero, entonces el valor crítico de nuestro parámetro se va a ir a infinito y nunca vamos a tener una intersección. Por lo tanto, en este escenario siempre se va a estar en guerra ya que nunca se va a alcanzar la solución en la que todos están en paz.

Por otro lado si consideramos que  $C_E \rightarrow C_F$ , se tiene que,

$$\alpha_C \rightarrow \frac{9}{\delta W C_F^2}. \quad (3.20)$$

Si tenemos una amistad muy grande, en el límite se puede que ver  $\alpha_C \rightarrow 0$ . Lo que implica la neutralidad de algunos de los agentes en cuestión, ya que la intersección entre las curvas va a ser en una  $\alpha$  muy pequeña. En otras palabras, en caso de que el conflicto entre los agentes aumente demasiado respecto a la amistad más fuerte (en este caso determinada por el parámetro  $C_F$ ), algunos países del modelo preferiran permanecer neutrales ante la situación. Esto sucedió en la guerra real, mientras el conflicto aumentaba entre Irak y los Estados Unidos, los musulmanes y los judíos se mantuvieron al margen sin entrar en la guerra entre los dos primeros. Hoy en día el conflicto continúa, se planean mandar 12 000 tropas más por parte de los Estados Unidos y no hay fecha para una resolución del mismo.

# Capítulo 4

## El modelo de Potts

### 4.1. Generalidades del modelo de Potts

El modelo de Ising para sistemas ferromagnéticos considera solamente dos estados posibles para el espín, arriba (+1) y abajo (-1). En este capítulo se va a hacer una extensión de los modelos anteriores (basados en el modelo de Ising ferromagnético), al utilizar el modelo de Potts. En éste, el espín tiene  $p$  estados permitidos por lo que resulta una herramienta muy útil para modelar la formación de alianzas ya que se contarían con el mismo número de alianzas que de estados (siguiendo la línea de modelación que planteó Galam).

Para poder hacer una comparación con los resultados obtenidos a través del modelo de Ising, solamente se va a considerar el caso en el que  $p = 3$ , ya que así se tendrían dos coaliciones en conflicto y una en donde los actores permanecen neutrales ante un conflicto. Esta última configuración es muy importante para el estudio de sistemas en los que se considera una polarización social, como es el ejemplo con el que se ha trabajado, la guerra de Irak del 2003.

Galam y Florian [24] consideraron el modelo de Potts al tratar de considerar más coaliciones posibles para el sistema, tomando en cuenta la neutralidad como uno de los estados permitidos para cada actor, sin embargo no realizaron ninguna aplicación en la que se pudiera observar la importancia de esta nueva consideración.

En otro trabajo [29], se utilizó el modelo de Potts para modelar la formación de alianzas al utilizar una constante de acoplamiento aleatoria y diferente para cada espín, por lo que se aborda el tema desde otra perspectiva, pues en este trabajo las interacciones entre los espines se han considerado constantes para todo espín

y todo sitio en la rejilla.

Para la construcción de este modelo se va a utilizar el Hamiltoniano presentado en el capítulo introductorio, el cual considera el número de estados posibles  $p$  y está dada por [29]

$$H^{(2)} = - \sum_{i < j}^N J_{ij} (p \delta_{\sigma(i), \sigma(j)} - 1), \quad (4.1)$$

donde se tiene que el estado  $\sigma(i)$  puede tomar los valores  $0, 1, 2, \dots, p - 1$ , y la  $\delta_{\sigma(i), \sigma(j)}$  es la delta de Kroenecker para los estados  $\sigma(i)$  y  $\sigma(j)$ . La suma se extiende a lo largo de los  $N(N - 1)/2$  pares. La  $J_{ij}$  es la energía de interacción entre los agentes  $i$  y  $j$ .

En el proceso de la formación de coaliciones se deben considerar a los agentes que se mantienen neutrales ante algún tipo de polarización, esto se puede lograr por medio del modelo de Potts ya que se tienen más estados que en el de Ising. En los modelos anteriores esto no se trataba como un estado de espín sino como un cambio en la conectividad de la red, lo cual no permitía observar de manera clara cómo se debían formar las coaliciones. Como se dijo anteriormente para contemplar esta neutralidad de los actores, se va a trabajar con  $p = 3$ , en donde  $\sigma(i) = 1$  cuando el actor  $i$  está en la coalición  $A$ , y  $\sigma(i) = 2$  cuando pertenece a la  $B$ . El agente  $i$  en cuestión va a tener una posición neutral en el sistema cuando  $\sigma(i) = 0$ , perteneciendo a una coalición neutral  $C$ . Este estado neutral se va a representar como una flecha horizontal que apunta hacia ambos lados. Por lo tanto, cada actor puede estar en la coalición  $A$ , la  $B$  o  $C$ .

## 4.2. Aplicación del modelo de Potts

Al igual que en el modelo de Galam, se va a analizar una simplificación de la Guerra de Irak del 2003 con el modelo de Potts. Se van a tomar en cuenta las mismas interacciones y parámetros debido a que lo que cambió fue el Hamiltoniano, no las interacciones entre los agentes que se van a estudiar. Por lo tanto, vamos a considerar que las interacciones entre los países van estar dadas por la ecuación (2.11) y por el cuadro 3,2, así como las mismas propensiones naturales para cada país (cuadro 3,1). Por lo tanto, se va a seguir trabajando dentro del escenario de la Guerra Fría.

Tomando en cuenta las tablas anteriores se encontró el estado base del sistema utilizando el Hamiltoniano de Potts (4.1). Siguiendo el principio de mínima

energía (como se hizo anteriormente), se obtuvieron seis configuraciones con la energía más baja, las cuales satisfacen las propensiones naturales de cada uno de los actores ( $\epsilon_i$ 's) y se pueden resumir en dos situaciones. La primera contempla aquellas configuraciones en donde los países con las mismas propensiones naturales se agrupan, teniendo a unos actores en alguna de las coaliciones ( $A$  ó  $B$ ), y a los otros en la coalición neutral  $C$ . La segunda considera las configuraciones donde sí hay conflicto, es decir, de igual manera se agrupan los países respecto a sus propensiones naturales pero en este caso, unos actores están en la coalición  $A$  y los otros en la  $B$  o viceversa. El estado base correspondiente tiene una energía  $E_0^{(2)} = -(2C_F + 3C_E + 3C)$ .

Analizando los cálculos anteriores, se puede observar que nuevamente los resultados no concuerdan con lo acontecido en esta guerra. La energía más baja corresponde a configuraciones donde hay conflicto entre la coalición  $A$  formada por  $U$  e  $I$  y la  $B$  por  $Q$  y  $M$ , o por otro lado, a configuraciones donde alguna de estas coaliciones se mantiene neutral y no hay guerra.

Sin embargo como se había dicho antes, la situación real fue otra. En este caso no se va a poder tomar en cuenta la situación real en su totalidad debido a la naturaleza del Hamiltoniano de Potts. En otras palabras, al obtener la energía de la configuración en la que  $M$  e  $I$  se mantienen neutrales ésta resulta muy alta, y por lo tanto no es comparable con el valor obtenido para las configuraciones anteriores. Sin embargo, si  $M$  se mantiene neutral e  $I$  se alía con  $U$  para luchar contra  $Q$ , la energía resulta de  $E = -(3C_E + 2C_F)$ .

En este modelo ya se toma en cuenta la neutralidad como un estado de los agentes, sin embargo las interacciones de tres cuerpos siguen siendo un factor determinante para un mejor estudio de los procesos de formación de coaliciones. Por lo tanto, a continuación se presenta un modelo de Potts donde se toman en cuenta las interacciones de tres cuerpos.

### 4.3. Considerando las interacciones de tres cuerpos

El modelo que se presenta a continuación se va a construir de la misma manera en la que se introdujeron las interacciones de tres cuerpos al modelo de Galam. Como se pretende hacer una extensión de este último, se van a utilizar las mismas variables y parámetros para la construcción del nuevo modelo. Por lo tanto, se va a seguir trabajando dentro del escenario de la Guerra Fría y las propensiones naturales van a estar dadas por las  $\epsilon_i$ 's, las cuales dependen de cada actor  $i$ . El parámetro de acoplamiento para cada uno de los triángulos formados por los actores

$i, j$  y  $k$  se va a representar por la  $t_{ijk}$ , y está dado por (3.3).

Para considerar los efectos de las interacciones de tres cuerpos se va a seguir la misma línea utilizada para el modelo de Ising, pues se va a adicionar un término perturbativo  $H^{(3)}$  al Hamiltoniano original (4.1), al igual que en la ecuación (3.1). Para la obtención de este nuevo término, primero se deben de considerar los triángulos en los que existen los conflictos naturales como se hizo anteriormente (3.4). Por lo tanto, se tiene que

$$H^{(3)} = \sum_{i,j,k} \frac{|t_{ijk}|}{3} \left( \frac{3 - |\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k|}{2} \right) f(\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k)), \quad (4.2)$$

donde  $f(\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k))$  es una función que no está determinada. Ésta debe mostrar los costos que se tienen al resolver los conflictos naturales. Como en este caso la neutralidad se contempla en uno de los estados, no hay necesidad de que exista una configuración donde uno de los agentes es desconectado de la red. Las configuraciones restantes donde se presentan conflictos naturales se van a analizar a continuación.

1. Se puede introducir una coalición artificial con un costo  $W_1^p$ . En este caso, todos los espines tienen el mismo estado (figura 4,1 a)), por lo tanto, la primera contribución para la función  $f(\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k))$  es de la forma  $\delta_{\sigma(i),\sigma(j)}\delta_{\sigma(i),\sigma(k)}\delta_{\sigma(j),\sigma(k)}$ . Esta combinación es +1 cuando todos los agentes se encuentran en la misma coalición y 0 en cualquier otro caso. Sin embargo si tenemos tres actores que son neutrales, es claro que no tenemos ningún conflicto entre ellos aunque tengan el mismo estado (figura 4,1 c)). Para considerar esto, multiplicamos la función previa por un factor que es cero cuando los tres países son neutrales, por lo que  $f(\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k))$  tiene una contribución dada por,

$$W_1^p \delta_{\sigma(i),\sigma(j)} \delta_{\sigma(i),\sigma(k)} \delta_{\sigma(j),\sigma(k)} \left( \delta_{\sigma(i),1} + \delta_{\sigma(i),2} \right).$$

2. Dos actores se encuentran en la misma coalición, y el tercero se encuentra en la coalición contraria o es neutral (figura 4,1 b) y d)). Debido a que no se tiene ningún costo en la energía cuando los actores son neutrales, sólo se debe contemplar el caso en el que el tercero está en la coalición opuesta. Una penalización  $W_2^p$  se asigna a esta configuración a través de una función que es +1 cuando dos espines están en la coalición  $A$  ó  $B$ , mientras que el

tercero se encuentra en la coalición opuesta (figura 4,1 b)). La contribución de este caso a la función  $f(\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k))$  tiene la siguiente forma,

$$W_2^P \left[ \begin{array}{c} (\delta_{\sigma(i),1} + \delta_{\sigma(i),2}) (\delta_{\sigma(j),1} + \delta_{\sigma(j),2}) (\delta_{\sigma(k),1} + \delta_{\sigma(k),2}) \\ -\delta_{\sigma(i),\sigma(j)} \delta_{\sigma(i),\sigma(k)} \delta_{\sigma(j),\sigma(k)} (\delta_{\sigma(i),1} + \delta_{\sigma(i),2}) \end{array} \right].$$

Por lo que finalmente, al sumar ambas contribuciones se tiene que,

$$f(\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k)) = \left[ \begin{array}{c} (W_1^P - W_2^P) \delta_{\sigma(i),\sigma(j)} \delta_{\sigma(i),\sigma(k)} \delta_{\sigma(j),\sigma(k)} (\delta_{\sigma(i),1} + \delta_{\sigma(i),2}) \\ + W_2^P (\delta_{\sigma(i),1} + \delta_{\sigma(i),2}) (\delta_{\sigma(j),1} + \delta_{\sigma(j),2}) (\delta_{\sigma(k),1} + \delta_{\sigma(k),2}) \end{array} \right].$$

Ahora que ya se cuenta con un modelo que toma en cuenta las interacciones de tres cuerpos, y además contempla el estado de neutralidad entre los agentes, se va a aplicar a la situación con la que se ha trabajado en esta tesis: la Guerra de Irak del 2003. Para hacer esto se van a utilizar los mismos parámetros que se ocuparon para el Hamiltoniano del modelo de Galam:  $|J'_{ij}| = 0$ ,  $t_{ijk} = C_{ij}C_{ik}C_{jk}$ , con  $C_F = 10$ ,  $C_E = 3$  y  $C = 1$  para todas las  $i, j, k$ . En este caso se van a tomar  $W_2^P = 1$  y  $W_1^P = 0$ , ya que nuevamente no va a haber ninguna penalización por insertar una coalición artificial.

En la figura 4,3 se muestra nuevamente la sensibilidad del modelo al parámetro perturbativo  $\alpha$ . Al aplicar el modelo con las interacciones de tres cuerpos, de nuevo aparecen como las más probables cuatro de las seis configuraciones obtenidas anteriormente con energía  $E = -(2C_F + 3C_E + 3C)$ . Estas corresponden a la situación en donde no hay guerra pues unos actores se quedan neutrales y otros en alguna de las coaliciones ( $A$  ó  $B$ ), respetando siempre las propensiones naturales. Por otro lado, las otras dos configuraciones en donde sí hay guerra también aparecen en la figura 4,3, sin embargo éstas sí son afectadas por el término de tres cuerpos y conforme este término tiene más peso, la energía de las mismas aumenta. Estas últimas configuraciones son las de mayor importancia para el modelo y son las que se van a analizar para estudiar las interacciones de tres cuerpos. El caso en el que no hay guerra no es relevante, ya que si bien predice lo que sería mejor para el mundo en cuanto a los conflictos, i.e., que no haya guerras, es un resultado que no muestra ninguna situación real.

De la misma manera que para el modelo de Galam, se va a considerar  $\alpha$  pequeña para estudiar el funcionamiento del término de tres cuerpos  $H^{(3)}$ . Haciendo un análisis del término de tres cuerpos (4.2) similar al que se hizo para el modelo de Galam, podemos separar nuevamente el valor esperado del  $H^{(3)}$  en dos sumas. La primera considera los triángulos en donde dos de los actores están en

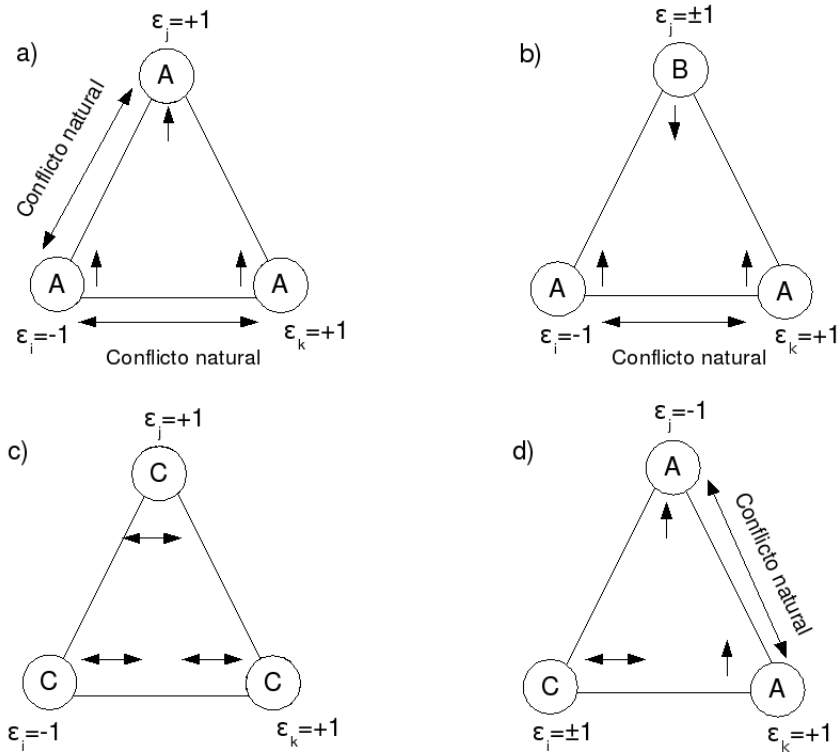


Figura 4.1: Configuraciones donde existe conflictos naturales en el modelo de Potts. Cuando todos los actores están en la misma coalición y las propensiones naturales son diferentes se tiene un conflicto natural (a). Esto se cumple a menos que esta coalición esté formada por los agentes neutrales (c). Dos actores en conflicto natural están aliados contra un tercero, donde este último puede estar en la coalición opuesta (b), o ser neutral (d).

la coalición  $A$  ( $B$ ) y el tercero está en la  $B$  ( $A$ ), manteniendo las propensiones naturales iguales a los estados del espín, i.e.,  $\eta_i = \varepsilon_i, \eta_j = \varepsilon_j, \eta_k = \varepsilon_k$ . La segunda suma contempla a los triángulos donde se tienen conflictos naturales, por lo que todos los actores se encuentran en la misma coalición. El estado neutral también es contemplado en este caso, pero si se toma en cuenta que algún actor se encuentra neutral, la función  $f(\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k))$  se hace cero y no hay un término que contribuya a la suma. Por lo tanto, el valor esperado del término de tres cuerpos del modelo de Potts (4.2) queda como,

$$\langle \Phi | H^{(3)} | \Phi \rangle = \frac{\alpha W_2^p}{3} \left( \sum_{\Delta} |t_{ijk}| + \sum_{\Delta'} |t_{ijk}| \right), \quad (4.3)$$

donde  $\Delta$  representa a los triángulos donde hay dos actores en una misma coalición y el restante está en la contraria sin tener conflictos naturales, mientras que  $\Delta'$  son los triángulos donde sí se tienen estos conflictos. Esta forma de plantear el valor esperado (4.3) resulta muy conveniente para hacer la comparación entre los resultados del modelo de tres cuerpos, y el modelo con interacciones por pares.

La comparación de los resultados en este caso es un poco diferente a la que se tuvo en el modelo de Galam, ya que en este caso el estado con el que se va probar el término perturbativo va a ser donde sólo  $M$  es neutral y  $U$  e  $I$  luchan contra  $Q$ . Esto se requiere debido a que la estructura del Hamiltoniano de Potts no permite trabajar con el caso real, ya que al tener tanto a  $M$  como a  $I$  neutrales, la energía de este sistema aumenta considerablemente respecto a la propuesta anteriormente (sólo  $M$  neutral). Dicha configuración cuenta con una energía  $E = -(3C_E + 3C)$ . Sin embargo, puede suceder que al considerarse las interacciones de tres cuerpos la solución con el  $H^{(3)}$  puede tener más energía al igual que en el modelo de Galam. La energía del sistema en el estado base se obtiene de la misma manera que para el modelo anterior (3.15), y está dado por,

$$E_0 \approx E_0^{(2)} + \frac{\alpha W_2^p}{3} \left( \sum_{\Delta} |t_{ijk}| \right).$$

El caso en el que  $M$  es neutral resulta favorable cuando,

$$E_0^{(2)} + \frac{\alpha W_2^p}{3} \sum_{\Delta} |t_{ijk}| > -(3C_E + 2C_F), \quad (4.4)$$

lo que lleva a la condición sobre el parámetro  $\alpha$  de cumplir la siguiente relación,

$$\alpha > \frac{9}{W_2^p} \left( \frac{C}{\sum_{\Delta} |t_{ijk}|} \right), \quad (4.5)$$



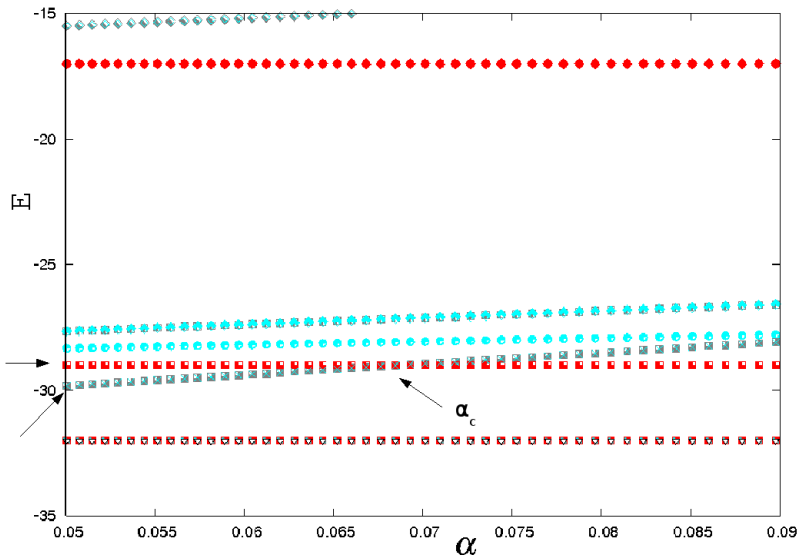


Figura 4.2: Variación de la energía del modelo de Potts al aumentar el parámetro perturbativo  $\alpha$ .

donde se puede obtener el denominador de la expresión anterior de la misma manera que se hizo anteriormente (3.18).

En la figura anterior se puede ver el cruce entre las líneas que están marcadas por una flecha al inicio. Con el resultado anterior (4.5) se puede calcular el punto de intersección al especificar el valor de los parámetros. Este cruce nos indica para qué valor del parámetro perturbativo  $\alpha$  el modelo de tres cuerpos predice una energía igual a la del modelo de Potts con  $M$  neutral. Sustituyendo los valores de los parámetros establecidos arriba se tiene que  $\alpha_C = 3/44 = 0,06818\dots$  El cual coincide con el de la intersección con el de la intersección entre las soluciones del modelo de tres cuerpos y cuando  $M$  está neutral, el cual es la línea horizontal en la figura 4,3 que cuenta con una flecha en el inicio.

En este caso debido a que el modelo de Potts no permitió representar la situación real de la guerra de Irak que inició en el 2003, el análisis general del modelo no es trascendente para este trabajo. Como el problema principal de este modelo surgió de la estructura del Hamiltoniano de Potts (el cual utiliza la función delta de Kroenecker), las energías obtenidas antes de incluir el término de tres cuerpos presentaron problemas para describir el ejemplo propuesto desde un inicio. Por lo tanto se recomienda la utilización de otro modelo de espines en donde se tomen en cuenta más de dos estados para la aplicación del mismo en estos fenómenos

de polarización social, ya que, aunque el modelo de Potts es una de las generalizaciones del modelo de Ising no funcionó como se suponía al incluir un tercer estado.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En conclusión, se mostró que las interacciones de tres cuerpos son muy importantes en el proceso de formación de coaliciones, un modelo que no las contemple va a proporcionar resultados incompletos y poco precisos. Se presentó un Hamiltoniano en el que se toman en cuenta estas interacciones en una situación de polarización social, el cual surgió en primera instancia al modificar el modelo de Galam. Los modelos presentados se obtuvieron al adicionar un término perturbativo a los Hamiltonianos utilizados para los modelos de espines de Ising y de Potts. En el primer caso se tienen predicciones con efectos interesantes, como por ejemplo, cuáles son los límites de la amistad entre dos entes sociales. Sin embargo al modificar el modelo de Potts se encontró algo diferente, ya que el Hamiltoniano de este modelo de espines no es adecuado para esta aplicación. Esto se debe a que la estructura de dicha expresión no permite que se trabaje con el principio de “mínima energía” utilizado en el caso de Ising.

Es necesario mencionar que sólo se consideraron los efectos de tres cuerpos en triángulos formados por los actores, utilizando sólo los vecinos cercanos de cada uno de ellos para calcular las interacciones. Sin embargo, es claro que no todos los efectos de tres cuerpos surgen de triángulos como primera instancia. Un agente puede modificar la interacción entre otros dos por influencia indirecta y no necesariamente tiene que ser un vecino cercano. El mejor ejemplo de esto son los chismes, en los cuales una tercera persona (que puede tener poco contacto con las otras dos), puede afectar la relación entre otros dos individuos. A pesar de esto, siempre se puede renormalizar las interacciones de manera que se puedan tener triángulos entre los agentes.

Otro aspecto importante que se debe señalar es que no se tomó en cuenta una evolución temporal de los espines, ya que se consideró que los sistemas no evolu-

cionaban en el tiempo y por lo tanto los Hamiltonianos no dependían del mismo, y es por esto que con ellos obtuvimos la energía de los sistemas. También es importante señalar que las perturbaciones con las que se trabajaron fueron lineales y no se consideraron términos perturbativos diferentes.

Por lo tanto, se puede decir que los modelos presentados en este trabajo son muy simples, sin embargo pretenden mostrar la importancia de las interacciones de tres cuerpos en los fenómenos de polarización social y esperamos que sirvan como estimulantes para que en investigaciones futuras se consideren dichos efectos en los modelos de sistemas sociales. Debido a que estas interacciones son reales y muy importantes, la aportación principal de esta tesis radica en mostrarle a la comunidad científica el hecho de que los efectos de orden mayor a dos no pueden ser despreciados, éstos deben ser incluidos en los modelos futuros para una mejor descripción de los sistemas, ya sean sociales, biológicos o físicos.

# Bibliografía

- [1] A. SRBLJINOVIC, O. SKUNCA, *An Introduction to Agent Based Modelling and Simulation of Social Processes*, Interdisciplinary Description of Complex Systems 1(1-2), 1-8 (2003).
- [2] J. MOFFAT, *Complexity Theory and Network Centric Warfare* (CCRP Publication Series, USA, 2003).
- [3] Y. BAR-YAM, *Dynamics of Complex Systems* (Perseus Books, USA, 1997).
- [4] P. BALL, *Utopia Theory*, Physics World, October (2003), pp. 29.
- [5] D. SORNETTE, *Complexity, Catastrophe and Physics*, Physics World, December (1999), pp. 57.
- [6] D. L. TURCOTTE, J. RUNDLE, *Self-organized complexity in the physical, biological, and social sciences*, National Academy of Sciences USA **99**, 2463-2465 (2002).
- [7] B. DROSSEL, F. SCHWABL, *Self-Organized critical forest-fire model*, Phys. Rev. Lett. **69**, 1629-1632 (1992).
- [8] J. RUNDLE, *Earthquakes, self-organization and Scaling*, Physics World Novembre 1989, pp. 22.
- [9] D. TURCOTTE, B. MALAMUD, F. GUZZETTI, P. REICHENBACH, *Self-organization, the cascade model, and natural hazards*, National Academy of Sciences USA **99**, 2530-2537 (2002).
- [10] D. HELBING, P. MOLNÁR, *Social force model for pedestrian dynamics*, Phys. Rev. E **51**, 4282-4286 (1995).

- [11] Y. TAJIMA, K. TAKIMOTO, T. NAGATANI, *Scaling of pedestrian channel flow with a bottleneck*, Physica A **294**, 257-268 (2001).
- [12] B. KERNER, P. KONHÄUSER, *Cluster effect in initially homogeneous traffic flow*, Phys. Rev. E **48**, 2335-2338 (1993).
- [13] D. HELBING, *Improved fluid-dynamic model for vehicular traffic*, Phys. Rev. E **51**, 3164-3169 (1995).
- [14] P. BALL, *The physical modelling of society: a historical perspective*, Physica A **314**, 1-14 (2002).
- [15] S. GALAM, *Application of statistical physics to politics*, Physica A **274**, 132-139 (1999).
- [16] S. GALAM, *Socialphysics: a personal testimony*, Physica A **336**, 49 (2004).
- [17] S. GALAM, Y. GEFEN, Y. SHAPIR, *Sociophysics: A mean behavior model for the process of strike*, Journal of Mathematical Sociology **9**, 1-13 (1982).
- [18] S. GALAM, S. MOSCOVICI, *Towards a theory of collective phenomena: Consensus and Attitude changes in groups*, European Journal of Social Psychology **21**, 49-74 (1991).
- [19] K. SZNAJD-WERON, J. SZNAJD, *Who is left, who is right?*, Physica A **351**, 593-604 (2005).
- [20] S. GALAM, S. WONCZAK, *Dictatorship from majority rule voting*, The European Physical Journal B **18**, 183-186 (2000).
- [21] M. MOBILIA, *Does a single zealot affect an infinite group of voters?*, Phys. Rev. Lett. **91**, (2003).
- [22] W. X. ZHOU, D. SORNETTE, *Self-fulfilling Ising model of financial markets*, European Physical Journal B **55**, 175-181 (2007).
- [23] R. AXELROD, S. BENNETT, *A Landscape Theory of Aggregation*, British J. Political Sciences **23**, 211 (1993), reprinted in Robert Axelrod's book: *The Complexity of Cooperation: Agent-Based Models of Competition and Collaboration* (Princeton University Press, New Jersey, USA, 1997).

- [24] R. FLORIAN, S. GALAM, *Optimizing conflicts in the formation of strategic alliances*, Eur. Phys. J. B **16**, 189-194 (2000).
- [25] GERARDO G. NAUMIS, F. SAMANIEGO-STETA, M. DEL CASTILLO-MUSSOT, G.J. VÁZQUEZ, *Three-body interactions in sociophysics and their role in coalition forming*, Physica A **379**, 226-234 (2007).
- [26] R. AXELROD, W. MITCHELL, R.E. THOMAS, S. BENNETT, E. BRUDERER, *Coalition Formation in Standard-Setting Alliances*, Management Sci. **41**, 17-32 (1995).
- [27] S. GALAM, *Fragmentation vs Stability in Bimodal Coalitions*, Physica A **230**, 174-188 (1996).
- [28] S. GALAM, *Spontaneous Coalition forming*, Lectures notes in computer science 2493, (2002).
- [29] Z. NÉDA, R. FLORIAN, M. RAVASZ, A. LIBÁL, G. GYÖRGYI, *Phase transition in an optimal clusterization model*, Physica A **362**, 357-368 (2005).
- [30] K. BINDER AND A. P. YOUNG, *Spin glasses: experimental facts, theoretical concepts, and open questions*, Review of Modern Physics **58**, 801 (1986).
- [31] M. E. NEWMAN, G. T. BARKEMA, *Monte Carlo Methods in Statistical Physics* (Oxford University Press, USA, 1999).
- [32] R. J. BAXTER, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, London, Great Britain, 1984).
- [33] P. PFEUTY, G. TOULOUSE, *Introduction to the Renormalization Group and to Critical Phenomena* (Wiley, Bath, Great Britain, 1977).