

ANALOGÍAS Y CONEXIONES EN LA FÍSICA

Coordinadores

Karen Volke ◉ Jorge Flores

Editores

Karen Volke ◉ Jorge Flores ◉ Octavio Miramontes ◉ Sergio Sánchez

Autores

Miguel Alcubierre • Mariano Bauer Ephrussi • Rubén Barrera
Rafael Barrio • Carlos Bunge • Ana María Cetto • Germinal Cocho
Luis de la Peña • Jorge Flores • Gerardo García Naumis • Ignacio Garzón
Shahen Hacyan • Enriqueta Hernández • Adrián Huerta • Rocío Jáuregui
Eugenio Ley-Koo • Pier Mello • Octavio Miramontes
Alfonso Mondragón • Myriam Mondragón • Guillermo Monsivais
Matías Moreno • Rosario Paredes • Rafael Pérez Pascual
Rosalío Rodríguez • Víctor Romero • Daniel Sahagún
Citlali Sánchez Ake • Sergio Sánchez • Iván Santamaría
Miguel Ángel Solís • Jorge Seman • Claude Thions • Genaro Toledo
Manuel Torres • Alfred U'Ren • Andrea Valdés Hernández
Alejandro Vásquez • Mayo Villagrán • Carlos Villarreal • Karen Volke

CopIt-arXives

Publishing Open Access

with an Open Mind

2020

IV TERMODINÁMICA, TRANSICIONES DE FASE Y FÍSICA ESTADÍSTICA	201
18. LAS LEYES DE LA TERMODINÁMICA... ¿SON CUATRO? <i>Rosalío Rodríguez Zepeda</i>	203
19. EL BAILE DE LAS MOLÉCULAS <i>Adrián Huerta</i>	211
20. LA TERMODINÁMICA DE LOS PROCESOS IRREVERSIBLES: EQUILIBRIO O NO EQUILIBRIO, HE ALLÍ LA CUESTIÓN <i>Iván Santamaría Holek</i>	219
21. CUANDO LA MATERIA SE SOMETE A MUY ALTAS PRESIONES <i>Claude Thions Chaudy</i>	231
22. TRANSICIONES DE FASE <i>Gerardo García Naumis</i>	239
23. ESTADOS METAESTABLES <i>Alejandro Vásquez Arzola</i>	255
24. CUANDO LA ESTADÍSTICA DOMINA A LA FÍSICA <i>Pier A. Mello</i>	265
V CAOS Y SISTEMAS COMPLEJOS	277
25. EL CAOS DINÁMICO <i>Rafael Pérez Pascual</i>	279
26. LOS SISTEMAS COMPLEJOS <i>Octavio Miramontes</i>	293
27. LA FÍSICA EN LA BIOLOGÍA <i>Rafael Ángel Barrio Paredes</i>	303

TRANSICIONES DE FASE

Gerardo García Naumis*

En este capítulo se discuten los comportamientos colectivos de la materia y las transiciones que ocurren cuando estos surgen. Las transiciones entre comportamientos se explican mediante el paradigma del rompimiento de simetría, al cual se le agrega otro nuevo descubierto a finales del siglo XX: las fases topológicas. Ellas describen las fases cuánticas, como por ejemplo en el efecto Hall cuántico.

“Pues ¿qué os pudiera contar, Señora, de los secretos naturales que he descubierto estando guisando? Veo que un huevo se une y frie en la manteca o aceite y, por contrario, se despedaza en el almíbar; ver que para que el azúcar se conserve fluida basta echarle una muy mínima parte de agua en que haya estado membrillo u otra fruta agria; ver que la yema y clara de un mismo huevo son tan contrarias, que en los unos, que sirven para el azúcar, sirve cada una de por sí y juntos no. Por no cansaros con tales frialdades, que sólo refiero por daros entera noticia de mi natural y creo que os causará risa; pero, señora, ¿qué podemos saber las mujeres sino filosofías de cocina? Bien dijo Lupericio Leonardo, que bien se puede filosofar y aderezar la cena. Y yo suelo decir viendo estas cosillas: Si Aristóteles hubiera guisado, mucho más hubiera escrito.”¹

Este genial párrafo de Sor Juana Inés de la Cruz contiene varios niveles de lectura. Uno es el biográfico; nos describe sus inclinaciones científicas y con ello nos refrenda el derecho de las mujeres a pensar sobre los misterios del universo. En otro nivel habla de la importancia de realizar experimentos para entender la naturaleza. Para los fines de este capítulo, nos es relevante retomar sus observaciones sobre lo que sucede al realizar mezclas. Sor

*Departamento de Sistemas Complejos, Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México.

¹Sor Juana Inés de la Cruz, en “Respuesta de la poetisa a la muy ilustre Sor Filotea de la Cruz.”

Juana nos indica por ejemplo que el azúcar puede ser fluída o sólida, remitiendo esto a la idea de fase y a la posibilidad de pasar de una a otra. Ello es justamente el tema de este capítulo. Mas aún; Sor Juana nos habla sobre dos temas cuyo verdadero impacto se ha dejado sentir sólo en los últimos 50 años: los fluidos complejos y la materia blanda. En este capítulo hablaremos de cómo aborda la física las transiciones de fase (TDF) y veremos como a fines del siglo XX se descubren nuevos tipos de ellas.

Sor Juana se refiere a un cambio claro en una propiedad física del azúcar, su fluidez, la cual está dictada por la rigidez mecánica del material. Un ejemplo muy familiar, tomado también de la cocina, es el del agua. A la presión atmosférica se vuelve vapor a los 100 °C. El agua se volverá sólida a los 0 °C. Al variar la presión, las temperaturas de ebullición y congelamiento varían. Toda esta información puede recogerse en un diagrama (ver figura 22.1), donde se indican las fases que toma el sistema en función de las condiciones externas impuestas a éste, en este caso, la presión y temperatura. Durante estos cambios de fase aparecen discontinuidades de algunas magnitudes termodinámicas, como en la densidad o los calores específicos. Además pueden existir puntos donde coexistan las fases o donde se termine una curva que separe las fases. El punto triple del agua es un ejemplo de lo primero. Allí conviven el agua con el hielo y vapor. La vida en la Tierra es posible por ser las condiciones de presión y temperatura cercanas a este punto. De la figura 22.1 vemos también que existe un punto llamado crítico donde deja de distinguirse el gas del líquido.

Si pensamos en otras propiedades físicas de las sustancias como podrían ser su naturaleza magnética (ferromagnética, antiferromagnética, paramagnética, diamagnética), de conducción electrónica (dieléctrico, metal, semiconductor, superconductor), ordenamiento atómico, etc., los diagramas de fase pueden ser mucho mas complejos. La historia se complica aún mas cuando, como Sor Juana, mezclamos sustancias. Las concentraciones de cada componente en la mezcla constituyen nuevas variables con las cuales se obtienen nuevas fases. Pongamos otra vez un ejemplo de la cocina virreinal. Alexandro de Humboldt, en su *“Ensayo Político sobre el Reino de la Nueva España”*, describe como los arrieros bajaban hielo de los glaciares volcánicos para elaborar nieves de diversos sabores. Para hacerlos se vertía jugo de frutas con agua en una cubeta, poniendo a su vez esta dentro de otra cubeta externa de diámetro mayor. El espacio entre ambas cubetas se rellenaba con una mezcla de hielo y sal. Luego se giraraba unas pocas veces la cubeta interna, resultando en que el jugo de frutas con agua se congelaba casi instantáneamente, produciendose así la nieve. La razón de esto es

que, si observamos el diagrama de fases de la figura 22.2, la sal disminuye la temperatura de fusión del hielo. Así, la mezcla de hielo y sal se vuelve inestable a 0 °C por lo cual absorbe calor del agua con jugo para “intentar” derretirse. El calor que libera el agua con jugo provoca que éstos se congelen produciendo la nieve.

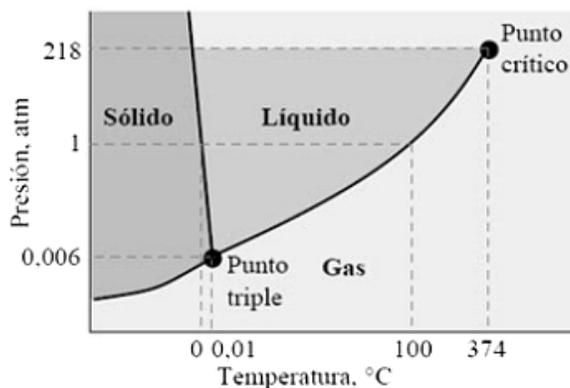


Figura 22.1: Regiones que indican las fases del H₂O dadas las condiciones externas de presión y temperatura. Las líneas sólidas representan condiciones donde ocurren las TDF. En esas condiciones se observa la coexistencia de dos o más fases. Nótese que existe un punto llamado triple donde coexisten el hielo, agua y gas. Además hay un punto llamado crítico donde se termina la línea de ebullición del agua. Arriba de él no hay distinción entre gas y líquido; se le conoce como fluido supercrítico. El diagrama está simplificado; el hielo presenta 18 fases con diferentes simetrías.

En su texto, Sor Juana habla de mezclar sustancias que tienen diferentes interacciones entre ellas. Un ejemplo es el agua y el aceite. Normalmente se separan sin mezclarse; pero puede ser que mediante algún tercera sustancia, como el jabón, se puedan mezclar. El secreto es que las moléculas de la tercera sustancia tengan diferentes terminaciones. Un tipo de terminación atrae a la primera sustancia y la otra terminación atrae a la segunda sustancia. En el caso del jabón, las moléculas tienen una terminación soluble en grasas (liposoluble) y otra soluble en agua (hidrosoluble). La mayonesa es una emulsión donde se logra este efecto. Los diagramas de fase resultantes son muy complicados y se les conoce como fluidos complejos. Además, si seguimos los pasos de Sor Juana en la cocina y nos fijamos en otras cosas como la cerveza, el café capuchino o las gelatinas, podremos observar tipos exóticos de fases como las espumas o los geles. Estas no son ni líquidas, ni sólidas ni gaseosas, sino que son fases enteramente diferentes.

Para entender toda la fenomenología descrita debemos desmenuzar el concepto de fase de la materia. Microscópicamente la materia está formada por muchas entidades, tales como átomos o moléculas, las cuales interactúan entre sí mediante fuerzas. Aunado a esto, existen restricciones impuestas desde el exterior del sistema, como pueden ser la presión o temperatura. Resultado de todas estas interacciones y restricciones aparecen *comportamientos colectivos*, conocidos también como *fenómenos emergentes*. En este sentido, la materia constituye lo que se le llama un *sistema complejo*. Un fase corresponde entonces a la existencia de uno o mas comportamientos colectivos específicos, los cuales generalmente pueden ocurrir para varias combinaciones de los parámetros externos. Retomando el caso del agua, las fases fluidas tienen la propiedad colectiva de no resistir esfuerzos de corte.

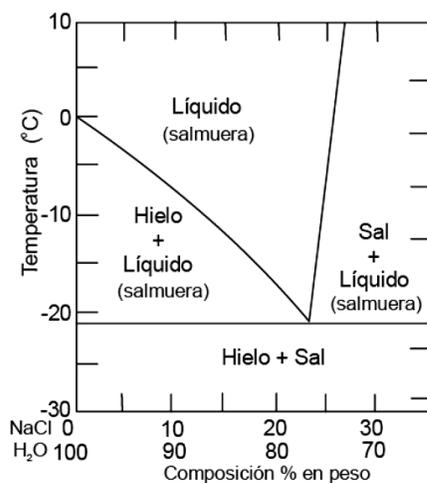


Figura 22.2: Diagrama de fases para sal disuelta con agua en función de la temperatura y proporción en peso de sal diluída (a presión de 1 atmósfera). Hay regiones donde coexiste el hielo y la salmuera (agua con sal). Para un 23 % de sal en masa y una temperatura de fusión de -21 °C, el sistema se comporta como una sustancia pura ya que no se segrega el hielo con salmuera. Esta es la mínima temperatura donde puede tenerse líquida a la salmuera y se le conoce como punto eutéctico. diagramas análogos se obtienen para aleaciones metálicas, vidrios, fluidos complejos, etc.

Hay dos aspectos importantes al tratar las fases, una consiste en estudiar la termodinámica, la otra en utilizar un enfoque microscópico basado en la estadística para entender de donde surgen las variables macroscópicas y las relaciones entre ellas. Podemos ver aquí como la física estadística

ca es un muy exitoso proceso de renormalización de grados de libertad, es decir, empezando con aproximadamente 10^{23} grados, éstos se reducen a unas pocas combinaciones entre ellos, como sacar promedios o desviaciones cuadráticas, identificadas después con variables macroscópicas tales como temperatura, energía interna, etc.

La termodinámica provee herramientas invaluable para clasificar y predecir diversas características de las TDF. Dada la brevedad de este texto y la intención de este libro, no abordaremos aquí estos aspectos que pueden consultarse en cualquier referencia de termodinámica básica. Sólo recordaremos algunos elementos claves. El primero es la clasificación de las TDF según el orden de la derivada del potencial termodinámico de Gibbs que por primera vez presente una discontinuidad. Las transiciones de primer orden presentan una discontinuidad en la primera derivada. La transiciones de fluidez son generalmente de primer orden porque involucran discontinuidades en la densidad, siendo ésta la inversa de la primera derivada de la energía libre respecto a la presión. Estas transiciones involucran un calor latente, es decir, la energía suministrada en forma de calor se utiliza para el cambio de fase y entonces la temperatura permanece constante durante el proceso. Las transiciones de segundo orden exhiben una discontinuidad en la segunda derivada de la energía libre, siendo la primera derivada continua. Ejemplos de ellas son las transiciones entre superfluidos, de metal a superconductor y la ferromagnética. Se caracterizan por tener respuestas divergentes ante perturbaciones externas así como correlaciones de variables que decaen como una ley de potencias con la distancia. Otro aspecto que nos provee la termodinámica es la predicción de características generales de las TDF, como por ejemplo el número máximo posible de fases en coexistencia (regla de las fases de Gibbs), la derivada de las curvas de coexistencia de fases (ecuación de Clausius-Calpeyron), los criterios de estabilidad de las fases, etc.

Hasta aquí hemos mantenido en suspenso la razón por la cual ocurren las transiciones de fase. En realidad el paradigma existente es relativamente sencillo de entender. Se trata de una competencia entre orden y desorden. Cuando la temperatura es alta, los sistemas tienden a permanecer desordenados dado que los átomos o moléculas tienen mucha energía cinética. A medida que se baja la temperatura, domina la energía potencial que favorece el orden. Esta tensión entre orden y desorden queda de manifiesto al analizar la estructura de la energía libre. Imaginemos el caso sencillo de calentar un sistema manteniendo constante la presión. De acuerdo a la termodinámica, dado que la presión es constante, el sistema tendrá como fase

estable la que minimice la energía libre de Helmholtz. Esta energía, denotada por $F[T, M]$, viene dada por,

$$F[T, M] = U[M] - TS[M]$$

siendo T la temperatura, $U[M]$ la energía interna y $S[M]$ la entropía. La M entre paréntesis cuadrados es una etiqueta para las posibles configuraciones del sistema. Inmediatamente notamos que si $T = 0$, la energía libre es $F[M] = U[M]$. Esto indica que los estados observados del sistema serán los que minimicen la energía interna. Pero en general esa minimización se logra ordenando el sistema. Por otra parte, si crece T , eventualmente el término $-TS[M]$ dominará a $U[M]$. Así, $F[M] = -TS[M]$ y dado el signo menos de la energía libre, $F[M]$ se hará mínimo para estados M de entropía máxima (o de máximo desorden).

Dado que fases diferentes implican cambios en el orden interno, es claro que se deba buscar una manera de clasificar los tipos de orden. La manera natural de hacerlo es mediante el estudio de las simetrías. Pensemos en un gas dentro de un tanque. Las moléculas podrán visitar todos los puntos del espacio dentro del tanque. En este sentido, todos los puntos así como las direcciones del espacio son equivalentes. Al bajar la temperatura el gas se solidifica y las moléculas se sitúan en posiciones fijas dentro de un cristal. Entonces los puntos del espacio dejan de ser equivalentes dado que en muchas regiones no serán observadas moléculas; la simetría translacional y rotacional se rompe.

Así llegamos a una de las ideas centrales de las TDF; estas se caracterizan y clasifican por las simetrías que rompen. Atendiendo a esta idea, una vez que se localiza la simetría rota, puede utilizarse un parámetro, llamado de orden, que mide el grado de simetría de una y otra fase. Hacemos entonces que la variable M , usada para etiquetar estados en $F(T, M)$, sea el parámetro de orden. Existe un teoría debida a L. D. Landau que permite describir *cualquier transición de segundo orden* usando esta idea, y con algunas precauciones, puede ser aplicada a transiciones de primer orden. Landau produjo una energía libre fenomenológica basada en que el parámetro de orden es pequeño cerca de la transición y por lo tanto puede realizarse una expansión en series de potencias del mismo. Como ejemplo podemos tomar la transición de ferromagnetismo a paramagnetismo, es decir, de una fase con magnetización espontánea a una fase sin magnetización (en ausencia de campo magnético externo). En este caso el parámetro de orden M es la magnetización, obtenida de promediar todos los momentos magnéticos de los átomos. Desarrollando en serie de Taylor y tomando en cuenta algu-

nas consideraciones de simetría así como la ausencia de campo externos, la energía libre $F[T, M]$ tiene la siguiente forma,

$$F[T, M] = a(T - T_c)M^2 + bM^4$$

siendo a y b dos parámetros de la teoría, ambos positivos. T_c es la temperatura de la transición de fase. En efecto, como se ve en la figura 22.3, si se grafica a $F[T, M]$ para $T > T_c$, los términos cuadráticos y cuárticos tienen el mismo signo y $F[T, M]$ tiene su mínimo para $M = 0$. Para $T < T_c$ el término cuadrático es negativo y aparecen dos mínimos, M_0 y $-M_0$, ambos distintos de cero, indicando así la aparición de magnetización espontánea. Es importante notar que hay dos mínimos. Un sistema real “escogerá” uno de ellos debido a fluctuaciones rompiendo entonces la simetría.

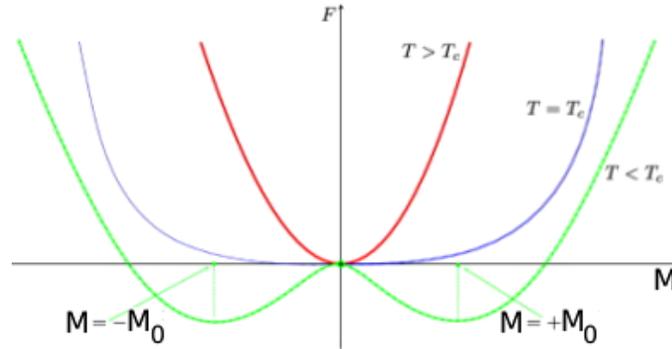


Figura 22.3: Teoría de Landau para TDF de segundo orden. Aquí se grafica la energía libre de Helmholtz $F[T, M]$ en función del parámetro de orden M para tres temperaturas. Para $T > T_c$, el mínimo de $F[T, M]$ está en $M_0 = 0$, mientras que para $T < T_c$ aparecen dos mínimos. Ambos tienen la misma energía libre. El sistema “escoge” uno de ellos por alguna fluctuación térmica y rompe entonces la simetría. Si la simetría rota es continua, aparecen modos de baja frecuencia llamados de Nambu-Goldstone.

Otra característica es que la teoría indica la variación del parámetro de orden con T , i. e., la posición de los mínimos con T . Se obtiene que $M_0(T) = 0$ si $T > T_c$, y $M_0(T) = (a/2b)^\beta (T_c - T)^\beta$ para $T < T_c$.

El valor del exponente es $\beta = \frac{1}{2}$. Este es nuestro primer encuentro con los llamados exponentes críticos. Indican el escalamiento de las propiedades del sistema al acercarnos a la transición. Su estudio es en sí mismo un tema de importancia capital no sólo en la termodinámica sino también para sistemas complejos. El valor $\beta = \frac{1}{2}$ es en general una característica de las TDF de segundo orden. No sólo se observa en sistemas magnéticos sino

en muchos otros como en la transición de metal a superconductor. La teoría no es cuantitativamente correcta si las fluctuaciones térmicas son fuertes, como ocurre en una dimensión ($1D$) y dos dimensiones ($2D$). Ello requiere técnicas más avanzadas como el grupo de renormalización o la hipótesis de escalamiento.

Una pregunta importante es por qué la teoría de Landau es más sencilla de aplicar para transiciones de segundo orden. La respuesta tiene que ver con la variación de los parámetros de orden al atravesar la transición. En las de segundo orden, el parámetro de orden es continuo con la temperatura, como en el caso visto anteriormente. Ello garantiza que el parámetro sea pequeño cerca de T_c y de ahí se sigue el desarrollo en serie de potencias. Puede demostrarse que este procedimiento es enteramente análogo a realizar una aproximación llamada de campo medio, donde cada integrante del sistema contribuye a generar un campo efectivo, el cual a su vez afecta a cada elemento. En cambio para las transiciones de primer orden, el parámetro de orden sufre un salto y no puede garantizarse su pequeñez. Cada caso particular requiere entonces un cuidadoso análisis, usualmente guiado por algún campo medio efectivo.

El rompimiento de simetría implica la aparición de excitaciones de baja energía cuyas longitudes de onda tienden a infinito. La razón física es sencilla de entender; como el Hamiltoniano tiene una simetría continua, pueden realizarse excitaciones que varían muy lentamente respecto a ella y por lo tanto tendrán poca energía. Estos modos se les llama de *Nambu-Goldstone*. Los fonones acústicos, los cuales son vibraciones cuantizadas de baja frecuencia en los sólidos, corresponden a los modos de Nambu-Goldstone asociados al rompimiento de la simetría traslacional. Hay muchos otros ejemplos como los magnones o plasmones. Este mecanismo se extiende a otras ramas de la física. Citemos que los modos de Nambu-Goldstone del campo electromagnético son los *fotones* y desde luego el campo de Higgs da lugar al famoso *bosón de Higgs*. El mecanismo de Higgs explica justamente el proceso de creación de masa como un rompimiento espontáneo de simetría.

Menos conocida es la relación entre modos de Nambu-Goldstone y la rigidez de un sistema. En general, por cada simetría continua rota aparece una nueva rigidez, caracterizada esta por una constante elástica asociada. El papel de esta rigidez es justamente evitar la destrucción del nuevo orden debido a las fluctuaciones térmicas. Las TDF donde se revela con mayor claridad este hecho es en las de fluidez, ya que como vimos anteriormente los fluidos se diferencian de los sólidos por su rigidez.

Tal y como estaba el paradigma del rompimiento de simetrías durante gran parte del siglo XX se creía imposible que pudieran existir TDF en sistemas bidimensionales y unidimensionales. Tampoco parecía posible tener sistemas ordenados bidimensionales con interacciones de corto alcance. Ello se debe a que si se estudia la mecánica estadística de estos sistemas, el desorden térmico tiene un efecto mucho mayor destruyendo la posibilidad de orden. Pensemos en fichas de dominó paradas en fila. Al tirar una de ellas, todas las otras se derrumban. De acuerdo a este paradigma, resultaba imposible concebir una transición de fase de un sólido hacia un superconductor o de un líquido hacia un superfluido en $2D$. Sin embargo, a fines de los años sesenta del siglo XX existían evidencias de estas transiciones. Por ejemplo se había observado una transición hacia un superfluido en superficies delgadas de He_4 líquido. Otra evidencia eran las simulaciones computacionales con discos duros en $2D$. Ellas indicaban una transición de fase pero con las computadoras de la época resultaba imposible dilucidar si realmente era un efecto que pudiera subsistir en el límite termodinámico. Esto sólo pudo lograrse hasta el año 2015, cuando finalmente el sistema se escaló de manera que la transición fuera resuelta sin ambigüedad. La situación puede resumirse en que los hallazgos indicaban una contradicción con el paradigma de TDF y rompimiento de simetría.

Entonces D. Thouless y el joven J. M. Kosterlitz comenzaron a trabajar en el problema. Su guía conductora era abordar la superfluididad con un modelo de espines llamado XY . En él los espines están anclados sobre los sitios de una red cuadrada, pudiendo girar a cualquier ángulo. Existe una interacción J de cada espín con sus primeros vecinos en la red. La energía de cada configuración viene dada por su Hamiltoniana, $H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j)$, siendo θ_j el ángulo que forma el espín del sitio j con el eje x y la suma se extiende a todas las parejas de vecinos.

Puede demostrarse que este modelo es análogo al de un superfluido. La primera tarea de Kosterlitz y Thouless fue demostrar que las excitaciones de los espines forman vórtices, es decir, son una especie de "huracanes" donde los espines giran alrededor de una singularidad. Lo interesante de estas excitaciones es que no hay una dirección privilegiada del espacio, sino sólo puntos donde hay singularidades del parámetro de orden. Después, Kosterlitz y Thouless demostraron que los vórtices se apareaban a bajas temperaturas, existiendo una temperatura arriba de la cual los vórtices se desapareaban. Lo interesante de la transición es que no rompía ninguna simetría. Mas bien se asocia al apareamiento de las singularidades llamadas *defectos topológicos*. En su aparición es fundamental considerar las condiciones de

frontera; sólo el sistema finito presenta estas singularidades. El nombre de topológico viene en parte de ello, como veremos a lo largo del capítulo.

Actualmente, esta transición se conoce como de Kosterlitz-Thouless, y se considera el inicio del estudio de las TDF topológicas, razón por la cual les fue otorgado el Premio Nobel de Física 2016 (junto a Haldane quien aplicó estas ideas a sistemas magnéticos). Al mismo tiempo, el trabajo de Kosterlitz-Thouless abrió la brecha necesaria para empezar a romper el paradigma de la ausencia de TDF en $2D$. Eventualmente el paradigma se acabó de romper con el descubrimiento del grafeno. Este material está formado por átomos de Carbono ordenados en un arreglo geométrico similar a la estructura de un panal de abeja con la particularidad de tener un sólo átomo de espesor. Su descubrimiento por Geim y Novoselov les valió el Premio Nobel de Física 2010. El premio fue otorgado en un tiempo récord, menos de 10 años. Las razones son múltiples; por un lado rompió el paradigma teórico existente, por el otro resultó tener propiedades físicas sobresalientes que le han merecido el título del material maravilla. Además marcó el camino hacia el descubrimiento de otros materiales en $2D$ como el fosforeno, siliceno, dicalcogenuros de metales de transición, etc. Estos materiales presentan una gama enorme de comportamientos susceptibles de ser aplicados en diversas tecnologías.

El estudio del modelo XY llevaría a Thouless a otro problema relevante que no había sido entendido a mediados de los años setenta del siglo XX. Era el llamado efecto Hall cuántico. Clásicamente se puede describir como la deflexión que sufre una corriente eléctrica en una lámina de metal cuando ésta se somete a un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la lámina. Viendo la figura 22.4, consideremos primero el caso con campo eléctrico sin campo magnético. Al aplicar un campo eléctrico E_x en la dirección x , aparece en la misma dirección una densidad de corriente (j_x) dada por $j_x = \sigma_{xx}E_x$ donde σ_{xx} es la conductancia y su inverso la resistividad $\rho_{xx} = 1/\sigma_{xx}$. Cuando se enciende un campo magnético uniforme B_0 en la dirección z , las cargas son deflectadas por la fuerza de Lorentz en la dirección perpendicular a los campos E_x y B_0 . Se produce entonces un voltaje V_H en la dirección perpendicular al campo eléctrico (ver figura 22.4). A este efecto se le conoce como Hall. La corriente perpendicular al campo eléctrico viene dada por $j_y = -\sigma_{yx}E_x$, donde σ_{yx} es la llamada conductancia de Hall; su inversa es la resistividad de Hall $\rho_{xy} = 1/\sigma_{yx}$.

Landau fue el primero en estudiar este problema desde un punto de vista cuántico para un gas de partículas libres cargadas en $2D$, reduciéndolo al problema de un oscilador cuántico unidimensional. Los niveles energé-

tivos E están cuantizados y vienen dados por $E = (n + 1/2)h\nu$, donde n es un número entero, h es la constante de Planck y ν es una frecuencia, conocida como de ciclotrón, dada por $\nu = 2\pi eB_0/m_e$, siendo e la carga del electrón y m_e su masa. A estos estados cuánticos se les conoce como niveles de Landau.

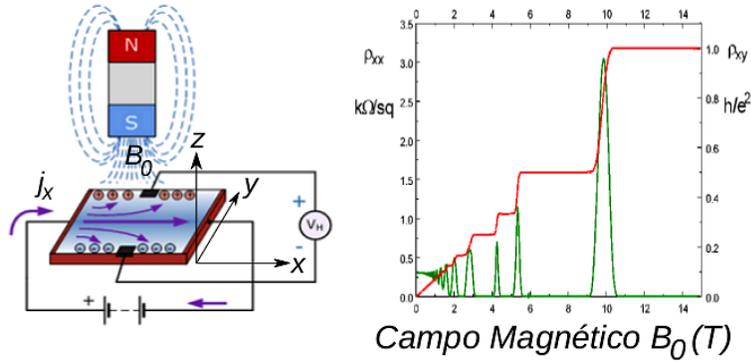


Figura 22.4: Panel izquierdo: dispositivo experimental para observar el efecto Hall clásico. Se coloca un metal sometido a un campo magnético uniforme, representado aquí por un imán. Al aplicar un campo eléctrico en la dirección x aparece una corriente. Las cargas se deflecan y aparece un voltaje de Hall V_H en una dirección perpendicular. Panel derecho: resistividades en las direcciones x y y en función del campo magnético aplicado medido en Teslas para el efecto Hall cuántico. Los picos corresponden a ρ_{xx} mientras que la curva con saltos y mesetas corresponde a ρ_{xy} . Las mesetas tienen una altura dada por $\rho_{xy} = 1/\sigma_{yx} = 1/(C_r e^2/h)$.

A principios de 1970, D. Hofstadter aborda en su tesis doctoral el mismo problema pero asumiendo cargas en un cristal $2D$. Hofstadter se dió cuenta que había otro nuevo parámetro dado por la distancia interatómica a . Ello hacía que hubiera una competencia entre el flujo magnético debido al campo en una celda unitaria, a saber $B_0 a^2$, y el flujo magnético cuántico h/e^2 . Hofstadter logró mapear el problema a una ecuación análoga a la de osciladores unidimensionales clásicos acoplados. La ecuación contenía como parámetro fundamental a la razón entre flujos magnéticos $\Phi = B_0 a^2/(h/e^2)$. Para campos poco intensos, donde el reticulado del cristal no es importante, Hofstadter logró recuperar los niveles de Landau. La ecuación era periódica cuando Φ era un número racional, y no periódica en caso contrario. Se recurrió entonces a una solución numérica. En la figura 22.5 se muestra el resultado para el espectro de energías E en función de Φ . Puede verse su naturaleza autosimilar. El momento del descubrimiento no pudo ser mas

apropiado; en ese entonces se estaba desarrollando la teoría de fractales y caos. Este fractal se conoce como “*la mariposa de Hofstadter*”; fue el primero descubierto en el estado sólido.

Los problemas de Landau y Hofstadter se consideraban imposibles de observar. La primera razón es que no existían sistemas bidimensionales como los requeridos y la segunda es que tal y como estaba la teoría, se predecía que los sistemas eran aislantes. Además, en el caso de Hofstadter la fractalidad sería observable sólo con campos demasiado intensos para los obtenidos en la realidad.

Sin embargo, en 1980 K. von Klitzing midió la cuantización de los niveles de Landau usando un transistor de efecto de campo metal-óxido-semiconductor (MOSFET). La idea fue lograr un sistema efectivo bidimensional. Como se muestra en la figura 22.4, se encontró que la conductancia estaba cuantizada, es decir, $\sigma_{yx} = C_r(e^2/h)$ donde C_r es un número entero. Este descubrimiento le valió el Premio Nobel de Física en 1985 y actualmente tiene muchas aplicaciones, la mas obvia es medir la relación entre las constantes fundamentales e y h .

Se reconoció así que el problema producía un diagrama de fases, dado que el sistema podía tener conductancias cuantizadas bajo diferentes variables externas al sistema, en este caso los campos magnéticos y eléctricos aplicados. Estas conductancias presentaban discontinuidades entre diferentes regiones de parámetros. Esto lleva a la idea de *fases cuánticas*. La temperatura no controla las TDF cuánticas, sino que es el cambio de algún parámetro como los campos externos o una concentración de dopaje químico. Una vez mas, las TDF se deben a la competencia de dos mecanismos. Por un lado, si bien los electrones son partículas puntuales, sus estados ocupan cierto espacio. Clásicamente, un electrón bajo un campo magnético gira en un círculo de Larmor, el cual puede tener cualquier radio. Cuánticamente, como la energía está cuantizada, puede demostrarse que los electrones toman un área del orden $2\pi^2/eB_0$. Contrapuesto a esto, los electrones deben permanecer alejados unos de otros por ser fermiones, ya que no pueden ocupar el mismo estado cuántico. Así, cada electrón no sólo necesita espacio, sino que cada uno necesita *su propio espacio*.

Una vez descubierto el efecto por Von Klitzing, subyacía la predicción teórica de la naturaleza aislante del sistema. Además se necesitaba obtener el número de cuantos C_r en función de las variables externas del sistema, es decir, el diagrama de las fases cuánticas. Finalmente los teóricos lograron darse cuenta de lo esencial de considerar la superficie del sistema. Es decir, el sistema es aislante si no tiene superficie pero se vuelve conductor al cor-

tarlo. Los responsables de la conducción son modos superficiales. Eventualmente se demostró que el número de modos superficiales está cuantizado, sirviendo como una especie de carriles para los electrones.

Tal vez lo más sorprendente fue el hecho de que cuando Thouless, junto con M. Khomoto, Nightingale y den Nijs finalmente lograron obtener el diagrama de fases cuánticas, la fórmula para encontrar al entero C_r tenía exactamente la forma de otra proveniente de la topología. Esta fórmula permite calcular el número de agujeros de una superficie. Debe decirse que la topología es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de superficies e hipersuperficies cuando se deforman sin cortar y pegar. La idea es analizar qué propiedades permanecen fijas y cuáles varían al producir deformaciones. De este modo, una dona y una taza son equivalentes por poseer un agujero, mientras que una esfera y un plato no poseen agujeros. Por ello una dona puede deformarse en una taza pero no en una esfera. Es notable también que los cambios sólo pueden ocurrir con saltos dado que no existen “fracciones de agujero”.

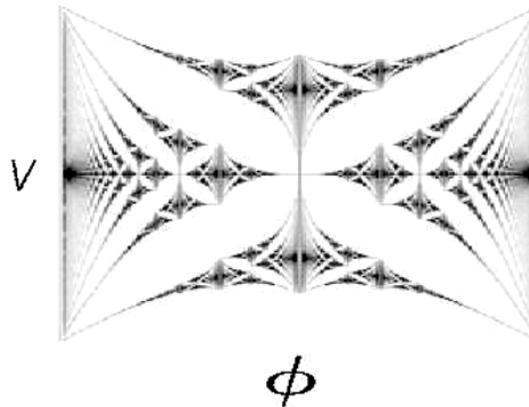


Figura 22.5: Mariposa de Hofstadter. En el eje de las abscisas aparece la razón entre flujo magnético de la red y el flujo cuántico elemental, mientras que en las ordenadas está la energía de los electrones. Puede pensarse que ésta es la relación entre voltaje aplicado (V) contra el campo magnético. Los estados permitidos aparecen marcados en negro. Las regiones en blanco, con forma de alas de mariposa, son regiones prohibidas para los electrones.

En vista de esto, resultó claro que cada fase cuántica estaba caracterizada por un invariante topológico. A C_r se le conoce como el número de Chern. En la figura 22.6 podemos ver la representación de las fase cuánticas y la conductancia asociada a cada una de ellas, así como el número de

agujeros asociados a cada fase. Si comparamos con la figura 22.5, es revelador darse cuenta que el diagrama ocupa las zonas en blanco de la mariposa de Hofstadter. La razón es que la mariposa se calcula para sistemas infinitos que son aislantes, mientras que la conducción aparece para el sistema finito. Los estados de superficie aparecen siempre en las zonas prohibidas del sistema infinito. Topológicamente el sistema infinito o con condiciones periódicas es distinto al finito justamente por tener un corte.

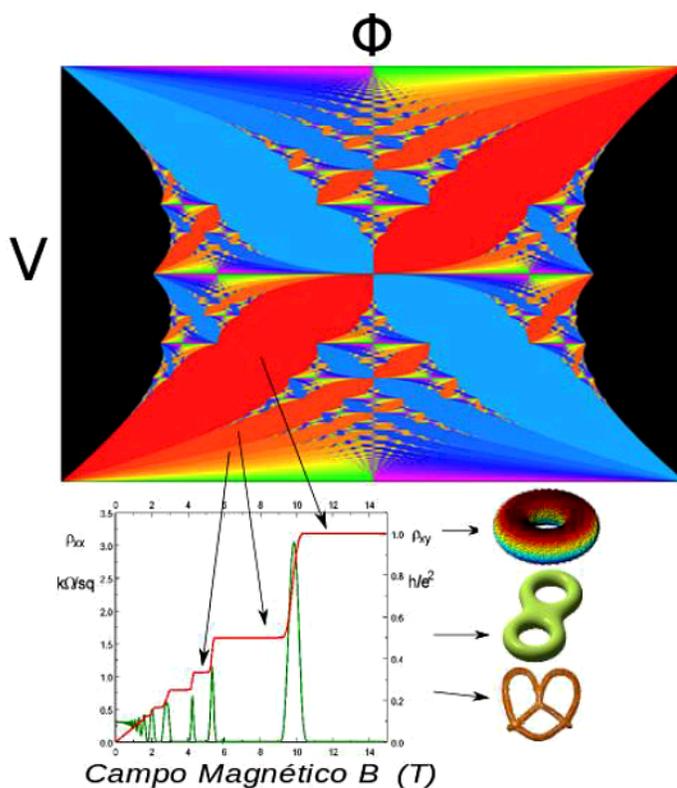


Figura 22.6: Diagrama de fases del efecto Hall cuántico en función del voltaje aplicado contra la razón de flujos magnéticos. Cada zona de diferente color representa una fase con la misma conductancia de Hall, indicada en la gráfica de conductancia en función del campo magnético aplicado. A cada fase le corresponde un invariante topológico. Aquí se muestran tres ejemplos; con 1 agujero (dona), 2 agujeros (lente) y tres agujeros. Nótese que las fases cuánticas corresponden a las zonas en blanco de la mariposa de Hofstadter. La razón es que la conducción se debe a estados de superficie, los que se producen en energías no permitidas del sistema infinito.

Desde que Von Klitzing midió la conductancia de los niveles de Landau, se han investigado diagramas en otros sistemas. Así, una vez entendido el efecto Hall cuántico se encontró que los electrones pueden interactuar entre sí, de modo que C_r pueda tener valores fraccionarios (llamado efecto Hall fraccionario). También se planteó la posibilidad de tener un efecto Hall sin campo en 1987, lo cual se logró mediante la construcción de un material diseñado ex profeso en el año 2007. A este efecto se le llama de Hall anómalo y marcó el despegue del campo de los aislantes topológicos como uno de los temas mas relevantes de la física contemporánea. Actualmente se trabaja en modos de superficie con polarización de espín para usarlos en el campo de la espintrónica ([Capítulo 11](#)) y la computación cuántica. Como cereza del pastel, en el año de 2014 finalmente se pudo medir la mariposa de Hofstadter usando para ello grafeno sobre otro cristal bidimensional, nitruro de boro (h-BN). El nitruro de boro induce un patrón de deformaciones en el grafeno generando una super-red con un parámetro a enorme, lo cual baja la intensidad del campo magnético requerido.

Para concluir diremos que las ideas esbozadas en este capítulo pueden extenderse a muchas áreas de la ciencia. Las fases de los modelos de espín se pueden utilizar para entender votaciones, alianzas, guerras e inclusive el comportamiento del cerebro o la evolución de las especies. También en cosmología y altas energías juegan un papel importante. En su evolución el universo ha presentado sucesivas transiciones que han roto simetrías, como la del campo electrodébil hacia el campo electromagnético que observamos hoy en día. La ubicuidad del tema lo hace indispensable en la formación de todo físico; tanto así como el sabio consejo de Sor Juana tomado de Lupericio Leonardo *“bien se puede filosofar y aderezar la cena”*.

PARA SABER MÁS:

- Kerson Huang, *Statistical Mechanics*, 2a. Edición. Ed. John Wiley & Sons., New York, 1987.
- J.P. Sethna, *Entropy, Order Parameters and Complexity*, Oxford Master Series in Statistical, Computational and Theoretical Physics, Ed. Oxford University Press, Oxford, 2006.
- Phillip Phillips, *Advanced Solid State Physics*, 2nd. Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.