

Capítulo 3

Transformaciones

Sin duda, el concepto de función tiene un papel fundamental en todas las ramas de la matemática de hoy en día: en la geometría elemental (aunque sea antigua), se dice que dos figuras son *congruentes* si existe una *transformación rígida* que lleve una sobre la otra, y que son *semejantes* si existe una de estas transformaciones que seguida de una *homotecia* (un cambio de escala) lleve una a la otra; en el análisis o el cálculo se estudian las funciones *integrables* o *diferenciables*; en la topología, las funciones *continuas*; en la teoría de los grupos se estudian los *homomorfismos* (funciones entre grupos que preservan la operación ahí definida); en el álgebra lineal se estudian las funciones *lineales* y las *afines*, etc.; siempre que hay algún tipo interesante de “objetos matemáticos” parece haber una correspondiente noción de “funciones” que los relacionan.

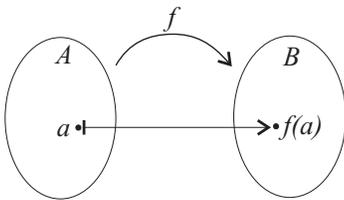
Sin haberlo hecho explícito, los griegos manejaban intuitivamente el concepto de transformación rígida y de semejanza; por ejemplo, en el axioma “todos los ángulos rectos son iguales”, en la palabra “iguales” se incluye la idea de que se puede *mover* uno hasta trasladarse sobre el otro, y en sus teoremas de semejanza la noción ya se hace explícita y habla en el fondo de un cierto tipo de funciones. Más adelante, en el surgimiento del cálculo (Newton y Leibniz) así como en el de la geometría analítica (Descartes) o en el algebra de los arabes, las funciones tenían un papel importante pero debajo del agua o en casos muy concretos (funciones reales de variable real dadas por fórmulas en el cálculo, por ejemplo). Sin embargo, el aislamiento del concepto de función, la generalidad de la noción —que englobaba cosas al parecer distantes—, es muy reciente: termina de afinarse con la teoría de los conjuntos que arranca Cantor en la segunda mitad del siglo XIX. Pero es tan inmediata su aceptación (o bien, ya estaba tan madura su concepción) que a finales del siglo XIX, Felix Klein, en una famosísima conferencia (conocida como “El Programa de Erlangen”), se atreve a afirmar, basado en el trabajo de su gran amigo Sophus Lie, que la geometría es el estudio de un espacio (un conjunto de puntos, piénsese en el plano) junto con un *grupo de transformaciones* (un conjunto específico de funciones del espacio en sí mismo) y de las estructuras que permanecen *invariantes* bajo el grupo. En fin, todavía el estudiante no tiene ejemplos

claros de estas nociones y es casi imposible que lo aprecie. Pero el punto es que, de alguna manera, Klein dijo: para hacer geometría es importantísimo estudiar las *transformaciones* (funciones) del plano en sí mismo, conocerlas de arriba a abajo; y en este capítulo eso intentamos pues el siglo XX, al transcurrir, le fue dando más y más razón al visionario.

Damos muy rápidamente las nociones generales de función en la primera sección. Pues, aunque parece que se nos cae el nivel por un ratito, vale la pena establecer cierta terminología muy general que se usa en su manejo y ciertos ejemplos muy particulares que serán de gran interés en el estudio de las transformaciones geométricas y que, a su vez, servirán para familiarizarnos con los conceptos básicos. Después entramos a las transformaciones geométricas. El orden en que lo hacemos no es el que técnicamente facilita las cosas (empezar por transformaciones lineales), sino el que intuitivamente parece más natural (empezar por transformaciones rígidas); y de ahí, deducir la noción de transformación lineal para regresar de nuevo y desarrollar las fórmulas analíticas.

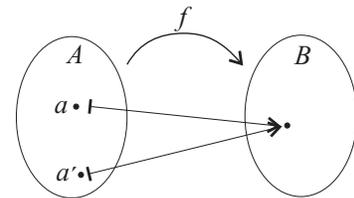
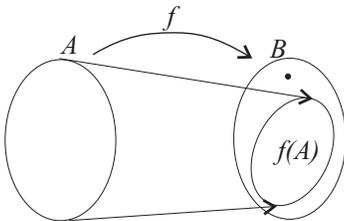
3.1 Funciones y transformaciones

En los siguientes párrafos se usa el tipo de letra *este* para las nociones que se definen formalmente y *este otro* para terminología cómoda y coloquial que facilita mucho el manejo de las funciones.



Dados dos conjuntos A y B , una *función* f de A a B , denotado $f : A \rightarrow B$, es una manera de *asociar* a cada elemento $a \in A$ un elemento de B , denotado $f(a)$. Por ejemplo, las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} se describen comúnmente mediante fórmulas como $f(x) = x^2$ o $g(x) = 2x + 3$, que dan la regla para asociar a cada número otro número (por ejemplo, $f(2) = 4$ o $g(-1) = 1$). Otro ejemplo: en el capítulo 1 vimos las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 que describen rectas parametrizadas. Pero en general, y ésta es la maravillosa idea generalizadora (valga el pleonasma), una función no tiene por qué estar dada por una fórmula; a veces es algo dado por “Dios”, una “caja negra”, que “sabe” como asociar a los elementos del *dominio* (el conjunto A , en la notación con que empezamos) elementos del *contradominio* B .

Se dice que una función $f : A \rightarrow B$ es *inyectiva* si $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$. Es decir, si elementos diferentes de A *van bajo* f a elementos diferentes de B ($a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$). Se dice que una función $f : A \rightarrow B$ es *suprayectiva* o *sobre* si para cada elemento de B hay uno en A que le “pega”, es decir, si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Y se dice que es *biyectiva*



o una *biyección*,

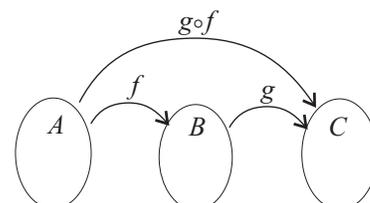
si es inyectiva y suprayectiva; también se le llama *correspondencia biunívoca*. (Diagramas de funciones *no* inyectiva y *no* sobre en las figuras adjuntas).

Las funciones tienen una noción natural de composición, al aplicarse una tras otra para dar una nueva función. Dadas dos funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, su *composición*, denotada $g \circ f$ y a veces llamada *f seguida de g* o bien “*g bolita f*” es la función

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

definida por la fórmula

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$



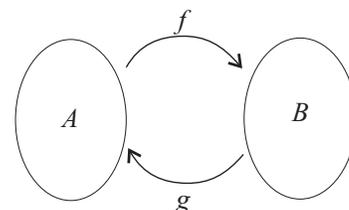
Hay que resaltar que la composición de funciones está definida sólo cuando el *dominio* de g (es decir, de donde “sale” o en donde está definida, el conjunto B en nuestro caso) es igual al *contradominio* de f (es decir, a donde “llega”, el final de la flecha, donde “caen”, otra vez B en nuestro caso); si no fuera así, “ g no sabría que hacer con algunos $f(a)$ ”. También hay que resaltar que la dirección de la escritura “*g bolita f*” es la contraria a la de la acción o lectura (“ f seguida de g ” o bien “*f compuesta con g*”); y esto se ha convenido así por la costumbre y puesto que la fórmula, que a final de cuentas es la que manda, queda mucho más natural.

Por ejemplo, con las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que definimos con fórmulas unos párrafos antes se tiene que $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 3$ mientras que $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 12x + 9$, así que *sí* importa el orden; la composición está lejos de ser conmutativa; en general, aunque $g \circ f$ esté definida, $f \circ g$ ni siquiera tiene sentido.

Cada conjunto A , trae consigo una función llamada su *identidad* definida por

$$\begin{aligned} \text{id}_A : A &\rightarrow A \\ \text{id}_A(a) &= a, \end{aligned}$$

que es la función que no *hace nada*, que deja a todos en su lugar. Y, aunque parezca inocua, es fundamental darle un nombre, pues entonces podemos escribir mucho, por ejemplo:



Lema 3.1 Dada una función $f : A \rightarrow B$, se tiene

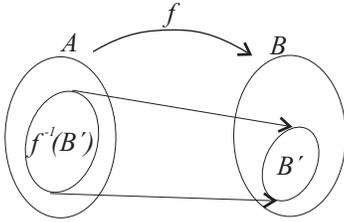
- i) f es inyectiva $\Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = \text{id}_A$,
- ii) f es suprayectiva $\Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A$ tal que $f \circ g = \text{id}_B$.

EJERCICIO 3.1 Da ejemplos de funciones inyectivas que no son sobre y a la inversa.

EJERCICIO 3.2 Demuestra el lema anterior y el siguiente corolario de él.

Corolario 3.2 Dada una función $f : A \rightarrow B$, entonces f es biyectiva si y sólo si existe una función $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = \text{id}_A$ y $f \circ g = \text{id}_B$.

En este caso, a g se le da el nombre de *inversa* de f y se le denota f^{-1} . Aunque aquí hay que hacer notar que el símbolo f^{-1} se usa también de una manera más general para denotar conjuntos. Pues para cualquier subconjunto $B' \subset B$ podemos definir su *imagen inversa* o *pre-imagen* $f^{-1}(B') \subset A$ como



$$f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) \in B'\} .$$

Tenemos entonces que f es inyectiva si y sólo si para todo $b \in B$ se tiene que $\#f^{-1}(b) \leq 1$ (donde $\#$ denota cardinalidad y hemos identificado $f^{-1}(b)$ con $f^{-1}(\{b\})$), es decir, “a cada elemento de B le pega a lo más uno de A ”; y que f es sobre si y sólo si para todo $b \in B$ se tiene que $\#f^{-1}(b) \geq 1$ (es decir, que $f^{-1}(b)$ no es el conjunto vacío). Por lo tanto, f es biyectiva si y sólo si $\#f^{-1}(b) = 1$ para todo $b \in B$, es decir, si y sólo si f^{-1} es una función bien definida al aplicarla a *singletes* de B .

También se puede definir la *imagen directa* de subconjuntos $A' \subset A$, o simplemente su *imagen*, como

$$f(A') := \{f(a) \mid a \in A'\} \subset B;$$

y la *imagen* de la función es $f(A)$, la imagen del dominio.

Finalmente llegamos a la definición que más nos interesa.

Definición 3.1.1 Una *transformación* de A es una función biyectiva de A en A .

Hay que hacer notar que el término “transformación” se usa de diferentes maneras en otros textos y en otros contextos. Pero aquí estaremos tan enfocados a funciones biyectivas de un conjunto en sí mismo que lo asignaremos a ellas.

EJERCICIO 3.3 Demuestra que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son biyectivas entonces $g \circ f$ también es biyectiva. (Demuestra que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.)

EJERCICIO 3.4 Demuestra que si f y g son transformaciones de un conjunto A entonces $(f \circ g)$ también es una transformación de A .

3.1.1 Grupos de transformaciones

Veremos ahora ciertos ejemplos pequeños de conjuntos de transformaciones, que por su importancia reciben un nombre especial, el de *grupo*.

Consideremos un conjunto con dos elementos, $\{0, 1\}$; llamémoslo Δ_2 , que se lee “delta-dos”. Las funciones de Δ_2 en sí mismo son cuatro :

$$\begin{array}{cccc} \text{id} & & c_0 & & c_1 & & \rho \\ 0 \mapsto 0 & & 0 \mapsto 0 & & 0 \mapsto 1 & & 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 1 & & 1 \mapsto 0 & & 1 \mapsto 1 & & 1 \mapsto 0, \end{array}$$

donde hemos usado la notación $x \mapsto y$ para especificar que el elemento x va a dar al elemento y bajo la función en cuestión (no hay que confundir la flechita con “raya

de salida” \mapsto con la flecha \rightarrow que denota función; inclusive puede pensarse que esta última (\rightarrow) es el conjunto de todas las flechitas (\mapsto) entre los elementos). En nuestro ejemplo, las dos funciones de enmedio son *funciones constantes*; y las únicas transformaciones son las de los extremos, id y ρ , donde hay que observar que ρ es su propio inverso, es decir, $\rho \circ \rho = \text{id}$.

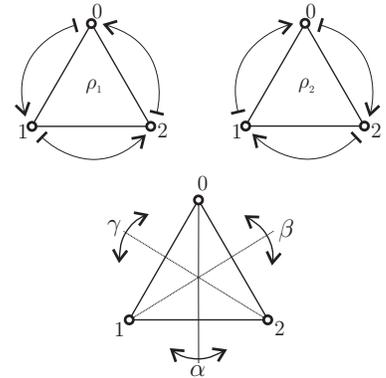
Consideremos ahora a $\Delta_3 := \{0, 1, 2\}$, un conjunto con tres elementos. Una función de Δ_3 en sí mismo puede especificarse en una tablita:

$$\begin{array}{l} 0 \mapsto x \\ 1 \mapsto y \\ 2 \mapsto z, \end{array}$$

donde $x, y, z \in \Delta_3$. Como las imágenes ($x, y, z \in \Delta_3$) son arbitrarias, tenemos que hay $3^3 = 27$ funciones en total; pero de éstas solamente $3 \times 2 \times 1 = 6$ son transformaciones. Pues si queremos que sea biyectiva, una vez que el 0 escoge su imagen, al 1 sólo le quedan dos opciones para escoger y cuando lo hace, al 2 ya no le queda más que una opción obligada.

Estas seis transformaciones son:

	id		ρ_1		ρ_2
0	\mapsto 0		\mapsto 1		\mapsto 2
1	\mapsto 1		\mapsto 2		\mapsto 0
2	\mapsto 2		\mapsto 0		\mapsto 1
	α		β		γ
0	\mapsto 0		\mapsto 2		\mapsto 1
1	\mapsto 2		\mapsto 1		\mapsto 0
2	\mapsto 1		\mapsto 0		\mapsto 2



que podemos visualizar como las “simetrías” de un triángulo equilátero. Vistas así, las tres de arriba corresponden a rotaciones (la identidad rota 0 grados), y cumplen con que ρ_1 y ρ_2 son inversas, es decir $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1 = \text{id}$, lo que corresponde a que una rota 120° en una dirección y la otra 120° en la dirección contraria. Pero también cumplen que $\rho_1 \circ \rho_1 = \rho_2$ (que podríamos escribir $\rho_1^2 = \rho_2$ si convenimos en que

$$f^n = \overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f},$$

donde f es cualquier transformación; es decir, f^n es f compuesta consigo misma n veces, lo cual tiene sentido sólo cuando f sale de y llega al mismo conjunto). Por su parte, las tres transformaciones siguientes se llaman *transposiciones* y geoméricamente se ven como *reflexiones*. Cumplen que $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \text{id}$, y además cumplen otras relaciones como que $\alpha \circ \beta = \rho_1$, lo cual se ve persiguiendo elementos:

	β		α
0	\mapsto 2		\mapsto 1
1	\mapsto 1		\mapsto 2
2	\mapsto 0		\mapsto 0;

o bien, que $\alpha \circ \beta \circ \alpha = \beta \circ \alpha \circ \beta = \gamma$ (¡compruébalo persiguiendo elementos!). Para poder concluir con elegancia, conviene introducir las siguientes nociones generales. Hay ciertos conjuntos de transformaciones que son tan importantes que conviene darles un nombre específico, el de **grupo**:

Definición 3.1.2 A un conjunto G de transformaciones de un conjunto A se le llama un *grupo de transformaciones* de A si cumple

- i) $\text{id}_A \in G$
- ii) $f, g \in G \Rightarrow g \circ f \in G$
- iii) $f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G$.

Ejemplos triviales de grupos serían el conjunto de *todas* las transformaciones de A , o bien, sólo su identidad, $\{\text{id}_A\}$.

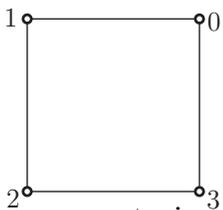
En el caso de $A = \Delta_3$, el grupo de todas sus transformaciones tiene seis elementos; pero también hay otro grupo de transformaciones que consiste en las tres del primer renglón, las rotaciones; pues contiene a la identidad (es un conjunto no vacío), es *cerrado bajo composición* (cumple **(ii)**) y es *cerrado bajo inversas* (cumple **(iii)**). Y también cada una de las transposiciones (o reflexiones) junto con la identidad forman un grupo (con dos elementos) de transformaciones de Δ_3 .

Dado un conjunto cualquiera de transformaciones de A , el grupo que *genera* es el grupo de transformaciones que se obtiene de todas las posibles composiciones con elementos de él o sus inversos.

Por ejemplo, α y β generan todas las transformaciones de Δ_3 (pues ya las hemos descrito como composiciones de α y β); mientras que ρ_1 genera el grupo de rotaciones de Δ_3 (que consiste de id, ρ_1 y $\rho_1^2 = \rho_2$). Las *relaciones* que cumplen α y β son

$$\alpha^2 = \beta^2 = (\beta \circ \alpha)^3 = \text{id}.$$

Si consideramos ahora a $\Delta_4 := \{0, 1, 2, 3\}$, tendríamos que el conjunto de sus funciones tiene $4^4 = 256$ elementos, mientras que el grupo de todas sus transformaciones tiene $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ elementos (demasiados para escribirlos todos). Pero dentro de éste, podemos encontrar otros grupos, que podemos llamar *subgrupos*.

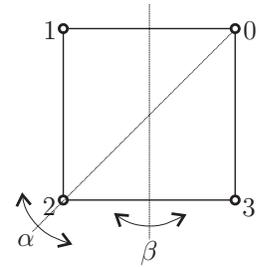


rotaciones (incluyendo a la identidad), y cuatro reflexiones.

Uno importante es el de aquellas transformaciones que mantienen intacta (que *preservan*) la estructura del cuadrado regular cuyos vértices se etiquetan $0, 1, 2, 3$ en orden cíclico; por ejemplo, la que mantiene fijos al 0 y al 1 pero que transpone al 2 y al 3 no preserva al cuadrado pues, por ejemplo, la arista del 1 al 2 va a una diagonal, la $1 - 3$. No es difícil ver que éstas (las *simetrías* del cuadrado) son ocho: las cuatro

Pero en vez de escribirlas todas podemos describirlas mediante generadores. Sean ahora

$$\begin{array}{cc}
 & \alpha & & \beta \\
 0 & \mapsto 0 & 0 & \mapsto 1 \\
 1 & \mapsto 3 & 1 & \mapsto 0 \\
 2 & \mapsto 2 & 2 & \mapsto 3 \\
 3 & \mapsto 1 & 3 & \mapsto 2,
 \end{array} \tag{3.1}$$



entonces $\beta \circ \alpha$ es la rotación $(0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 0)$ y las otras dos rotaciones del cuadrado son $(\beta \circ \alpha)^2$ y $(\beta \circ \alpha)^3$; mientras que las dos reflexiones que faltan describir son $(\alpha \circ \beta \circ \alpha)$ y $(\beta \circ \alpha \circ \beta)$. Podemos entonces concluir que el grupo de simetrías del cuadrado está generado por α y β que cumplen las relaciones

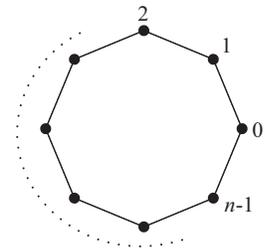
$$\alpha^2 = \beta^2 = (\beta \circ \alpha)^4 = \text{id},$$

mientras que el grupo de rotaciones tiene un solo generador $\rho = (\beta \circ \alpha)$ que cumple $\rho^4 = \text{id}$.

Para referencia posterior, y a reserva de que se estudien con más detenimiento en el caso general en la Sección 3.3.2, conviene poner nombre a los grupos de transformaciones que hemos descrito.

Al conjunto de todas las transformaciones de un conjunto con n elementos $\Delta_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ se le llama el *grupo simétrico de orden n* ; se le denota \mathbf{S}_n y consta de $n! := n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ (n factorial) elementos también llamados *permutaciones*.

Dentro de este grupo hemos considerado dos subgrupos (para $n = 3, 4$): el que preserva la estructura del polígono regular con n lados cuyos vértices se etiquetan $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ en orden cíclico, al cual se le llama el *grupo diédrico de orden n* , y se le denota \mathbf{D}_n , que tiene $2n$ elementos; y el subgrupo de éste generado por la *rotación* $(0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto \dots \mapsto (n-1) \mapsto 0)$ que tiene n elementos, se le llama *grupo cíclico de orden n* y se le denota \mathbf{C}_n . Hay que observar que para $n = 3$ el diédrico y el simétrico coinciden ($\mathbf{S}_3 = \mathbf{D}_3$) pero esto ya no sucede para $n = 4$.



EJERCICIO 3.5 Para el caso $n = 4$, escribe explícitamente (en forma de tabla de asignaciones) las ocho transformaciones del grupo diédrico \mathbf{D}_4 ; su expresión más económica (en el número de símbolos usados) como composición de α y β (definidas por las tablas de asignaciones (3.1)), y también da su representación geométrica.

EJERCICIO 3.6 ¿Puedes encontrar un subgrupo de \mathbf{S}_4 “esencialmente igual” a \mathbf{S}_3 ?

EJERCICIO 3.7 ¿Puedes encontrar un subgrupo de \mathbf{S}_4 de orden 12? (Piensa en un tetraedro regular en \mathbb{R}^3 y describe el grupo geoméricamente.)

EJERCICIO 3.8 ¿Puedes encontrar una permutación $\gamma : \Delta_4 \rightarrow \Delta_4$ tal que α, β y γ generen todas las permutaciones \mathbf{S}_4 (por supuesto que $\gamma \notin \mathbf{D}_4$)?

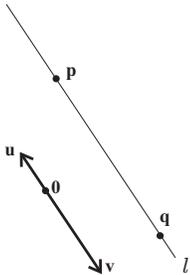
EJERCICIO 3.9 Da explícitamente (con la tabla de asignación $\Delta_n \rightarrow \Delta_n$) dos generadores α y β para los grupos diédricos de orden $n = 5$ y $n = 6$ (es decir, para las simetrías del pentágono y el hexágono). ¿Qué relaciones cumplen? ¿Puedes intuir y describir lo equivalente para el caso general?

***EJERCICIO 3.10** Considera un cubo Q en \mathbb{R}^3 . Etiqueta sus vértices con Δ_8 . Dentro de S_8 hay un subgrupo que es el que preserva la estructura geométrica del cubo. ¿Cuántos elementos tiene? ¿Puedes describirlo con generadores y relaciones?

3.2 Las transformaciones afines de \mathbb{R}

El primer grupo de transformaciones geométrico-analíticas que estudiaremos es el que surge de la ambigüedad en la parametrización de rectas. Recuérdese que nuestra definición original de una recta fue con un parametro real, pero para una sola recta hay muchas parametrizaciones (dependen de escoger un punto base y un vector direccional); la forma de relacionarse de estos parametros serán las transformaciones afines.

Supongamos que tenemos una misma recta l parametrizada de dos maneras distintas. Es decir, que tenemos



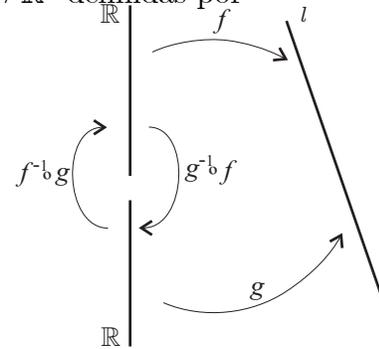
$$\begin{aligned} l &= \{ \mathbf{p} + t \mathbf{v} : t \in \mathbb{R} \} \\ l &= \{ \mathbf{q} + s \mathbf{u} : s \in \mathbb{R} \}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ (aunque también funciona el razonamiento que sigue en cualquier espacio vectorial). Sabemos además que los vectores direccionales, \mathbf{u} y \mathbf{v} son distintos de $\mathbf{0}$ para que efectivamente describan una línea recta. La pregunta es ¿cómo se relacionan los parametros t y s ?

Otra manera de pensar estas rectas es como la imagen de funciones cuyo dominio son los reales, es decir, tenemos dos funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbf{p} + t \mathbf{v} \\ g(s) &= \mathbf{q} + s \mathbf{u}, \end{aligned}$$

cuya imagen es la misma recta l . Puesto que ambas son biyecciones sobre l , podemos restringir el codominio y pensarlas a ambas como funciones de \mathbb{R} en l . Y entonces tiene sentido hablar de sus inversas $f^{-1} : l \rightarrow \mathbb{R}$ y $g^{-1} : l \rightarrow \mathbb{R}$. La pregunta es entonces ¿cómo se expresan las funciones $(g^{-1} \circ f)$ y $(f^{-1} \circ g)$ que van de \mathbb{R} en \mathbb{R} ?



Puesto que \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos (definen la misma recta), existe un número real $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = \mathbf{a}\mathbf{v}$; de hecho $\mathbf{a} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) / (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$, y obsérvese que $\mathbf{a} \neq 0$. Y además como $\mathbf{q} \in \ell$, se puede expresar en términos de la primera parametrización; es decir, existe $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{p} + \mathbf{b}\mathbf{v}$. Tenemos entonces que para cualquier $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(s) &= \mathbf{q} + s\mathbf{u} \\ &= \mathbf{p} + \mathbf{b}\mathbf{v} + s(\mathbf{a}\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{p} + (\mathbf{a}s + \mathbf{b})\mathbf{v} \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{a}s + \mathbf{b}); \end{aligned}$$

al aplicar la función f^{-1} a ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$(f^{-1} \circ g)(s) = \mathbf{a}s + \mathbf{b}.$$

Para obtener la otra composición, podemos proceder más directamente, considerando esta última expresión como la que da al parametro \mathbf{t} . Es decir

$$\mathbf{t} = \mathbf{a}s + \mathbf{b},$$

de donde, como $\mathbf{a} \neq 0$, podemos despejar

$$s = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{t} - \mathbf{b}\mathbf{a}^{-1}.$$

Definición 3.2.1 Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *afín* si se escribe como

$$f(x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}, \tag{3.2}$$

donde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$; y cuando $\mathbf{a} \neq 0$ la llamaremos *transformación afín*.

Nuestro uso de el término transformación se justifica por el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 3.11 Demuestra que la función afín (3.2) es biyectiva si y sólo si $\mathbf{a} \neq 0$.

EJERCICIO 3.12 Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = -x + 2$. Encuentra las fórmulas para f^{-1} , g^{-1} , f^2 , $f \circ g$ y $g \circ f$.

EJERCICIO 3.13 Demuestra que las transformaciones afines son cerradas bajo inversas y composición.

Obsérvese que las gráficas de las funciones afines son las rectas no verticales, pues éstas están dadas por la ecuación $\mathbf{y} = \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Y que de éstas las rectas no horizontales corresponden a las transformaciones afines.

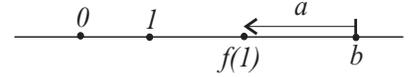
Al conjunto de todas las transformaciones afines de \mathbb{R} , que por el ejercicio anterior forman un grupo, lo denotaremos $\mathbf{Af}(1)$.

Podemos ahora resumir lo que hicimos en los párrafos anteriores.

Lema 3.3 *Dos parametrizaciones de una misma recta se relacionan por una transformación afín entre los parámetros.* □

Así como las parametrizaciones de rectas dependen de la elección de dos puntos en ellas, las transformaciones afines dependen únicamente de dos valores. Pues las constantes que la definen, \mathbf{a} y \mathbf{b} en nuestro caso (3.2), se obtienen como

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= f(0) \\ \mathbf{a} &= f(1) - f(0) \end{aligned}$$



y representan un cambio de escala (multiplicar por \mathbf{a}) y luego una traslación (sumarle \mathbf{b}). De tal manera que si nos dicen que f es una función afín que manda al 0 en \mathbf{b} ($f(0) = \mathbf{b}$) y al 1 en \mathbf{c} ($f(1) = \mathbf{c}$), recuperamos toda la función por la fórmula

$$f(x) = (\mathbf{c} - \mathbf{b})x + \mathbf{b},$$

y obsérvese que es transformación cuando $f(0) \neq f(1)$; si no: es constante. Si el 0 y el 1 pueden ir a cualquier pareja de números por una transformación afín, entonces cualquier pareja de números (distintos) puede ser enviada al $0, 1$ (por la inversa) y de ahí a cualquier otra pareja. Hemos demostrado así el:

Teorema 3.4 (Dos en Dos) *Dados dos pares de puntos x_0, x_1 y y_0, y_1 en \mathbb{R} , (donde por par se entiende que son distintos, i.e., $x_0 \neq x_1$ y $y_0 \neq y_1$), existe una única transformación afín $f \in \mathbf{Af}(1)$ que manda una en la otra, i.e., tal que $f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$. \square*

EJERCICIO 3.14 Encuentra la transformación afín $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple:

- a) $f(2) = 4$ y $f(5) = 1$
- b) $f(1) = -1$ y $f(2) = 3$
- c) $f(-1) = 0$ y $f(3) = 2$

EJERCICIO 3.15 Encuentra la fórmula explícita (en términos de x_0, x_1, y_0, y_1) de la función f del Teorema 3.4.

EJERCICIO 3.16 Discute qué pasa en el Teorema 3.4 (y en la fórmula del ejercicio anterior) si se permite que en los pares se dé la igualdad.

3.2.1 Isometrías de \mathbb{R}

Hemos dicho que las transformaciones afines de la recta consisten de un “cambio de escala” (determinado por la constante \mathbf{a}) y luego una traslación (determinada por \mathbf{b}). Pero podemos ser más precisos. Como la distancia en \mathbb{R} se mide por la fórmula $d(x, y) = |x - y|$, podemos demostrar que todas las distancias cambian por el mismo factor bajo la transformación afín $f(x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |\mathbf{a}x + \mathbf{b} - (\mathbf{a}y + \mathbf{b})| = |\mathbf{a}x - \mathbf{a}y| \\ &= |\mathbf{a}(x - y)| = |\mathbf{a}||x - y| = |\mathbf{a}|d(x, y). \end{aligned}$$

Tenemos entonces una familia distinguida de transformaciones afines que son las que **no** cambian la escala, las que mantienen rígida la recta real y que llamaremos *isometrías* de \mathbb{R} porque preservan la métrica (la distancia). Denotemos

$$\mathbf{Iso}(1) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b \quad \text{con} \quad |a| = 1\}$$

(dejamos como ejercicio demostrar que es un grupo de transformaciones).

Tenemos que $\mathbf{Iso}(1)$ se divide naturalmente en dos clases de transformaciones: las *traslaciones*, cuando $a = 1$ (y la función es entonces $f(x) = x + b$), que consisten en deslizar la recta rígidamente hasta que el 0 caiga en b ; o bien las *reflexiones*, cuando $a = -1$, y que entonces se escriben $g(x) = -x + b$. Veámos que estas últimas tienen un *punto fijo*, es decir, un punto que se queda en su lugar bajo la transformación. Éste debe satisfacer la ecuación $g(x) = x$ que es

$$x = -x + b$$

y que implica $x = b/2$. Entonces, lo que hacen las reflexiones es intercambiar rígidamente los dos lados de un punto que podemos llamar su *espejo* (pues por ejemplo, $g(b/2 + 1) = b/2 - 1$ y en general se tiene que $g(b/2 + x) = b/2 - x$), y de ahí el nombre de “reflexión”.

EJERCICIO 3.17 Demuestra que $\mathbf{Iso}(1)$ es un grupo de transformaciones de \mathbb{R} .

EJERCICIO 3.18 Demuestra que las traslaciones de \mathbb{R} , que denotaremos $\mathbf{Tra}(1)$, forman un grupo de transformaciones.

EJERCICIO 3.19 Demuestra que si $f \in \mathbf{Af}(1)$ no tiene puntos fijos (es decir, que $f(x) \neq x$ para toda $x \in \mathbb{R}$), entonces es una traslación no trivial. (La trivial es trasladar por 0 , que es la identidad y tiene a todo \mathbb{R} como puntos fijos).

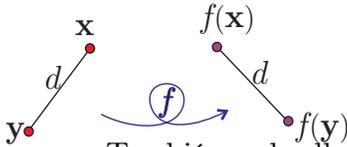
EJERCICIO 3.20 Demuestra, usando la fórmula, que la inversa de cualquier reflexión es ella misma.

EJERCICIO 3.21 Demuestra que la composición de dos reflexiones es una traslación del doble de la distancia (dirigida) entre sus espejos.

3.3 Isometrías y transformaciones ortogonales

En esta sección se estudian las transformaciones más importantes de la geometría euclidiana en su sentido estricto, pues son las que preservan la métrica, la noción de distancia y, por lo tanto, la estructura rígida de las figuras geométricas. Puesto que la definición general es intuitivamente nítida, partiremos de ella y deduciremos las propiedades básicas de las isometrías que nos llevarán, en las secciones siguientes, a obtener las fórmulas explícitas que las definen y que entonces nos facilitarán la obtención de nuevos resultados y su comprensión cabal.

Es importante señalar que muchos de los resultados de esta sección, así como las definiciones, sólo dependen de las nociones de distancia y producto interior en un espacio vectorial. Así que procederemos en general (para $n = 1, 2, 3$, puede pensarse) y hasta el final de la sección, salvo por los ejemplos, concretaremos los resultados al plano.



Definición 3.3.1 Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una *isometría* si preserva distancia. Es decir, si para todo par $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})).$$

También se les llama *transformaciones rígidas* (aunque esta terminología no cobrará sentido hasta que demos demos que son biyectivas). Se denota por $\mathbf{Iso}(n)$ al conjunto de todas las isometrías de \mathbb{R}^n .

Nótese que la definición tiene sentido en cualquier espacio métrico, y que coincide para $n = 1$ con las de la sección anterior (3.2.1). Las isometrías mandan al espacio en sí mismo de manera tal que cualquier estructura rígida se mantiene. Estas funciones o transformaciones las vemos a diario. Por ejemplo, mover una silla de un lugar a otro induce una isometría si pensamos que el espacio euclidiano se puede generar y definir respecto de ella; el efecto de esta isometría en la silla es ponerla en su destino.

Antes de ver más ejemplos en detalle, demostraremos tres lemas generales que usan solamente la definición de isometría y tienden hacia la demostración de que las isometrías forman un grupo de transformaciones.

Lema 3.5 Una isometría $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *inyectiva*.

Demostración. Esto se debe a que la distancia entre puntos diferentes es estrictamente positiva. Formalmente, supongamos que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ son tales que $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$. Esto implica que $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = 0$. Como f es isometría, entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = 0$ y por lo tanto $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. \square

Lema 3.6 Si $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son isometrías entonces $g \circ f$ también lo es.

Demostración. Usando la regla de composición y la definición de isometría dos veces (primero para g y luego para f), se obtiene que para cualquier $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d((g \circ f)(\mathbf{x}), (g \circ f)(\mathbf{y})) &= d(g(f(\mathbf{x})), g(f(\mathbf{y}))) \\ &= d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \\ &= d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

y por tanto $g \circ f \in \mathbf{Iso}(n)$. \square

Lema 3.7 Si $f \in \mathbf{Iso}(\mathbf{n})$ y tiene inversa f^{-1} , entonces $f^{-1} \in \mathbf{Iso}(\mathbf{n})$.

Demostración. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$d(f^{-1}(\mathbf{x}), f^{-1}(\mathbf{y})) = d(f(f^{-1}(\mathbf{x})), f(f^{-1}(\mathbf{y})))$$

pues f es isometría. Pero la última expresión es $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, lo cual demuestra que $f^{-1} \in \mathbf{Iso}(\mathbf{n})$. \square

Nos falta entonces demostrar que las isometrías son suprayectivas para concluir que $\mathbf{Iso}(\mathbf{n})$ es un grupo de transformaciones. Aunque esto sea intuitivamente claro (“una transformación rígida del plano no puede dejar partes descubiertas”), la demostración sería de momento complicada; con un poco más de técnica será muy sencilla. Así que vale suponer que es cierto por un rato, desarrollar los ejemplos, la intuición y la técnica y luego volver a preocuparnos.

3.3.1 Ejemplos

Ya hemos visto los ejemplos en la recta (cuando $\mathbf{n} = 1$), que son traslaciones y reflexiones. Ejemplos en el plano serían rotar alrededor de un punto fijo, reflejar en una recta o bien trasladar por un vector fijo todo el plano. Estas últimas son muy fáciles de definir:

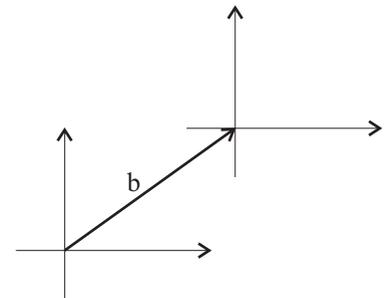
Traslaciones

Dado un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, la *traslación por \mathbf{b}* es la función

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{b}} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + \mathbf{b}, \end{aligned}$$

que claramente es una transformación (inyectiva, pues $\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{y} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$; y sobre, pues $\tau_{\mathbf{b}}^{-1} = \tau_{-\mathbf{b}}$). Y además es una isometría ($\tau_{\mathbf{b}} \in \mathbf{Iso}(\mathbf{n})$) ya que

$$\begin{aligned} d(\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}), \tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{y})) &= |\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) - \tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{y})| \\ &= |(\mathbf{x} + \mathbf{b}) - (\mathbf{y} + \mathbf{b})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

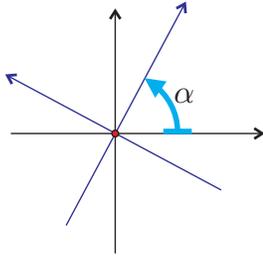


De hecho, las traslaciones forman un grupo de transformaciones de \mathbb{R}^n , al que denotaremos $\mathbf{Tra}(\mathbf{n})$, que puede identificarse con el grupo aditivo \mathbb{R}^n ; en lenguaje de grupos “son *isomorfos*”, pues hay una traslación por cada elemento de \mathbb{R}^n , y su regla de composición es claramente

$$\tau_{\mathbf{b}} \circ \tau_{\mathbf{a}} = \tau_{(\mathbf{a} + \mathbf{b})}.$$

Rotaciones

Definir explícitamente las rotaciones es más difícil, aunque intuitivamente sea claro a qué nos referimos: “clavar una tachuela en algún punto y luego rotar el plano alrededor de ella un cierto ángulo”. Usando coordenadas polares sí es fácil definir la rotación de un ángulo α alrededor del origen, pues al ángulo de cualquier vector simplemente le sumamos el ángulo de rotación. Así que podemos definir la *rotación de un ángulo α alrededor del origen* como

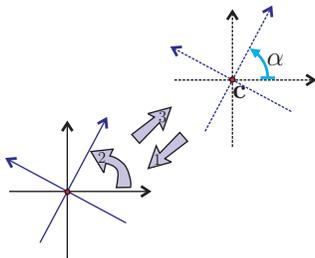


$$\begin{aligned} \rho_\alpha &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \rho_\alpha(\theta, r) &= (\theta + \alpha, r) \quad (\text{en coordenadas polares}). \end{aligned}$$

Nótese que entonces $\rho_0 = \rho_{2\pi} = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ y se cumple, como en las traslaciones, que

$$\rho_\beta \circ \rho_\alpha = \rho_{(\alpha+\beta)},$$

pero ahora sumando ángulos. Además son transformaciones (biyectivas, insistimos en ello) pues tienen inversa $\rho_\alpha^{-1} = \rho_{-\alpha}$ de tal manera que las rotaciones alrededor del origen forman un grupo de transformaciones de \mathbb{R}^2 (isomorfo al de los ángulos con la suma: los elementos de este grupo —transformaciones por definición, que más adelante denotaremos con $\text{SO}(2)$ — están en correspondencia uno a uno con los puntos del círculo unitario \mathbb{S}^1 de tal manera que la composición corresponde a la suma de ángulos).



Ahora, usando las traslaciones podemos definir las rotaciones con centro en cualquier otro lado con un truco llamado *conjugación*. Para obtener la rotación de un ángulo α con centro en el punto \mathbf{c} , denotémosla con $\rho_{\alpha, \mathbf{c}}$; podemos llevar el centro \mathbf{c} al origen por medio de la traslación $\tau_{-\mathbf{c}}$, rotamos ahí y luego regresamos a \mathbf{c} a su lugar; es decir, podemos definir

$$\rho_{\alpha, \mathbf{c}} = \tau_{\mathbf{c}} \circ \rho_\alpha \circ \tau_{-\mathbf{c}}.$$

Aunque sea intuitivamente cristalino que las rotaciones son isometrías (se puede rotar un vidrio), no tenemos aún una demostración formal de ello; y con coordenadas polares se ve “en chino” pues expresar distancias (o traslaciones) en términos de ellas está igual de complicado. Mejor nos esperamos a tener buenas expresiones cartesianas de las rotaciones para demostrar que preservan distancias y que al componer dos rotaciones cualesquiera se obtiene otra (el problema por ahora es encontrar su centro). Y entonces veremos que junto con las traslaciones forman el grupo de *movimientos rígidos del plano*, llamados así pues se puede llegar a cualquiera de estas transformaciones *moviendo* continuamente (poco a poco) el plano.

EJERCICIO 3.22 Demuestra formalmente (con las definiciones anteriores) que el conjunto de rotaciones alrededor de un punto dado \mathbf{c} es un grupo.

EJERCICIO 3.23 ¿Puedes encontrar el centro de la rotación de 90° que se obtiene rotando 45° en el origen y luego rotando otros 45° en el punto $(2,0)$? (Haz dibujos —o juega con tachuelas y un acetato sobre un papel cuadriculado— y busca un punto que se quede en su lugar después de las dos rotaciones.) ¿Cuál es el centro de rotación si se invierte el orden de la composición?

EJERCICIO 3.24 A partir de tu experiencia con el ejercicio anterior, y sin preocuparte por las formalidades, ¿puedes dar una receta geométrica para encontrar el centro de rotación de la composición de dos rotaciones (con centros distintos, por supuesto)?

EJERCICIO 3.25 ¿Puedes conjeturar qué transformación es $\rho_{-\alpha, \mathbf{b}} \circ \rho_{\alpha, \mathbf{c}}$? ¿Puedes demostrarlo? Si no, ¿qué hace falta?

Reflexiones

Las reflexiones (que intercambian rígidamente los dos lados de una “línea espejo”) las podemos definir usando la proyección ortogonal a una recta. Dada una recta $\ell \subset \mathbb{R}^2$, se le puede definir por la ecuación normal $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$ con \mathbf{u} un vector unitario y $c \in \mathbb{R}$ una constante (lo que habíamos llamado ecuación unitaria). Sabemos que para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ el vector que lleva a \mathbf{x} ortogonalmente a la recta ℓ es

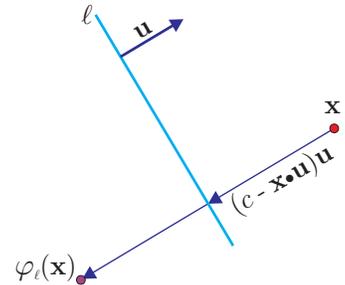
$$(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{u}$$

pues

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{x} + (c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} + (c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = c.$$

Entonces, el reflejado de \mathbf{x} en el espejo ℓ será empujarlo otro tanto del otro lado de ℓ . Así que definimos la *reflexión* de \mathbb{R}^2 a lo largo de $\ell : \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$ (con $|\mathbf{u}| = 1$) como

$$\begin{aligned} \varphi_\ell : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi_\ell(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + 2(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{3.3}$$



Obsérvese que no nos preocupamos por las propiedades de grupo respecto a las reflexiones porque **no** lo son. Ni siquiera contienen la identidad.

EJERCICIO 3.26 Usando coordenadas (x, y) , da fórmulas más sencillas para las reflexiones en los ejes coordenados y verifica que coinciden con la fórmula anterior.

EJERCICIO 3.27 Usando coordenadas da fórmulas sencillas para las reflexiones en las rectas $x = y$ y $x = -y$.

EJERCICIO 3.28 Usando coordenadas da fórmulas sencillas para las reflexiones en las rectas $x = c$ y $y = c$ donde c es cualquier constante.

EJERCICIO 3.29 Define reflexiones en planos de \mathbb{R}^3 .

EJERCICIO 3.30 Demuestra que las reflexiones son isometrías.

EJERCICIO 3.31 Demuestra que si φ es una reflexión, entonces $\varphi^{-1} = \varphi$.

EJERCICIO 3.32 Demuestra que si φ_ℓ es la reflexión en la recta ℓ , entonces $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ es un punto fijo de φ_ℓ , i.e. $\varphi_\ell(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, si y sólo si $\mathbf{x} \in \ell$.

3.3.2 Grupos de simetrías

Supongamos por un momento (luego lo demostraremos) que las isometrías de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3$) forman un grupo (algo que no es difícil de creer). Entonces podemos definir los “grupos de simetrías” de las figuras, en el plano o de los cuerpos en el espacio, correspondiendo a nuestra intuición milenaria de lo que queremos decir cuando decimos que algo “tiene simetría”, por ejemplo al hablar de una flor, de un dibujo o de un edificio.

Para fijar ideas, pensemos en una figura en un papel, y al papel como el plano \mathbb{R}^2 . La abstracción más elemental es que la figura es un subconjunto F de \mathbb{R}^2 : los puntos del plano están en F (pintados de negro) o no (de blanco como el papel). Si nos ponemos quisquillosos, podríamos distinguir colores en los puntos (algo que hacen las computadoras hoy día) y tener entonces una función $\gamma : F \rightarrow \{\text{Colores}\}$ para ser más precisos. Pero quedémonos con el bulto, una *figura* F es un subconjunto de \mathbb{R}^n (de una vez englobamos los sólidos en \mathbb{R}^3). Una *simetría* de F (y hasta el término “sí-metría” lo indica) es una transformación que preserva la métrica y la figura, es decir una $f \in \mathbf{Iso}(n)$ tal que $f(F) = F$ (donde estamos aplicando la transformación a un conjunto para obtener un nuevo conjunto). Podemos definir entonces el *grupo de simetrías* de la figura $F \subset \mathbb{R}^n$ como el conjunto

$$\mathbf{Sim}(F) := \{f \in \mathbf{Iso}(n) \mid f(F) = F\}.$$

Debemos demostrar entonces que además de ser un conjunto de transformaciones de \mathbb{R}^n cumple con las propiedades que lo hacen un grupo; que estamos usando los términos con propiedad:

i) Claramente $\text{id}_{\mathbb{R}^n} \in \mathbf{Sim}(F)$ pues $\text{id}(F) = F$. De tal manera que cualquier figura tiene al menos la simetría trivial; y si la figura F no tiene otra simetría diríamos coloquialmente que **no** tiene simetrías, que es asimétrica.

ii) Supongamos que $f \in \mathbf{Sim}(F)$; entonces al sustituir $F = f(F)$ obtenemos que

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(f(F)) = (f^{-1} \circ f)(F) = \text{id}(F) = F,$$

donde estamos usando nuestra suposición de que $\mathbf{Iso}(n)$ es un grupo y entonces que $f^{-1} \in \mathbf{Iso}(n)$ ya existe.

iii) Si $f, g \in \mathbf{Sim}(F)$ entonces, como ninguna de las dos cambia la figura, se obtiene que

$$(f \circ g)(F) = f(g(F)) = f(F) = F.$$

Que dice lo obvio: si un movimiento deja una figura en su lugar le podemos aplicar otro que la deje en su lugar y sigue en su lugar.

De tal manera que cualquier figura o cuerpo tiene asociado un grupo de isometrías; qué tan grande es ese grupo es nuestra medida intuitiva de “su simetría”. Por ejemplo, el cuerpo humano (abstracto, por supuesto) tiene como simetría no trivial una reflexión, que al ser su propia inversa forma, junto con la identidad, un grupo. Y ahora sí, podemos definir formalmente los grupos que esbozamos (para $n \geq 5$, y definimos para $n = 3, 4$) en la primera sección de este capítulo.

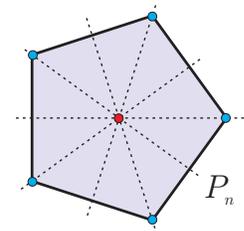
Grupos diédricos

Consideremos el polígono regular de n lados P_n , con $n \geq 2$, cuyos vértices son el conjunto

$$\{v_{k,n} := (\cos(2\pi k/n), \text{sen}(2\pi k/n)) \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}$$

y que consiste en los segmentos entre puntos sucesivos $\overline{v_{k,n}v_{k+1,n}}$ llamados sus *caras, lados o aristas*; y si se quiere se puede pensar que también lo de adentro es parte de P_n . Definimos entonces el *grupo diédrico de orden n* como su grupo de simetrías:

$$D_n := \text{Sim}(P_n).$$



Es claro que D_n contiene las n rotaciones en el origen $\rho_{2\pi k/n}$ que incluyen la identidad ($k = 0$ o $k = n$). Pero además tiene reflexiones cuyos espejos son las líneas por el origen y los vértices y las líneas por el origen y el punto medio de sus lados (que para n impar ya estaban contados). En cualquier caso, son exactamente n reflexiones pues en nuestro conteo hubo repeticiones. De tal manera que D_n tiene $2n$ elementos.

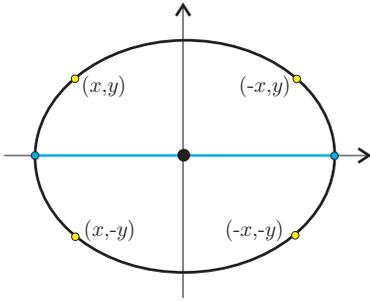
Esta clase de simetría es la que tienen los rosetones de las iglesias (por lo que también se les conoce como “grupos de rosetas o bien de rosetones”); muchas de las figuras de papel picado que se obtienen al doblar radialmente y luego cortar con tijeras; algunas plazas y edificios famosos y múltiples flores así como las estrellas de mar.

Más cercano al “corazoncito” de este libro, podemos considerar las cónicas. Sea \mathcal{E} la elipse dada por la ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a > b$ (aunque lo que importa es que $a \neq b$). Es claro por el dibujo que las simetrías de \mathcal{E} son las reflexiones en los ejes. Pero lo podemos demostrar formalmente pues, como se debió haber respondido al ejercicio correspondiente, la reflexión en el eje x está dada por la fórmula

$$\varphi_x(x, y) = (x, -y).$$



Y análogamente, la reflexión en el eje y es $\varphi_y(x, y) = (-x, y)$, de tal manera que su composición (en cualquier orden) es la rotación de π en el origen $((x, y) \mapsto (-x, -y))$. Si el punto (x, y) está en la elipse, satisface la ecuación y entonces los otros tres puntos que se obtienen al cambiar el signo a una o a las dos coordenadas también la satisfacen pues cambiar el signo no afecta los cuadrados. Esto implica que \mathcal{E} va en sí misma al reflejar en cualquiera de los ejes, que en adelante llamaremos sus *ejes de simetría*. Falta ver que no tiene ninguna otra simetría y esto se sigue de que su

diámetro (el segmento máximo entre sus puntos, que mide $2a$) es único. Y puesto que \mathbf{D}_2 es, por definición, el grupo de simetrías de un segmento, entonces

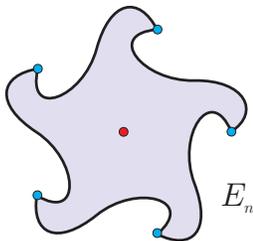
$$\mathbf{Sim}(\mathcal{E}) = \mathbf{D}_2.$$

Análogamente, el grupo de simetrías de una hipérbola es el diédrico de orden 2. Las parábolas tienen menos simetrías, sólo una reflexión, que junto con la identidad forma un grupo que podemos llamar \mathbf{D}_1 para completar la definición de los diédricos (finitos). Nótese que este tipo de simetría (el de una sola reflexión, junto con la identidad) es muy común, el cuerpo humano (en abstracto, por supuesto), casi todos los animales, una silla, etcétera.

Grupos cíclicos

Son el subgrupo del diédrico correspondiente que consiste en tomar únicamente las rotaciones. Pero lo importante es que también son grupos de simetría de figuras.

Para obtener una, podemos reemplazar las aristas del polígono P_n por curvas que distingan entre salida y llegada, por ejemplo, un símbolo de “integral” para obtener a la “estrella ninja de n picos” E_n . Y entonces el *grupo cíclico de orden n* es



$$\mathbf{C}_n := \mathbf{Sim}(E_n).$$

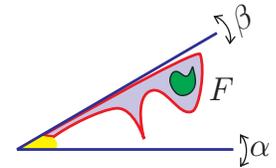
El grupo cíclico de orden n , \mathbf{C}_n , tiene n elementos. Se puede identificar con el grupo de residuos módulo n , denotado con \mathbb{Z}_n , donde la composición corresponde a la suma.

Parece que el gran Leonardo da Vinci notó que cualquier figura plana que se pueda dibujar en una hoja de papel (traducida a una figura $F \subset \mathbb{R}^2$ acotada) y que no tenga todas las simetrías de un círculo (que no sea un conjunto de anillos concéntricos) tiene como grupo de simetrías a alguno de estos dos tipos; es decir, o es diédrico o es cíclico. Una versión de este resultado la demostraremos hacia el final del capítulo, aunque desde ahora se puede entender su enunciado. Dice que si G es un grupo de isometrías que, como conjunto, es finito, entonces es cíclico o es diédrico; que con estos dos ejemplos ya acabamos.

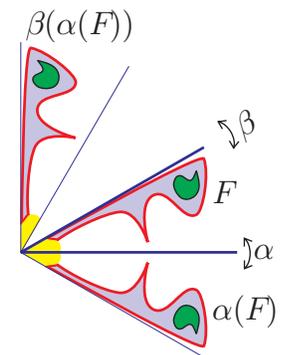
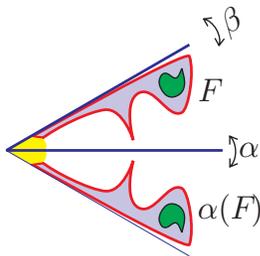
Sin embargo, hay otros grupos de simetría interesantes. Si pensamos en figuras no acotadas; por ejemplo, una cuadrícula o un mosaico (un cubrimiento del plano con copias de unas cuantas piezas), M digamos, entonces $\mathbf{Sim}(M)$ es lo que se llama un grupo cristalográfico. De estos solamente hay 17, pero no lo demostraremos en este libro.

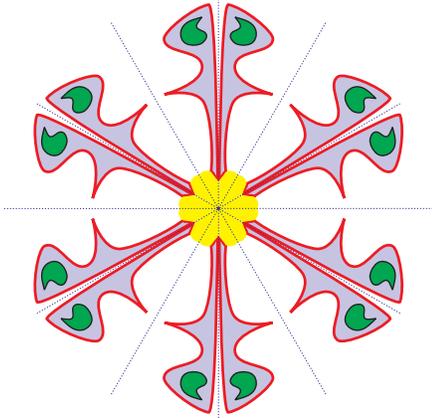
Diédrico y cíclico infinitos

Para entender el porqué del nombre en sus versiones infinitas, vale la pena retomar la idea de generadores de un grupo usada en la primera sección. Para generar una figura con simetría diédrica (que quizá, como veremos, debía llamarse *caleidoscópica*) basta poner dos espejos en un ángulo π/n y colocarlos sobre cualquier dibujo; la porción de éste que queda entre ellos se “reproduce” caleidoscopicamente y forma alrededor de la arista donde se juntan los espejos una figura con simetría \mathbf{D}_n .

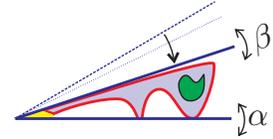


Consideremos esta situación en el plano del dibujo. Sean α y β las reflexiones en los dos espejos (que ahora son líneas en el plano y los espejos verdaderos son los planos que emanan perpendicularmente de ellas) y sea F la figura que queda en el ángulo relevante. La figura $\alpha(F)$ tiene la orientación contraria a F , es un reflejado de ella. Al volverla a reflejar en β ($\beta(\alpha(F))$) esta nueva copia de F ya tiene la orientación original y se obtiene rotando a F el doble del ángulo entre los espejos, a saber, $2\pi/n$ alrededor de su punto de intersección. Pero esto no se cumple sólo para la figura F : es una propiedad de las transformaciones, es decir, $\beta \circ \alpha$ es dicha rotación. La composición en el otro orden, $\alpha \circ \beta$, resulta ser la rotación inversa (de $-2\pi/n$ en el punto de intersección). Así, a cada copia o imagen de la figura F que se ve en el ángulo de espejos corresponde un elemento del grupo diédrico que es justo la transformación que lleva a F ahí y que se obtiene componiendo sucesivamente las dos reflexiones originales α y β . La figura con simetría diédrica o caleidoscópica que se genera es la unión de todas estas copias (justo $2n$) de lo que se podría llamar la *figura fundamental* que habíamos denotado F .



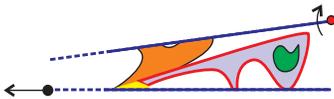


Hemos visto que, como en los casos $n = 3, 4$, los grupos diédricos están generados por dos reflexiones; a saber, D_n está generado por dos reflexiones cuyos espejos se encuentran en un ángulo π/n (en las figuras tomamos $n = 6$). ¿Qué pasa si hacemos crecer n ? Es claro que la figura fundamental F tenderá a hacerse más flaca y astillada, mientras que la figura caleidoscópica que generan (F y las reflexiones α y β), que podemos denotar $D_n(F)$, pues resulta natural definir

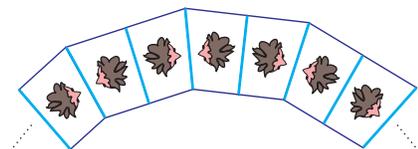


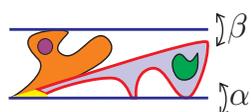
$$D_n(F) := \bigcup_{g \in D_n} g(F),$$

se hará más pesada y confusa, pues el ángulo π/n disminuye. Sin embargo, podemos evitar este tumulto si al mismo tiempo que n crece y π/n disminuye, alejamos el punto de intersección de los espejos; es decir, podemos girar uno de los espejos (el correspondiente a β , digamos) alrededor de algún punto fijo y esto produce que el punto de intersección se aleje.



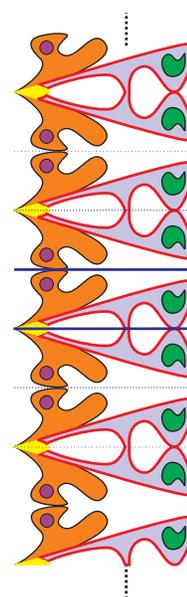
La figura $D_n(F)$ que se genera entonces es un anillo cuyo radio es grande: es como esos pasillos circulares que se generan en un baño o closet con espejos encontrados pero no perfectamente paralelos; aunque los espejos se acaben, los planos que definen se intersectan en una línea (imaginaria) que es el eje, el centro, del pasillo circular donde están nuestras imágenes viendo alternadamente en ambos sentidos y girando poco a poco.





Desde luego, este proceso tiene un límite: cuando n tiende a infinito el espejo de β llega sin problemas a una paralela al espejo de α ; y en ese momento generan el *grupo diédrico infinito* \mathbf{D}_∞ . Es el grupo que aparece en las peluquerías donde ponen espejos en paredes opuestas y, en teoría, paralelas. Cada elemento de este grupo es una composición (*palabra*) del estilo $\alpha\beta\alpha\beta\cdots\beta\alpha$, aunque puede empezar y terminar con cualesquiera de α o β . El subgrupo que consiste de palabras pares (incluyendo a la vacía que representa la identidad), que son composición de un número par de reflexiones, es el *cíclico infinito*, \mathbf{C}_∞ : consta de puras traslaciones y está generado por la más chica de ellas: $\alpha\beta$ o $\beta\alpha$, da lo mismo. De tal manera que naturalmente se identifica con los enteros (\mathbb{Z}) y la suma corresponde a la composición.

Pero el grupo diédrico infinito, como la figura con su simetría lo indica, realmente vive en la recta. Cualquier par de reflexiones distintas en $\mathbf{Iso}(1)$ lo generan. Y si lo definimos como subgrupo de isometrías de \mathbb{R}^2 , fue porque gráficamente es más fácil de ver y para justificar la naturalidad de su pomposo nombre.



Nótese, por último, que aunque al escoger distintas reflexiones para generar el diédrico infinito (o cualquiera de los finitos, para este caso) se pueden obtener subconjuntos (estrictamente) distintos de isometrías, pero la estructura algebraica de ellos (cómo se comportan bajo composición) es esencialmente la misma. De tal manera que los grupos diédricos y cíclicos que hemos definido deben pensarse como algo abstracto que tiene muchas instancias de realización geométrica. Así que, estrictamente hablando, cuando decimos que el grupo generado por tal par de reflexiones es el diédrico fulano, realmente deberíamos decir “es **un** diédrico de zutanito orden”.

EJERCICIO 3.33 Sean α y β las dos reflexiones de \mathbb{R} con espejos en el 0 y en el 1 respectivamente, y sea (para este y los siguientes ejercicios) $\mathbf{D}_\infty \subset \mathbf{Iso}(1)$ el grupo de transformaciones que generan α y β . Da las fórmulas explícitas de α , β , $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$ y $\alpha \circ \beta \circ \alpha$.

EJERCICIO 3.34 ¿Cuál es el grupo $\mathbf{D}_\infty \cap \mathbf{Tra}(1)$? Da la fórmula explícita de todos sus elementos y su correspondiente expresión como generado por α y β . (*El próximo ejercicio te puede ayudar.*)

EJERCICIO 3.35 Demuestra que las reflexiones en \mathbf{D}_∞ son precisamente las reflexiones con espejo entero. Es decir, cuyo espejo está en $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.36 ¿Cuáles son los generadores del grupo diédrico infinito cuyo subgrupo de traslaciones corresponde precisamente a las traslaciones por números enteros \mathbb{Z} .

3.3.3 Transformaciones ortogonales

Hemos definido isometrías, visto los ejemplos básicos y desarrollado la importante noción de simetría —y no sólo importante en las matemáticas sino en la naturaleza donde parece ser muy abundante—, pero tenemos aún muy pocas herramientas técnicas para demostrar cosas tan elementales como que $\mathbf{Iso}(n)$ es un grupo. Para esto serán fundamentales las transformaciones ortogonales. Pero su motivación más natural viene de recapitular cómo introdujimos la noción de distancia: como una consecuencia natural del producto interior que era más elemental y fácil de trabajar; y a éste lo hemos tenido olvidado. Si las isometrías se definieron como las funciones que preservan distancia, algo similar se debe poder hacer con el producto interior.

Definición 3.3.2 Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una *transformación ortogonal* si preserva el producto interior. Es decir, si para todo par $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}).$$

Se denota por $\mathbf{O}(n)$ el grupo de *transformaciones ortogonales* de \mathbb{R}^n .

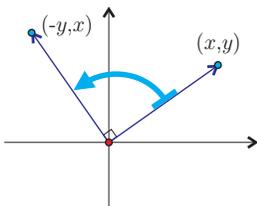
El lector observador debió haber notado que nos estamos adelantando al usar los términos “transformación” y “grupo” en la definición anterior. Estrictamente hablando, deberíamos usar los términos más modestos de “función” y “conjunto”, pero como sé (autor) que sí va a tener sentido, vale la pena irse acostumbrando; además, en este caso me suenan horrible los términos modestos, no me hallo usándolos. Por lo pronto, para limpiar un poco la conciencia, dejamos al lector quisquilloso que cumpla los primeros trámites hacia la “liberación total” de los términos verdaderos.

EJERCICIO 3.37 Demuestra que la composición de funciones ortogonales es ortogonal.

EJERCICIO 3.38 Demuestra que si una función ortogonal tiene inversa entonces ésta también es ortogonal.

EJERCICIO 3.39 Demuestra que $\mathbf{O}(1) = \{\text{id}_{\mathbb{R}}, -\text{id}_{\mathbb{R}}\}$, donde $(-\text{id}_{\mathbb{R}})(x) = -x$. Recuerda que el producto interior en \mathbb{R} es el simple producto. Observa que entonces las transformaciones ortogonales de \mathbb{R} son sus isometrías que dejan fijo el origen.

Antes de entrar a las demostraciones, veamos un ejemplo que nos ha sido muy útil, el compadre ortogonal en \mathbb{R}^2 . Hemos usado al compadre ortogonal de un vector dado, pero, como lo indicamos en el momento de su presentación, si pensamos en todas las asignaciones al mismo tiempo obtenemos una función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , que podemos designar como $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y que está dada por la fórmula explícita



$$\rho(x, y) = (-y, x).$$

Para demostrar que el compadre ortogonal es una transformación ortogonal (valga y explíquese la redundancia), hay que escribir la fórmula para $\rho(\mathbf{x}) \cdot \rho(\mathbf{y})$ con (conviene cambiar a subíndices) $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ cualquier par de vectores:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}) \cdot \rho(\mathbf{y}) &= (-x_2, x_1) \cdot (-y_2, y_1) \\ &= (-x_2)(-y_2) + x_1 y_1 \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\end{aligned}$$

(de hecho esto fue el inciso **(iii)** del Lema 1.12 que presentaba sus monerías en sociedad). Si el compadre ortogonal que, como función, consiste en girar 90° alrededor del origen es ortogonal, es de esperarse que todas las rotaciones en el origen también lo sean, y así será. Pero antes, relacionemos las transformaciones ortogonales con las isometrías.

Puesto que la distancia se define en términos del producto interior, debe cumplirse que una función ortogonal también es isometría.

Lema 3.8 $O(n) \subset Iso(n)$.

Demostración. Sea $f \in O(n)$. Debemos demostrar que preserva distancias sabiendo que preserva producto interior. Pero esto es fácil pues la distancia se escribe en términos del producto interior. Dados \mathbf{x} y \mathbf{y} en \mathbb{R}^n , la definición de distancia es

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}.$$

Al elevar al cuadrado y usar las propiedades del producto interior se tiene entonces

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \quad (3.4)$$

Como esto se cumple para cualquier par de puntos, en particular para $f(\mathbf{x})$ y $f(\mathbf{y})$, tenemos

$$\begin{aligned}d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))^2 &= f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{y}) - 2f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ &= d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2,\end{aligned}$$

donde usamos que $f \in O(n)$ en la segunda igualdad. Puesto que las distancias son positivas, de aquí se sigue que

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

y por tanto que $f \in Iso(n)$. □

EJERCICIO 3.40 Demuestra que las funciones ortogonales son inyectivas.

Ahora veremos que lo único que le falta a una isometría para ser ortogonal es respetar el origen. Para que tenga sentido, hay que remarcar que una función ortogonal $f \in \mathbf{O}(n)$ preserva el origen pues éste es el único vector cuyo producto interior consigo mismo se anula, es decir, $f(\mathbf{0}) \cdot f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0 \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Lema 3.9 Sea $f \in \mathbf{Iso}(n)$ tal que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, entonces $f \in \mathbf{O}(n)$.

Demostración. Con la misma idea del lema anterior, hay que escribir ahora el producto interior en términos de distancias. De la ecuación (3.4), se sigue

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2).$$

Y como $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})^2$, tenemos entonces

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{2}(d(\mathbf{x}, \mathbf{0})^2 + d(\mathbf{y}, \mathbf{0})^2 - d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2)$$

y ya estamos armados para enfrentar el lema.

Sea $f \in \mathbf{Iso}(n)$ (preserva distancias) tal que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Por lo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2}(d(f(\mathbf{x}), \mathbf{0})^2 + d(f(\mathbf{y}), \mathbf{0})^2 - d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))^2) \\ &= \frac{1}{2}(d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{0}))^2 + d(f(\mathbf{y}), f(\mathbf{0}))^2 - d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))^2) \\ &= \frac{1}{2}(d(\mathbf{x}, \mathbf{0})^2 + d(\mathbf{y}, \mathbf{0})^2 - d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \end{aligned}$$

□

Estamos ya en posición de expresar todas las isometrías en términos de las ortogonales y las traslaciones.

Proposición 3.10 Sea $f \in \mathbf{Iso}(n)$. Entonces existen $g \in \mathbf{O}(n)$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tales que para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b},$$

y además son únicas.

Demostración. Veamos primero la unicidad, es decir, que si suponemos que existen $g \in \mathbf{O}(n)$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tales que f se escribe $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$, entonces g y \mathbf{b} están forzadas. Puesto que las transformaciones ortogonales dejan fijo el origen, obtenemos que

$$f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b},$$

y entonces la constante \mathbf{b} está forzada a ser $\mathbf{b} := f(\mathbf{0})$. Pero entonces g ya queda definida por la ecuación

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$$

para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Nos falta entonces demostrar que con esta última definición de la función g y el vector constante $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que g es ortogonal.

Observéese que otra manera de definir a g sería $g = \tau_{-\mathbf{b}} \circ f$, donde hay que recordar que $\tau_{-\mathbf{b}}$ es la traslación por $-\mathbf{b}$. Por el Lema 3.6 (la composición de isometrías es isometría) y puesto que las traslaciones son isometrías, se obtiene que $g \in \mathbf{Iso}(n)$. Pero además, como

$$g(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) - \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

entonces $g \in \mathbf{O}(n)$ por el lema anterior y la existencia queda demostrada. \square

Tenemos entonces que las isometrías se obtienen de las transformaciones ortogonales al permitir que interactúen, que se involucren, que se compongan, con las traslaciones (que **no** son ortogonales, de hecho sólo se intersectan en la identidad, $\mathbf{O}(n) \cap \mathbf{Tra}(n) = \{\text{id}\}$, pues la única traslación que deja fijo el origen es por $\mathbf{0}$). Corresponde esto al hecho de que la distancia se obtiene del producto interior trasladando un punto al origen. Y por tanto, para acabar de entender $\mathbf{Iso}(n)$ debemos estudiar $\mathbf{O}(n)$. Como en un ejercicio ya establecimos el caso de $\mathbf{O}(1) \simeq \{1, -1\}$, concentrémonos en $\mathbf{O}(2)$.

Sea $f \in \mathbf{O}(2)$. Como f preserva el producto interior, también preserva la norma y en particular manda al círculo unitario \mathbb{S}^1 en sí mismo:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1 \Rightarrow f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) = 1 \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in \mathbb{S}^1.$$

Pero también preserva ortogonalidad (definida con base en el producto interior). Entonces debe mandar bases ortonormales en bases ortonormales. Veámoslo con el ejemplo más simple.

Dibujo

Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ la base canónica de \mathbb{R}^2 ; es decir $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Y sean

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &:= f(\mathbf{e}_1) \\ \mathbf{v} &:= f(\mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

Afirmamos que \mathbf{u} y \mathbf{v} son una base ortonormal, pues de que $f \in \mathbf{O}(2)$ (preserva producto interior) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \end{aligned}$$

Y entonces podemos encontrar el valor de $f(\mathbf{x})$ para cualquier \mathbf{x} usando el teorema de las bases ortonormales (Teorema 1.23) sobre $f(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + (f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \\ &= (f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{e}_1))\mathbf{u} + (f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{e}_2))\mathbf{v} \\ &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{u} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{v}, \end{aligned}$$

Dibujo que se puede escribir, tomando como de costumbre $\mathbf{x} = (x, y)$, como

$$f(x, y) = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}. \quad (3.5)$$

Hemos llegado entonces a una fórmula explícita para las funciones ortogonales (de \mathbb{R}^2) que depende únicamente de sus valores en la base canónica. Por ejemplo, si f fuera la función “compadre ortogonal”, entonces $\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{v} = f(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1$ y por lo tanto $f(x, y) = x\mathbf{e}_2 - y\mathbf{e}_1 = (-y, x)$ como ya sabíamos. Podemos resumir con la:

Proposición 3.11 *Si $f \in \mathbf{O}(2)$, existe una base ortonormal \mathbf{u}, \mathbf{v} de \mathbb{R}^2 para la cual f se escribe*

$$f(x, y) = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}.$$

De aquí podemos sacar por el momento dos resultados: el primero, que estas funciones ortogonales son suprayectivas (y por lo tanto que ya les podemos decir “transformaciones” y a $\mathbf{O}(2)$ “grupo” con todas las de la ley); y el segundo, que es una descripción geométrica de todas ellas.

Primero, con la notación de arriba, dado cualquier $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, es fácil encontrar \mathbf{x} tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Sea $\mathbf{x} := (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u})\mathbf{e}_1 + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}_2$, entonces

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{u} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{v} \\ &= (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{y} \end{aligned}$$

por el Teorema 1.23, y esto demuestra que f es sobre.

Segundo, cuántas transformaciones (¡ahora sí! sin pruritos) ortogonales de \mathbb{R}^2 hay es equivalente a cuántas bases ortonormales podemos escoger. El primer vector \mathbf{u} (la imagen de \mathbf{e}_1 , insistamos) puede ser cualquiera en el círculo unitario \mathbb{S}^1 ; pero una vez escogido ya nada más nos quedan dos posibilidades para escoger el segundo, pues éste debe ser perpendicular y unitario. Puede ser el compadre ortogonal ($\mathbf{v} = \mathbf{u}^\perp$) o bien su negativo ($\mathbf{v} = -\mathbf{u}^\perp$). En el primer caso, la transformación resulta ser una rotación que manda a la base canónica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ en la base rotada $\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp$. Y en el segundo caso veremos que es una reflexión. Podríamos decir entonces que $\mathbf{O}(2)$ “consiste en dos copias” de \mathbb{S}^1 parametrizadas por \mathbf{u} : una corresponde a las rotaciones (cuando se escoje $\mathbf{v} = \mathbf{u}^\perp$) y la otra a las reflexiones.

Pero para que todo esto sea un hecho nos falta demostrar que sin importar que base ortonormal tomemos, siempre se obtiene una transformación ortogonal.

Proposición 3.12 Sea \mathbf{u}, \mathbf{v} una base ortonormal de \mathbb{R}^2 . Entonces la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x\mathbf{u} + y\mathbf{v},$$

es una transformación ortogonal.

Demostración. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ cualquier par de puntos en \mathbb{R}^2 . Entonces

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) &= (x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}) \cdot (y_1\mathbf{u} + y_2\mathbf{v}) \\ &= (x_1y_1)\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + (x_2y_2)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \end{aligned}$$

□

EJERCICIO 3.41 Demuestra que las isometrías de \mathbb{R}^2 son suprayectivas, para concluir con la demostración de que $\mathbf{Iso}(2)$ es un grupo de transformaciones.

EJERCICIO 3.42 Demuestra que las funciones ortogonales de \mathbb{R}^3 son suprayectivas y concluye las demostraciones de que $\mathbf{O}(3)$ e $\mathbf{Iso}(3)$ son grupos de transformaciones.

EJERCICIO 3.43 Sea $f \in \mathbf{O}(2)$ con base ortonormal asociada \mathbf{u}, \mathbf{v} (es decir, con $\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1)$ y $\mathbf{v} = f(\mathbf{e}_2)$). Con nuestra demostración de la suprayectividad de f se puede encontrar la base ortonormal asociada a la inversa de f , llamémosla \mathbf{u}', \mathbf{v}' . Da sus coordenadas explícitas tomando $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

EJERCICIO 3.44 Sean $f \in \mathbf{O}(2)$ y ℓ una recta dada por la ecuación $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$. Demuestra que $f(\ell)$ es la recta dada por la ecuación $f(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{x} = c$ (ojo: tienes que demostrar dos contenciones). Concluye que f manda al haz paralelo con dirección \mathbf{d} en el haz paralelo con dirección $f(\mathbf{d})$.

Un ejemplo

Para fijar ideas, concluyamos esta sección con un ejemplo que nos ayude a comprender el poder de los resultados obtenidos.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotación de 45° (o $\pi/4$) alrededor del punto $\mathbf{p} = (3, 2)$; el problema es escribir una fórmula explícita para f . Es decir, supongamos que queremos dar la función a una computadora para que haga algo con ella, que sepa aplicarla a puntos concretos; no le podemos dar la descripción que acabamos de hacer (y que cualquier ser humano entiende) para definir f , sino que tiene que ser mucho más concreta: una fórmula analítica.

Por la Proposición 3.10, sabemos que f se escribe como

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b},$$

Dibujo

para alguna $g \in \mathbf{O}(2)$ y alguna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. El problema se divide entonces en dos: cómo se escribe g y quién es \mathbf{b} . Primero, g debe ser la rotación de $\pi/4$ en el origen pues f cambia las líneas horizontales en líneas a 45° y en la expresión anterior sólo g puede hacer esta gracia (pues una vez que apliquemos g la traslación mantendrá la orientación de las líneas). Por la Proposición 3.11, para expresar g basta ver que le hace a la base canónica \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y sabemos que tiene que ir a \mathbf{u} , \mathbf{u}^\perp , donde \mathbf{u} es el vector unitario a 45° . Es decir, sea

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

y entonces por (3.5) g se escribe

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x\mathbf{u} + y\mathbf{u}^\perp \\ &= x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y, x + y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y, x + y), \end{aligned}$$

y esto sí que lo entiende una computadora. Para convencernos de que vamos por buen camino basta checar que efectivamente esta fórmula da $g(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}$ y $g(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}^\perp$; e inclusive que $g(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_2$ como dice la geometría.

El segundo problema es encontrar \mathbf{b} . Sabemos por la demostración de la Proposición 3.10 que $\mathbf{b} = f(\mathbf{0})$. Y entonces bastará encontrar este valor particular. Esto se puede razonar de varias maneras, pero lo haremos de manera muy general. Recordemos que definimos rotar en el punto \mathbf{c} como trasladar \mathbf{c} al origen, rotar ahí y luego regresar \mathbf{c} a su lugar. En términos de funciones esto se escribe

$$f = \tau_{\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{-\mathbf{c}},$$

donde $\tau_{\mathbf{x}}$ es la traslación por \mathbf{x} . De aquí se podría sacar directamente la fórmula para f pues ya sabemos expresar g y las traslaciones, y falta nada más desarrollar las expresiones; o bien, podemos sólo aplicar esto al $\mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= f(\mathbf{0}) = (\tau_{\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{-\mathbf{c}})(\mathbf{0}) \\ &= (\tau_{\mathbf{c}} \circ g)(\mathbf{0} - \mathbf{c}) = \tau_{\mathbf{c}}(g(-\mathbf{c})) = g(-\mathbf{c}) + \mathbf{c} \\ &= g(-3, -2) + (3, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -5) + (3, 2) \\ &= \left(3 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

De ahí concluimos que la expresión analítica de f es

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{0}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - 5\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{x} - \mathbf{y} - 1 + 3\sqrt{2}, \mathbf{x} + \mathbf{y} - 5 + 2\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

EJERCICIO 3.45 Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías:

- a) La reflexión en la recta $\ell : \mathbf{x} + \mathbf{y} = 1$.
- b) La rotación de $\pi/2$ en el punto $(-2, 3)$.
- c) La rotación de π en el punto $(4, 3)$.
- d) La reflexión en la recta $\ell : \mathbf{y} = 1$ seguida de la traslación por $(2, 0)$.

EJERCICIO 3.46 Describe geoméricamente (con palabras) las siguientes isometrías:

- a) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} + 1, -\mathbf{y})$.
- b) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (-\mathbf{x} + 2, -\mathbf{y})$.
- c) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (-\mathbf{y}, -\mathbf{x} + 2)$.

3.4 Las funciones lineales

Hemos visto que las transformaciones ortogonales de \mathbb{R}^2 quedan determinadas por lo que le hacen a la base canónica; es decir, que se escriben

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \mathbf{u} + \mathbf{y} \mathbf{v},$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{v} son vectores fijos ($\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1)$ y $\mathbf{v} = f(\mathbf{e}_2)$, bien por definición o bien por la fórmula); y además, vimos que si la función es ortogonal entonces \mathbf{u} y \mathbf{v} forman una base ortonormal. Pero si en esta fórmula no pedimos nada a \mathbf{u} y a \mathbf{v} , simplemente que sean vectores cualesquiera en \mathbb{R}^2 , obtenemos una familia de funciones mucho más grande: las *lineales* de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 (ver el siguiente teorema). Estas funciones son la base del álgebra lineal y serán el fundamento para las transformaciones que más nos interesan, así que vale la pena definir las y estudiarlas un rato en general.

Definición 3.4.1 Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es *lineal* si para todos los vectores \mathbf{x} , $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y todo número $t \in \mathbb{R}$ se cumple que:

- i) $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$
- ii) $f(t\mathbf{x}) = t f(\mathbf{x})$.

Estas funciones, al preservar la suma y la multiplicación por escalares, conservan las operaciones básicas de un espacio vectorial y por eso son tan importantes. Pero en el caso que nos ocupa, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.13 Una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es lineal, si y sólo si se escribe

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x \mathbf{u} + y \mathbf{v},$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{v} son vectores fijos en \mathbb{R}^2 .

Demostración. Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es lineal y sean $\mathbf{u} := f(\mathbf{e}_1)$ y $\mathbf{v} := f(\mathbf{e}_2)$, donde, recuérdese, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ son la base canónica de \mathbb{R}^2 . Dado cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, tenemos que si $\mathbf{x} = (x, y)$ entonces $\mathbf{x} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2$, de donde, usando las propiedades (i) y (ii) respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}) = f(x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2) \\ &= f(x \mathbf{e}_1) + f(y \mathbf{e}_2) \\ &= x f(\mathbf{e}_1) + y f(\mathbf{e}_2) \\ &= x \mathbf{u} + y \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que cualquier función lineal se expresa en la forma deseada.

Por el otro lado, veamos que la función $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x \mathbf{u} + y \mathbf{v}$, con \mathbf{u} y \mathbf{v} arbitrarios, es lineal. Cambiando la notación de las coordenadas, sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. De la definición de f y las propiedades elementales de la suma vectorial tenemos

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (x_1 + y_1) \mathbf{u} + (x_2 + y_2) \mathbf{v} \\ &= (x_1 \mathbf{u} + x_2 \mathbf{v}) + (y_1 \mathbf{u} + y_2 \mathbf{v}) \\ &= f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

lo cual demuestra que f cumple (i). Análogamente, f cumple (ii), pues para cualquier $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{x}) &= (tx_1) \mathbf{u} + (tx_2) \mathbf{v} \\ &= t(x_1 \mathbf{u} + x_2 \mathbf{v}) = t(f(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Lo cual concluye la demostración del teorema. □

Tenemos entonces que las transformaciones ortogonales son funciones lineales, así que ya hemos visto varios ejemplos. Pero son muchas más las lineales de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que las ortogonales (véase el Ejercicio 3.50). Si tomamos la *cuadrícula canónica* con verticales y horizontales en los enteros de los ejes, una transformación lineal la manda en la “rombícula” que generan los vectores imágenes de la base canónica y que consiste en tomar las paralelas a uno de ellos que pasan por los múltiplos enteros del otro. Sólo cuando esta rombícula se sigue viendo como cuadrícula, y del mismo tamaño, tenemos una transformación ortogonal. Pero además, nótese que hemos definido funciones lineales entre diferentes espacios vectoriales y que en la demostración del

teorema no tuvimos que explicitar en dónde viven \mathbf{u} y \mathbf{v} . Si vivieran en \mathbb{R}^3 , por ejemplo, la imagen sería la misma, un plano rombiculado, que tiene la libertad extra de bambolearse.

EJERCICIO 3.47 Demuestra que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineal preserva el origen, es decir, que cumple $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

EJERCICIO 3.48 Demuestra que una función lineal manda líneas en líneas (de ahí su nombre) o a veces en puntos.

EJERCICIO 3.49 Demuestra que la composición de funciones lineales es lineal.

EJERCICIO 3.50 Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x, y) = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$ es ortogonal si y sólo si \mathbf{u}, \mathbf{v} forman una base ortonormal.

EJERCICIO 3.51 Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 3x$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.52 Demuestra que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal si y sólo si es la función $f(x) = ax$ para alguna $a \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.53 Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $f(x) = (3x, 5x)$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.54 Demuestra que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es lineal si y sólo si se escribe $f(x) = (ax, bx)$, para algunos $a, b \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.55 Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = 2x + 4y$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.56 Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y) = (x + y, y - x)$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.57 Exhibe una función lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que mande el eje x a la recta $\ell : 2x - y = 0$.

EJERCICIO 3.58 Demuestra que una función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal, si y sólo si se escribe

$$f(x, y, z) = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w},$$

donde $\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{v} = f(\mathbf{e}_2)$ y $\mathbf{w} = f(\mathbf{e}_3)$.

3.4.1 Extensión lineal

De los ejercicios anteriores, en particular el último, debe quedar claro que el Teorema 3.13 es sólo un caso particular de un resultado general que haremos explícito en esta sección. Aunque estemos especialmente interesados en las dimensiones 1, 2, 3, para ocuparnos de todas ellas a la vez, y evitarnos el molesto trabajo de 6, seis, casos particulares, es necesario trabajar con los abstractos \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m .

Como definimos en el capítulo 1, dados los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ en \mathbb{R}^n , una

combinación lineal de ellos es el vector

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, son escalares cualesquiera llamados los *coeficientes* de la combinación lineal. Por ejemplo, todas las combinaciones lineales de un solo vector ($k = 1$) forman la recta que genera (si es no nulo) y las de dos vectores forman un plano (si no son paralelos). En una combinación lineal se están utilizando simultáneamente las dos operaciones básicas de un espacio vectorial. Ahora bien, si tenemos una función lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, se cumple que *preserva combinaciones lineales* pues

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^k f(\lambda_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(\mathbf{v}_i),$$

donde se usa la propiedad **(i)** de las funciones lineales en la primera igualdad y la **(ii)** en la segunda. Así que podemos redefinir función lineal como aquella que cumple

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(\mathbf{v}_i), \quad (3.6)$$

para cualesquiera $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$; pues esta condición claramente incluye la **(i)** y la **(ii)** de la definición original. Hay que hacer énfasis en que en esta igualdad la combinación lineal de la derecha se da en \mathbb{R}^m (el codominio), mientras que la que tenemos en el lado izquierdo ocurre en \mathbb{R}^n (el dominio), antes de aplicarle la función, que no necesariamente son el mismo espacio.

Por otro lado, \mathbb{R}^n tiene una *base canónica*: los vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$; es decir, para $i = 1, \dots, n$ el vector $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ tiene i -ésima coordenada 1 y el resto 0. Estos se llaman canónicos pues la combinación lineal de ellos que nos da cualquier otro vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se obtiene trivialmente (“canónicamente”) de sus coordenadas:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

De tal manera que para cualquier función lineal f que sale de \mathbb{R}^n se tiene, usando (3.6) y esta última expresión, que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(\mathbf{e}_i).$$

Nos falta ver que los valores que puede tomar f en la base canónica son arbitrarios. Es decir, si tomamos n vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^m$ arbitrariamente, y queremos

encontrar una función lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que cumpla $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces debemos definirla en todo \mathbb{R}^n como

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i.$$

A esta función se le llama la *extensión lineal* a \mathbb{R}^n de lo que determinamos para la base canónica. Pero nos falta demostrar que efectivamente es lineal. Sin embargo, esto es muy fácil de hacer usando la definición original de función lineal y las de suma y multiplicación por escalares; hay que copiar la del Teorema 3.13 con más coordenadas, y dejamos este trabajo al lector. Podemos resumir entonces con el siguiente teorema.

Teorema 3.14 *Una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es lineal si y sólo si se escribe*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i,$$

donde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^m$. Nótese que $\mathbf{u}_i = f(\mathbf{e}_i)$. □

Corolario 3.15 *Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ son dos funciones lineales tales que $f(\mathbf{e}_i) = g(\mathbf{e}_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Por el teorema, tienen la misma expresión. □

El teorema, o bien su corolario, pueden llamarse “Teorema de extensión única de funciones lineales”. La moraleja es que una función lineal depende únicamente de unos cuantos valores: los que le asigna a la base canónica, y éstos, una vez fijado el codominio, son arbitrarios.

EJERCICIO 3.59 Describe el lugar geométrico definido como $\mathcal{L} = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}\}$, donde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.60 Describe el lugar geométrico definido como $\Pi = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$, donde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.61 ¿Qué ejercicios del bloque anterior se siguen inmediatamente del Teorema 3.14? Reescríbelos.

3.4.2 La estructura de las funciones lineales

En el capítulo 1 dejamos en suspenso un ejercicio donde se pregunta al lector si conoce algún otro espacio vectorial que no sea \mathbb{R}^n . Sería desleal dejar pasar ese ejemplo cuando lo tenemos en las narices. Efectivamente, cuando fijamos el dominio y el contradominio, las funciones lineales entre ellos tienen naturalmente la estructura de un espacio vectorial.

Fijemos la notación. Sea $\mathcal{L}(n, m)$ el conjunto de todas las funciones lineales de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m , es decir

$$\mathcal{L}(n, m) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ es lineal}\}.$$

Como en el codominio se tienen las operaciones de suma y multiplicación por escalares, estas operaciones se pueden definir también en las funciones; en cierta manera, las funciones las heredan. Dadas $f, g \in \mathcal{L}(n, m)$ y $t \in \mathbb{R}$, sean

$$\begin{aligned} f + g &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (f + g)(\mathbf{x}) &:= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} t f &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (t f)(\mathbf{x}) &:= t(f(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Hay que demostrar que estas nuevas funciones también son lineales. Y esto es muy fácil a partir de la definición original, pues dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (f + g)(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) &= f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) + g(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}) + \lambda g(\mathbf{x}) + \mu g(\mathbf{y}) \\ &= \lambda(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) + \mu(f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y})) \\ &= \lambda(f+g)(\mathbf{x}) + \mu(f+g)(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Formalmente nos falta demostrar que estas operaciones cumplen todas las propiedades que se les exigen a los espacios vectoriales (el Teorema ??). Esto depende esencialmente de que \mathbb{R}^m es espacio vectorial (no de que sean funciones lineales) y dejamos los detalles como ejercicio lateral (no esencial) a la línea del texto. Los nuevos ejemplos de espacio vectorial son entonces los conjuntos de funciones que salen de algún lugar (con alguna propiedad —el caso que desarrollamos fue que son lineales—) pero que **caen** en un espacio vectorial (en nuestro caso, \mathbb{R}^m).

EJERCICIO 3.62 Sea V un espacio vectorial y sea X cualquier conjunto. Demuestra que el conjunto de todas las funciones de X en V , $\mathcal{F}(X, V)$, tiene una estructura natural de espacio vectorial. (En particular $\mathcal{L}(n, m)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ que es inmensamente más grande.)

EJERCICIO 3.63 Sea $\Delta_n = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto finito “canónico” con n elementos. Como corolario del Teorema 3.14, demuestra que los espacios vectoriales $\mathcal{L}(n, m)$ y $\mathcal{F}(\Delta_n, \mathbb{R}^m)$ se pueden identificar naturalmente.

3.5 Matrices

Las matrices son arreglos rectangulares de números, tablas podría decirse, donde los renglones y las columnas no tienen ningún significado extra, como podrían tener, por ejemplo, en la tabla de calificaciones parciales de alumnos en un curso. Así de simple, las matrices son tablas limpias, abstractas. En nuestro contexto actual, habrán de ser los “paquetes” que cargan toda la información de las funciones lineales y nos darán la herramienta para hacer cálculos respecto a ellas, además de simplificar la notación.

En matemáticas, la notación es importante. Una notación clara y sencilla permite ver la esencia de las cosas, de las ideas y de los problemas. Por el contrario, con una notación complicada o confusa es fácil perderse en la labor de desentrañarla y nunca llegar a las ideas profundas; piénsese, por ejemplo, en diseñar un algoritmo para multiplicar con números romanos. Viene esto al caso, pues esta sección trata básicamente de cómo simplificar la notación para lograr manejar las transformaciones geométricas muy en concreto. Encontraremos la mecánica y la técnica para hacer cálculos con facilidad. Para empezar, cambiaremos nuestra notación de vectores.

3.5.1 Vectores columna

Como crítica a la notación que traemos, escribamos una función lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ explícitamente. Digamos que $f(\mathbf{e}_1) = (1, 2, 3)$, $f(\mathbf{e}_2) = (6, 5, 4)$ y $f(\mathbf{e}_3) = (2, 3, 1)$; entonces sabemos que f se escribe

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x(1, 2, 3) + y(6, 5, 4) + z(2, 3, 1) \\ &= (x + 6y + 2z, 2x + 5y + z, 3x + 4y + z). \end{aligned}$$

Para hacer este cálculo, la vista tuvo que andar brincoteando en una línea, buscando y contando comas; es muy fácil equivocarse. Es más, ¿dónde está el error? Sin embargo, sabemos que el cálculo es sencillísimo, mecánico. Si en lugar de considerar los vectores como renglones los tomamos como columnas, el mismo cálculo se hace evidente a la vista

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 6y + 2z \\ 2x + 5y + 3z \\ 3x + 4y + z \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

y eliminamos las comas (y corregimos el error). Ahora cada renglón se refiere a una coordenada, y se ve todo de golpe; mucho mejor notación que haremos oficial.

Notación 3.1 De ahora en adelante, los vectores en \mathbb{R}^n se escribirán como columnas y no como renglones. Es decir, si antes escribíamos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ahora escribiremos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

El inconveniente de que entonces se complica escribir un vector dentro del texto (aquí, por ejemplo), lo subsanamos al llamar a los vectores renglón, *transpuestos* de los vectores columna, y los denotaremos con $\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; o bien, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ conviniendo que los *transpuestos* de vectores renglón son los vectores. Aunque a veces se nos va a olvidar poner el exponente \top de “transpuesto” y el lector nos lo perdonará; y con el tiempo nos lo agradecerá.

Así, por ejemplo, tenemos que la base canónica de \mathbb{R}^2 es $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^\top$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^\top$, que quiere decir

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vale la pena insistir en que no hay ningún cambio esencial. Sólo cambiamos de convención, una pareja ordenada de números se puede pensar horizontal (de izquierda a derecha) o vertical (de arriba a abajo); estamos conviniendo en que lo haremos y escribiremos en sentido vertical.

3.5.2 La matriz de una función lineal

Una matriz de $m \times n$ es un arreglo rectangular (o tabla) de números reales con m renglones y n columnas. Si, usando dos subíndices, denotamos con a_{ij} al número que está en el renglón i y la columna j , llamado *entrada*, tenemos que una matriz de $m \times n$ es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Podríamos también definirla como un conjunto ordenado de n vectores en \mathbb{R}^m : sus columnas. Es decir, la matriz A anterior se puede escribir como

$$A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n), \quad \text{donde} \quad \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

De tal manera que, de acuerdo con el Teorema 3.14, una matriz $m \times n$ tiene justo la información de una función lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m (ojo: se invierte el orden por la convención de que las funciones se componen “hacia atrás”). Explícitamente, a la matriz A se le asocia la función lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que manda al vector canónico $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ en su columna i -ésima, es decir, tal que $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. O

bien, a la inversa, a cada función lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se le asocia la matriz $m \times n$ que tiene como columnas a sus valores en la base canónica, es decir, se le asocia la matriz

$$A = (f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)).$$

Por ejemplo, a la función lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 definida en (3.7) se le asocia la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

que es ya una compactación considerable en la notación; a la transformación “compadre ortogonal” de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 se le asocia la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y a la función lineal que a cada vector en \mathbb{R}^3 lo manda a su segunda coordenada (en \mathbb{R}) se le asocia la matriz 1×3 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1, 0)$.

Ya logramos nuestro primer objetivo, empaquetar en una matriz toda la información de una función lineal. Ahora usémosla como herramienta. Primero, definiremos el producto de una matriz por un vector para que el resultado sea lo que su función lineal asociada hace al vector. Es decir, si A es una matriz $m \times n$, podrá multiplicar sólo a vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y el resultado será un vector en \mathbb{R}^m . Como ya vimos, A se puede escribir $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ donde $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$, para $i = 1, 2, \dots, n$; y por su parte, sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$. Definimos entonces el *producto* de A por \mathbf{x} como

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_n\mathbf{u}_n, \quad (3.8)$$

de tal manera que el Teorema 3.14 junto con su corolario y lo que hemos visto de matrices se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 3.16 *Las funciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m están en correspondencia natural y biunívoca con las matrices de $m \times n$, de tal manera que a la función f le corresponde la matriz A que cumple*

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Obsérvese que cuando $m = 1$ el producto que acabamos de definir corresponde a nuestro viejo conocido, el producto interior. Es decir, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

De tal manera que si escribimos A como una columna de renglones, en vez de un renglón de columnas, entonces hay vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ (los renglones) tales que

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^\top \\ \mathbf{v}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^\top \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

Esta definición del producto de una matriz por un vector es, aunque equivalente, más “desagradable” que la anterior, pues los vectores $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ no tienen ningún significado geométrico; son simplemente la colección ordenada de las i -ésimas coordenadas de los vectores $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^m$. Aunque somos injustos, sí tienen un significado, los renglones \mathbf{v}_i^\top son las matrices asociadas a las m funciones lineales $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que dan las coordenadas de la función original.

Para fijar ideas, y no perdernos en las abstracciones, terminamos esta sección con la expresión explícita del caso que más nos interesa en este libro: la multiplicación de una matriz de 2×2 por un vector en \mathbb{R}^2 , que tiene la fórmula general

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{ax} + \mathbf{by} \\ \mathbf{cx} + \mathbf{dy} \end{pmatrix}$$

donde todos los protagonistas son simples números.

EJERCICIO 3.64 Encuentra las matrices asociadas a las funciones lineales de algunos de los ejercicios anteriores.

EJERCICIO 3.65 Un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se puede pensar como matriz $n \times 1$. Como tal, ¿a qué función lineal representa según el Teorema 3.16?

EJERCICIO 3.66 El conjunto de todas las funciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , que denotamos con $\mathcal{L}(n, m)$ en la Sección 3.4.2, tienen la estructura de espacio vectorial y el Teorema 3.16 dice que está en biyección natural con las matrices $m \times n$. Si definimos la suma de matrices y la multiplicación de escalares por matrices de modo que correspondan a las operaciones análogas en $\mathcal{L}(n, m)$, demuestra que $A + B$ (que tiene sentido sólo cuando A y B son del mismo tipo $m \times n$) es sumar entrada por entrada, y que tA es multiplicar todas las entradas por t . ¿Puedes dar una demostración fácil de que $\mathcal{L}(n, m)$ es un espacio vectorial? (Observa, del ejercicio anterior, que $\mathcal{L}(1, n)$ se identifica naturalmente con \mathbb{R}^n .)

3.5.3 Multiplicación de matrices

Vamos ahora a definir la multiplicación de matrices correspondiendo a la composición de funciones lineales. Tiene sentido componer dos funciones sólo cuando una “acaba” donde la otra “empieza”; más formalmente, cuando el codominio de una coincide con el dominio de la otra. De igual forma, sólo tendrá sentido multiplicar las matrices cuyas dimensiones se “acoplen”. Veámoslo.

Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ dos funciones lineales. Por el Ejercicio 3.49, $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ también es lineal. Sean A la matriz $m \times n$ y B la matriz $k \times m$ que corresponden a f y a g respectivamente. *Definimos el producto* BA como la matriz $k \times n$ que corresponde a la función lineal $g \circ f$. Es decir, BA es la única matriz $k \times n$ que cumple

$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Aunque esta definición ya es precisa según el Teorema 3.16, todavía no nos dice cómo multiplicar. Esto habrá que deducirlo. Recordemos que las columnas de una matriz son las imágenes de la base canónica bajo la función asociada. Así que si $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ donde $\mathbf{u}_i = f(\mathbf{e}_i) \in \mathbb{R}^m$, entonces $(g \circ f)(\mathbf{e}_i) = g(f(\mathbf{e}_i)) = g(\mathbf{u}_i) = B\mathbf{u}_i$. Y por lo tanto

$$BA = B(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = (B\mathbf{u}_1, B\mathbf{u}_2, \dots, B\mathbf{u}_n).$$

Lo cual es muy natural: para obtener las columnas de la nueva matriz, se usa la multiplicación de B por los vectores columna de A , multiplicación que ya definimos. Para expresar cada una de las entradas de la matriz BA , habrá que expresar B como una columna de vectores renglon, y se obtiene

$$BA = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1^\top \\ \mathbf{w}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k^\top \end{pmatrix} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_n \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{u}_n \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

En esta fórmula queda claro por qué los renglones de B (los transpuestos de los vectores \mathbf{w}_i) y las columnas de A (los vectores \mathbf{u}_j) tienen que estar en el mismo espacio (\mathbb{R}^m); y cuál es la mecánica¹ para obtener las entradas de una matriz $k \times n$ (BA) a partir de una $k \times m$ (B) y una $m \times n$ (A). Esta fórmula da, en el caso de matrices 2×2 , lo siguiente

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 3.67 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcula AB , $A(B + C)$, $(C - B)A$.

¹La mecánica de la multiplicación de matrices corresponde a la *ley del karatazo*: un karateca en guardia pone su antebrazo derecho vertical y el izquierdo horizontal —¡(huuouui)!— y se apresta a multiplicar dos matrices: recoge con la mano derecha una columna de la matriz derecha y —¡(aaah₁, aah₂, ..., ah_k)[†]!— le va pegando karatazos a los renglones de la izquierda para obtener la columna correspondiente en el producto; y si es zurdo puede recoger con su buena renglones de la izquierda y —¡(uuuf₁, uuuf₂, ..., uf_n)!— golpear a las columnas derechas (codo arriba) para ir sacando, de una en una, las entradas del producto.

EJERCICIO 3.68 Exhibe matrices A y B de 2×2 tales que $AB \neq BA$. De tal manera que el producto de matrices no es conmutativo.

EJERCICIO 3.69 Exhibe matrices A y B de 2×2 tales que $AB = \mathbf{0}$, pero $A \neq \mathbf{0}$ y $B \neq \mathbf{0}$; donde $\mathbf{0}$ es la matriz cero (con todas sus entradas 0). (*Piensa en términos de funciones.*)

EJERCICIO 3.70 Demuestra que si A, B, C son matrices 2×2 , entonces $A(BC) = (AB)C$, es decir, que el producto de matrices es asociativo, y por lo tanto tiene sentido escribir ABC . (*No necesariamente tienes que escribir todo el producto y tal vez tu demostración valga en general.*)

EJERCICIO 3.71 Demuestra que si A, B, C son matrices 2×2 , entonces $A(B + C) = AB + AC$ y $(A + B)C = AC + BC$.

EJERCICIO 3.72 Demuestra que si A, B son matrices 2×2 entonces $A(kB) = (kA)B = k(AB)$ para cualquier $k \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.73 Usando que la composición de funciones es asociativa demuestra que si A, B, C son matrices $n \times n$ entonces $A(BC) = (AB)C$.

3.5.4 Algunas familias distinguidas de matrices

La matriz identidad

Aunque propiamente dicho no sea una familia se merece su párrafo aparte y, además, ser el primero. La *matriz identidad*, o simplemente “la identidad”, es la matriz asociada a la función identidad, que se denota por I , y es la matriz que tiene 1 en la diagonal y 0 fuera de ella, es decir

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Cumple además que $AI = A$ e $IA = A$ para cualquier matriz A que se deje multiplicar por ella: es la identidad multiplicativa. Nótese que en realidad hay una identidad para cada dimensión, empezando por el 1; así que deberíamos escribir algo así como I_n , pero el contexto en que se usa siempre trae la información de la dimensión.

Homotecias

Las homotecias, como funciones, son simples “cambios de escala”. Si tomamos un número $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ es claramente lineal y se llama una *homotecia*. Entonces tiene una matriz asociada que es kI , la matriz que tiene sólo k en la diagonal y 0 fuera de ella. Como función, lo que hace es

expandir uniformemente desde el origen (si $k > 1$), o bien contraer (cuando $k < 1$); son un *zoom*, pues.

Las homotecias tienen la propiedad de conmutar con cualquier otra matriz, pues $A(kI) = k(AI) = kA = k(IA) = (kI)A$ (y aquí, pudo haber sido que las dos I sean diferentes, lo que depende de A). En términos de funciones, el cambio de escala se puede hacer antes o después de una función lineal y da lo mismo. Y además son las únicas matrices (pensando en matrices cuadradas) que tienen esta propiedad; pero esto lo dejamos como ejercicio.

EJERCICIO 3.74 Demuestra que si una matriz A de 2×2 es tal que $AB = BA$ para todas las matrices B de 2×2 , entonces $A = kI$ para alguna $k \in \mathbb{R}$. (*Tienes que encontrar matrices apropiadas B que te vayan dando información; quizás conviene ver el siguiente párrafo y regresar.*)

Matrices de permutaciones

Recordemos de la Sección 3.1 que una permutación de n elementos es una función biyectiva $\rho : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$, donde podemos tomar $\Delta_n = \{1, 2, \dots, n\}$; y que todas estas permutaciones forman el grupo simétrico de orden n , \mathbf{S}_n , con $n!$ elementos. Ahora bien, a cada permutación $\rho : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ se le puede asociar la función lineal $f_\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f_\rho(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{\rho(i)}$; es decir, f_ρ permuta a los elementos de la base canónica según ρ y se extiende linealmente a \mathbb{R}^n . A la matriz asociada a esta función lineal se le llama la matriz *de* la permutación ρ ; denotémosla A_ρ . Es fácil ver que la multiplicación de matrices de permutaciones es de nuevo una matriz de permutación y corresponde a la composición de las permutaciones correspondientes. Es decir, si $\rho, \sigma \in \mathbf{S}_n$, entonces $A_\rho A_\sigma = A_{\rho \circ \sigma}$. Se tiene entonces que el grupo simétrico se puede ver como un “grupo de matrices”.

Otra manera equivalente de definir las es que son las matrices cuadradas de ceros y unos tales que tienen exactamente un 1 en cada renglón y en cada columna. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

corresponde a la permutación $\{1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 1\}$.

EJERCICIO 3.75 Escribe todas las matrices de permutaciones de orden 2.

EJERCICIO 3.76 Escribe todas las matrices de permutaciones de orden 3. Identifica sus inversas (es decir la matriz asociada a la permutación inversa), y describe en cada caso la transformación lineal de \mathbb{R}^3 correspondiente.

EJERCICIO 3.77 Sea A_ρ la matriz de la permutación $\rho : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$, y sea B cualquier otra matriz de $n \times n$. Describe a las matrices BA_ρ y $A_\rho B$ en términos de la permutación ρ .

***EJERCICIO 3.78** Sea C el cubo en \mathbb{R}^3 centrado en el origen, de lado 2 y con lados paralelos a los ejes coordenados; es decir, sus vértices son los ocho puntos cuyas tres coordenadas son 1 o -1 . Describe el conjunto de matrices cuyas funciones lineales asociadas mandan al cubo en sí mismo. En particular, ¿cuántas son? (*Quizás valga la pena empezar con el problema análogo en dimensión 2.*)

Rotaciones

Regresamos, después de un provechoso paréntesis, a la motivación original que nos llevó a adentrarnos en las funciones lineales.

Sabemos que una rotación es una transformación lineal que manda al vector canónico \mathbf{e}_1 en un vector unitario $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^1$ y al otro vector canónico \mathbf{e}_2 en su compadre ortogonal \mathbf{u}^\perp . Si escribimos a \mathbf{u} en términos de su ángulo respecto del eje x , es decir, respecto a \mathbf{e}_1 , entonces obtenemos que la matriz asociada a la rotación por un ángulo θ es

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Primero veamos que la rotación de un ángulo $-\theta$ nos regresa a la identidad. Como

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \quad \text{y} \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta \quad (3.10)$$

entonces

$$\begin{aligned} R_{-\theta} R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta(-\sin \theta) + \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \end{aligned}$$

Podemos obtener las fórmulas trigonométricas clásicas para el coseno y el seno de la suma de ángulos como consecuencia de la composición de funciones y la multiplicación de matrices. Está claro que si rotamos un ángulo β y después un ángulo α , habremos rotado un ángulo $\alpha + \beta$. Así que

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}.$$

Pero por otro lado, al multiplicar las matrices tenemos

$$\begin{aligned} R_\alpha R_\beta &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,\end{aligned}\tag{3.11}$$

pues si dos matrices coinciden ($R_{\alpha+\beta}$ y $R_\alpha R_\beta$) lo hacen entrada por entrada. Junto con las igualdades trigonométricas de inversos de ángulos, estas últimas dan

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}\tag{3.12}$$

EJERCICIO 3.79 Da una expresión numérica bonita de las matrices asociadas a las rotaciones de $\pi/6, \pi/4, \pi/3, 2\pi/3, \pi, -\pi/2$.

EJERCICIO 3.80 Demuestra que

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}$$

Reflexiones

Animacion

Conviene parametrizar las reflexiones no por el ángulo de la imagen de \mathbf{e}_1 , sino por su mitad, que es el ángulo de la recta-espejo de la reflexión. Pues si, como es natural, a una recta por el origen le asociamos su ángulo (entre 0 y π) con el rayo positivo del eje x , entonces la reflexión, E_θ , en la recta con ángulo θ manda a \mathbf{e}_1 en el vector unitario de ángulo 2θ , y por lo tanto su matriz asociada es

$$E_\theta := \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix},$$

pues el segundo vector no es el compadre ortogonal sino su negativo. Es muy fácil ver que $E_\theta E_\theta = I$, que corresponde a que una reflexión es su propia inversa.

Podemos ahora ver cómo se comporta la composición de reflexiones:

$$\begin{aligned}E_\alpha E_\beta &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta & \cos 2\alpha \sin 2\beta - \sin 2\alpha \cos 2\beta \\ \sin 2\alpha \cos 2\beta - \cos 2\alpha \sin 2\beta & \sin 2\alpha \sin 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix} = R_{2(\alpha - \beta)}\end{aligned}$$

donde hemos usado (3.12). Así que la composición de dos reflexiones es la rotación del doble del ángulo entre sus espejos. Tal y como lo habíamos visto al hablar de generadores de grupos diédricos.

EJERCICIO 3.81 Da una expresión numérica bonita de las matrices asociadas a las reflexiones en espejos a $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4$.

EJERCICIO 3.82 ¿Quiénes son $E_\alpha R_\beta$ y $R_\beta E_\alpha$?

EJERCICIO 3.83 Demuestra con matrices que $R_\beta E_0 R_{-\beta} = E_\beta$.

EJERCICIO 3.84 Demuestra que la fórmula (3.3) obtenida en la Sección 3.3.1 para la reflexión φ_ℓ en la línea ℓ , coincide con la que nos da una matriz E_θ cuando la línea ℓ pasa por el origen.

Matrices ortogonales (y transpuestas)

Decimos que una matriz es *ortogonal* si su función lineal asociada es ortogonal. Según nuestro estudio de las transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^2 , las matrices ortogonales de 2×2 son las que acabamos de describir: las rotaciones y las reflexiones. Podemos considerar entonces al grupo de transformaciones $\mathbf{O}(2)$ como un grupo de matrices con la operación de multiplicación.

Nótese que en las matrices de rotaciones y reflexiones, la matriz *inversa*, esto es, la matriz asociada a la transformación inversa, resultó ser muy parecida a la original; en las reflexiones es la misma y en las rotaciones se intercambian los elementos fuera de la diagonal (que difieren sólo en el signo). Esto no es coincidencia sino parte de algo mucho más general, que haremos explícito en esta sección y que será importante en capítulos posteriores.

Llamemos a una matriz *ortogonal* si es cuadrada y su función lineal asociada es una transformación ortogonal (que preserva producto interior). Entonces, si A es ortogonal, todas sus columnas son vectores unitarios (pues son la imagen de vectores unitarios, los canónicos) y además por parejas son ortogonales (pues así es la base canónica y esto se detecta por el producto interior). Dicho más explícitamente, si $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ entonces $\mathbf{u}_i = f(\mathbf{e}_i)$ donde f es su función asociada ($f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$), y si $f \in \mathbf{O}(2)$ se cumple que

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

donde δ_{ij} es conocida como “la delta de Kroenecker”. En este caso, al conjunto ordenado de vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ se le llama *base ortonormal* (pues son vectores unitarios o normalizados y mutuamente ortogonales). Pero nótese que estos n^2 pro-

ductos interiores $(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j)$ son las entradas de la matriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\top \\ \mathbf{u}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\top \end{pmatrix} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n \end{pmatrix}$$

y que el que sean iguales a la delta de Kroenecker quiere decir que ésta es la matriz identidad. Así que si llamamos *transpuesta* de una matriz a la que se obtiene cambiando columnas por renglones, hemos demostrado que la “inversa” de una matriz ortogonal es su transpuesta.

En general, llamemos la *transpuesta* de una matriz $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ a la matriz

$$A^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^\top \\ \mathbf{v}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^\top \end{pmatrix}$$

que se obtiene al reflejar las entradas en la diagonal; si A es $m \times n$ entonces A^\top es $n \times m$ y se generaliza nuestra noción previa de transpuestos de vectores. Hemos demostrado la mitad del siguiente teorema. Su otra mitad, para el caso que más nos interesa, $n = 2$, es consecuencia inmediata de la Proposición 3.12. Sin embargo damos una nueva demostración, muy general, para ejemplificar el poder de la notación matricial.

Teorema 3.17 *Una matriz A de $n \times n$ es ortogonal (la matriz de una transformación ortogonal) si y sólo si*

$$A^\top A = I.$$

Demostración. Hemos demostrado que si la función $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ preserva producto interior entonces su matriz cumple que $A^\top A = I$. Supongamos ahora que $A^\top A = I$ y demostremos que su transformación asociada preserva producto interior. Para esto, expresaremos al producto interior como un caso más del producto de matrices. Para cualquier $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^\top A\mathbf{y} = (\mathbf{x}^\top A^\top) A\mathbf{y} = \mathbf{x}^\top (A^\top A) \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top (I) \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

donde hemos usado que $(A\mathbf{x})^\top = \mathbf{x}^\top A^\top$ (lo cual es un caso particular de la fórmula $(AB)^\top = B^\top A^\top$ que se deja como ejercicio). Por lo tanto, f es ortogonal (y también A lo es). \square

Así que aunque las entradas de las matrices ortogonales sean complicadas, encontrar sus inversas es muy fácil. Y se explica por qué las inversas de las ortogonales 2×2 fueron tan parecidas a sí mismas.

EJERCICIO 3.85 Sea $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , y sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}.$$

Demuestra directamente que f es ortogonal (preserva producto interior). (Compara con la Proposición 3.12.)

EJERCICIO 3.86 Demuestra que $(A\mathbf{x})^\top = \mathbf{x}^\top A^\top$ cuando A es una matriz $m \times n$ y \mathbf{x} un vector $(n \times 1)$.

EJERCICIO 3.87 Demuestra que $(AB)^\top = B^\top A^\top$ cuando A es una matriz $m \times n$ y B una matriz $(n \times k)$.

EJERCICIO 3.88 Demuestra que la “matriz de Pitágoras”

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

3.6 El Grupo General Lineal ($\mathbf{GL}(2)$)

En esta sección estudiamos las matrices cuyas funciones lineales asociadas son transformaciones, es decir, biyectivas. La definición abstracta será entonces muy fácil, aunque después habrá que hacerla más concreta.

Definición 3.6.1 Una matriz A de $n \times n$ es *invertible* si existe otra matriz de $n \times n$, llamada su *inversa* y denotada A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Al conjunto de todas las matrices invertibles de $n \times n$ se le llama el *grupo general lineal de orden n* y se le denota $\mathbf{GL}(n)$. Así que $A \in \mathbf{GL}(n)$ quiere decir que A es invertible y de $n \times n$.

Para demostrar que las transformaciones lineales $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tienen matrices asociadas que son invertibles sólo habría que ver que su función inversa también es lineal (ver el ejercicio siguiente), y entonces la matriz asociada a ésta será la inversa. Y al revés, si una matriz tiene inversa entonces las funciones lineales asociadas también son inversas. Así que a $\mathbf{GL}(2)$ se le puede pensar como grupo de transformaciones, tal y como lo hicimos en las primeras secciones de este capítulo, o bien como grupo de matrices (donde, hay que enfatizar, la operación del grupo es la multiplicación de matrices).

Ejemplos de matrices invertibles son las ortogonales que ya hemos visto. Así, tenemos que $\mathbf{O}(n)$ es un subgrupo de $\mathbf{GL}(n)$.

EJERCICIO 3.89 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal; es decir, una función lineal con inversa f^{-1} . Demuestra que su inversa también es lineal.

3.6.1 El determinante

Veamos ahora el problema de detectar de manera sencilla las matrices invertibles de 2×2 . Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matriz cualquiera de 2×2 . Consideremos el problema general de encontrar su inversa, y de paso ver cuándo ésta existe. Tomemos entonces una matriz X cuyas entradas son incógnitas, digamos x, y, z, w , que cumplan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto nos da un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que en realidad se parte en los dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas siguientes

$$\begin{array}{l} ax + by = 1 \\ cx + dy = 0 \end{array} \quad y \quad \begin{array}{l} az + bw = 0 \\ cz + dw = 1, \end{array}$$

que provienen de cada una de las columnas de la identidad, o bien de las columnas de incógnitas. Recordando la Sección 1.6, o bien volviéndola a resolver, se obtiene que si $ad - bc \neq 0$, entonces los dos sistemas tienen soluciones únicas que son precisamente

$$\begin{array}{l} x = \frac{d}{ad - bc} \\ y = \frac{-c}{ad - bc} \end{array} \quad \begin{array}{l} z = \frac{-b}{ad - bc} \\ w = \frac{a}{ad - bc}. \end{array} \quad (3.13)$$

Para enunciar esto de manera elegante conviene definir el *determinante* de la matriz A como el número

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc.$$

Nótese que si $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, entonces $\det(A) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ según lo definimos en la Sección 1.7, de tal manera que el determinante de una matriz es el determinante de sus columnas o el determinante de un sistema de ecuaciones asociado y sólo estamos ampliando naturalmente el espectro del término.

Teorema 3.18 *Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces A es invertible si y sólo si $\det(A) = ad - bc \neq 0$; y en este caso*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Hemos demostrado que si $\det(A) \neq 0$ entonces A es invertible y su inversa tiene la expresión indicada por (3.13). Nos falta ver que si A tiene inversa entonces su determinante no es cero. Pero esto será consecuencia inmediata del siguiente lema que nos da el determinante de un producto.

Lema 3.19 Sean A y B matrices 2×2 , entonces $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Demostración. Sea A como arriba y consideremos B con letras griegas. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \\ &= (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) \\ &= a\alpha c\beta + a\alpha d\delta + b\gamma c\beta + b\gamma d\delta \\ &\quad - a\beta c\alpha - a\beta d\gamma - b\delta c\alpha - b\delta d\gamma \\ &= ad(\alpha\delta - \beta\gamma) + bc(\beta\gamma - \alpha\delta) \\ &= (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) = \det(A) \det(B). \end{aligned}$$

□

Demostración. (del Teorema 3.18). Si A es una matriz invertible entonces existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$. Por el lema anterior se tiene entonces que $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$, y por lo tanto $\det(A)$ no puede ser 0. □

Veamos por último que el determinante de una matriz tiene un significado geométrico. Por el Teorema 1.30, corresponde al área dirigida del paralelogramo generado por sus vectores columna.

Teorema 3.20 Sea A una matriz 2×2 , entonces $\det(A)$ es el área del paralelogramo definido por sus vectores columna. □

Se dice que la matriz A , o que la función $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, *invierte orientación* si $\det(A) < 0$, o bien, que la *preserva* si $\det(A) > 0$. Esto corresponde a que cualquier figura que no tenga simetrías de espejo (por ejemplo, un “manquito” de la mano izquierda) se puede orientar, y bajo transformaciones lineales que preservan orientación, la figura puede deformarse pero conserva su orientación (el manquito seguirá siendo manquito de la mano izquierda); pero bajo transformaciones que invierten orientación se verá como manquito de la otra mano.



Pero además, el determinante de A representa lo que la función f “distorsiona” las áreas. Es decir, si una figura cualquiera F tiene área \mathbf{a} , entonces $f(F)$ tendrá área $\mathbf{a}|\det(A)|$. Sin pretender dar una demostración formal de esto, en general se puede argumentar como sigue. Puesto que la imagen del cuadrado unitario, C , bajo la función f asociada a la matriz $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, es el paralelogramo generado por \mathbf{u} y \mathbf{v} , primero hay que ver que cuadraditos con lados paralelos a los ejes y de lado ε (y área ε^2) van a dar a paralelogramos de área $\varepsilon^2 \det(A)$; y luego observar que las áreas se pueden aproximar por cuadraditos disjuntos de este tipo. Con esta interpretación geométrica del determinante es natural que el determinante de un producto sea el producto de los determinantes, pues el factor de distorsión de áreas de una composición debía de ser el producto de factores de distorsión.

Observemos por último que el determinante distingue nuestras dos clases de matrices ortogonales (en $\mathbf{O}(2)$); es 1 para las rotaciones, y -1 para las reflexiones. Es decir, las rotaciones preservan orientación y las reflexiones la invierten. Además su multiplicación corresponde a cómo se multiplican 1 y -1 .

EJERCICIO 3.90 Demuestra que el determinante de las rotaciones es 1 y el de las reflexiones -1 .

EJERCICIO 3.91 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal asociada a la matriz $A \in \mathbf{GL}(2)$, y sea T cualquier triángulo en el plano. Demuestra que el área de $f(T)$ es $|\det(A)|$ por el área de T .

EJERCICIO 3.92 Sea $\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R} \right\}$; y sea $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{\mathbf{0}\}$, es decir, todo \mathbb{C} menos la matriz $\mathbf{0}$. Describe las funciones lineales asociadas. Demuestra que \mathbb{C}^* es un subgrupo de $\mathbf{GL}(2)$. Compara estas matrices con los números complejos.

EJERCICIO 3.93 Encuentra (en cada caso) la matriz de la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que cumple:

- a) $f(2, 1) = (1, 0)$ y $f(3, 2) = (0, 1)$
 b) $f(2, 5) = (1, 0)$ y $f(1, 2) = (0, 1)$
 c) $f(2, 1) = (2, 5)$ y $f(3, 2) = (1, 2)$,

donde hemos usado vectores renglón en vez de vectores columna por simplicidad.

EJERCICIO 3.94 Demuestra que una transformación lineal de \mathbb{R}^2 manda rectas en rectas.

EJERCICIO 3.95 Considera las rectas $(\ell_1 : x + y = 2)$; $(\ell_2 : 2x - y = 1)$; $(\ell_3 : 2x + y = 6)$ y $(\ell_4 : x - 4y = 3)$. Encuentra la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que cumple $f(\ell_1) = \ell_3$ y $f(\ell_2) = \ell_4$.

3.6.2 Sistemas de ecuaciones lineales II

Vale la pena resumir y reinterpretar explícitamente lo que hemos hecho sobre sistemas de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas con nuestro nuevo lenguaje de matrices y funciones. Un sistema tal es una ecuación

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde A es una matriz 2×2 dada y \mathbf{b} es un vector constante en \mathbb{R}^2 . Si f es la función lineal asociada a la matriz, resolver el sistema es encontrar un vector \mathbf{x} que bajo f vaya a \mathbf{b} . Si A tiene inversa, resolver el sistema es fácil pues se multiplican ambos lados por A^{-1} para obtener

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b},$$

que es justo la primera fórmula que obtuvimos en la Sección 1.6.1. Y podemos resumir lo que hemos hecho en diferentes lados con el siguiente teorema que esencialmente ya hemos demostrado.

Teorema 3.21 *Sea A una matriz de 2×2 y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ su función lineal asociada. Entonces son equivalentes:*

- i) $\det(A) \neq 0$.*
- ii) La matriz A tiene inversa.*
- iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución para toda $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$.*
- iv) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única para alguna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$.*
- v) La función f es inyectiva.*
- vi) La función f es sobre.*
- vii) La función f es biyectiva.* □

Además sabemos que si $\det(A) = 0$ entonces la imagen de f es una recta por el origen (o el origen cuando A es la matriz $\mathbf{0}$) y entonces para los puntos \mathbf{b} fuera de esa recta, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución, mientras que para los puntos en ella hay una recta de soluciones; además estas rectas de soluciones son paralelas.

3.7 Transformaciones afines

El papel que tuvieron las transformaciones ortogonales respecto de las isometrías lo tendrán ahora las transformaciones lineales respecto de las que llamaremos afines. Es decir, si componemos una transformación lineal con una traslación no trivial, ya no

obtenemos una lineal (pues el origen se mueve) sino algo que llamaremos transformación afín, generalizando para $n > 1$ a las transformaciones afines de \mathbb{R} , que ya estudiamos.

Definición 3.7.1 Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una *transformación afín* si se escribe Dibujo

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, donde $A \in \mathbf{GL}(n)$ y \mathbf{b} es un vector fijo en \mathbb{R}^n . Dicho de otra manera, f es una *transformación afín* si existe una transformación lineal $f_o : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($f_o(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$) y una translación τ_b tales que

$$f = \tau_b \circ f_o.$$

El conjunto de todas las transformaciones afines de \mathbb{R}^n forman un grupo de transformaciones, llamado el *grupo afín de \mathbb{R}^n* y denotado con $\mathbf{Af}(n)$.

Lo primero que hay que observar es que una transformación afín es efectivamente una transformación; y esto es claro pues es la composición de dos funciones biyectivas. Para ver que $\mathbf{Af}(n)$ es efectivamente un grupo, hay que ver que es cerrado bajo inversas y composición, pues la identidad (y de hecho cualquier transformación lineal) está en $\mathbf{Af}(n)$. Si $f \in \mathbf{Af}(n)$ (dada por la fórmula de la definición) para obtener la fórmula explícita de su inversa, despejaremos \mathbf{x} en la ecuación

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

donde \mathbf{y} desempeña el papel de $f(\mathbf{x})$. Pasando \mathbf{b} del otro lado y luego multiplicando por A^{-1} (que existe pues $A \in \mathbf{GL}(n)$) se obtiene

$$\mathbf{x} = (A^{-1})\mathbf{y} - (A^{-1})\mathbf{b}.$$

Sea entonces $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por la ecuación $g(\mathbf{x}) = (A^{-1})\mathbf{x} - (A^{-1})\mathbf{b}$ (nótese que $g \in \mathbf{Af}(n)$ por definición) y se tiene que

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\mathbf{x}) &= g(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) \\ &= (A^{-1})(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) - (A^{-1})\mathbf{b} \\ &= (A^{-1}A)\mathbf{x} + A^{-1}\mathbf{b} - A^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}, \end{aligned}$$

y análogamente se tiene que $(f \circ g)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, así que g es la inversa de f .

Si tomamos ahora $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como cualquier otra transformación afín, entonces se escribe $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ para algunos $B \in \mathbf{GL}(n)$ y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ de tal forma que $(g \circ f)$ también es una transformación afín pues se escribe

$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (BA)\mathbf{x} + (B\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Por lo tanto, $\mathbf{Af}(n)$ sí es un grupo de transformaciones.

Dibujo

Las transformaciones afines preservan rectas, es decir, mandan rectas en rectas. Pues si una recta ℓ está definida como

$$\ell = \{\mathbf{p} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

y $f \in \mathbf{Af}(n)$, es como arriba, entonces

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) &= A(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) + \mathbf{b} \\ &= (A\mathbf{p} + \mathbf{b}) + t(A\mathbf{v}) \\ &= f(\mathbf{p}) + t(A\mathbf{v}), \end{aligned}$$

de tal manera que

$$f(\ell) \subseteq \{f(\mathbf{p}) + t(A\mathbf{v}) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Y este último conjunto es la recta que pasa por $f(\mathbf{p})$ con dirección $A\mathbf{v}$ (nótese que $A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, pues $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y A es invertible); así que más que una contención, la última es justo una igualdad (ambos conjuntos están parametrizados por \mathbb{R}).

Resulta que las transformaciones afines son precisamente las que preservan rectas. Pero la demostración de que si una transformación preserva rectas es afín es complicada y requiere argumentos de continuidad que no vienen al caso en este momento. Así que mejor nos enfocamos en otra cosa que sí preservan.

3.7.1 Combinaciones afines (el Teorema de 3 en 3)

Otra manera de ver que las transformaciones afines preservan rectas es usando coordenadas baricéntricas. Sea ℓ la recta que pasa por los puntos \mathbf{p} y \mathbf{q} . Entonces ℓ se puede escribir como

$$\ell = \{s\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid s, t \in \mathbb{R}, \quad s + t = 1\}.$$

Veamos qué hace la transformación afín f al punto $s\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ cuando $s + t = 1$:

$$\begin{aligned} f(s\mathbf{p} + t\mathbf{q}) &= A(s\mathbf{p} + t\mathbf{q}) + \mathbf{b} \\ &= s(A\mathbf{p}) + t(A\mathbf{q}) + (s + t)\mathbf{b} \\ &= s(A\mathbf{p} + \mathbf{b}) + t(A\mathbf{q} + \mathbf{b}) \\ &= sf(\mathbf{p}) + tf(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\mathbf{b} = s\mathbf{b} + t\mathbf{b}$ pues $s + t = 1$. Así que la recta por \mathbf{p} y \mathbf{q} va, bajo f , a la recta por $f(\mathbf{p})$ y $f(\mathbf{q})$ y preserva las coordenadas baricéntricas. Y esto se puede generalizar.

Una combinación lineal $\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{v}_i$ se llama *combinación afín* si los coeficientes cumplen que $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$. Le hemos llamado “combinación baricéntrica” cuando intervienen dos puntos distintos o tres no colineales, pero en el caso general no nos interesa qué propiedades tengan los puntos involucrados $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Su importancia, entre otras cosas, es que las transformaciones afines las tratan como las lineales tratan a las combinaciones lineales:

Teorema 3.22 Una transformación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es afín si y sólo si preserva combinaciones afines; es decir, si y sólo si

$$f\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=0}^k \lambda_i f(\mathbf{v}_i) \quad \text{cuando} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

Demostración. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es afín, entonces se escribe $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ para alguna matriz A de $n \times n$ y un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Veamos que preserva combinaciones afines. Sean $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, k$, tales que $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$; y sean $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \dots, k$, vectores cualesquiera. Entonces

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) &= A\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) + \mathbf{b} = \sum_{i=0}^k \lambda_i (A\mathbf{v}_i) + \mathbf{b} \\ &= \sum_{i=0}^k \lambda_i (A\mathbf{v}_i) + \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{b} = \sum_{i=0}^k \lambda_i (A\mathbf{v}_i + \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^k \lambda_i f(\mathbf{v}_i). \end{aligned}$$

Donde se usó la linealidad en la segunda igualdad, y luego fue crucial que $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ para poder “distribuir la \mathbf{b} ” en la sumatoria.

Por el otro lado, si nos dan f que preserva combinaciones afines, debemos encontrar la matriz A (o su función lineal asociada) y el vector \mathbf{b} que la definan. Encontrar el vector \mathbf{b} es fácil pues es dónde cualquier transformación afín manda el origen; definamos entonces

$$\mathbf{b} := f(\mathbf{0}).$$

Y, como sucedió con las isometrías, debemos definir la función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con

$$g(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$$

y demostrar que es lineal para concluir la demostración; pues entonces $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$. Veamos entonces que g preserva combinaciones lineales.

Sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vectores en \mathbb{R}^n y $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ coeficientes (en \mathbb{R}) arbitrarios. Debemos demostrar que $g\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i g(\mathbf{v}_i)$, pero nuestra hipótesis sólo nos dice cómo se comporta f respecto a combinaciones afines. Podemos convertir esta combinación lineal en una afín usando el vector $\mathbf{0}$ como comodín. Sean

$$\mathbf{v}_0 := \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \lambda_0 := 1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i$$

de tal manera que $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ (ojo, empezamos la sumatoria en 0) y $\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{v}_i =$

$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i$; y ahora sí podemos usar nuestra hipótesis para obtener

$$\begin{aligned} g\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) - \mathbf{b} = f\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) - \left(\sum_{i=0}^k \lambda_i\right) \mathbf{b} \\ &= \sum_{i=0}^k \lambda_i f(\mathbf{v}_i) - \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{b} = \sum_{i=0}^k \lambda_i (f(\mathbf{v}_i) - \mathbf{b}) \\ &= \sum_{i=0}^k \lambda_i g(\mathbf{v}_i) = \lambda_0 g(\mathbf{v}_0) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i g(\mathbf{v}_i), \end{aligned}$$

pues $g(\mathbf{v}_0) = g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Lo cual concluye la demostración del teorema. \square

Vale la pena notar que el concepto de transformación afín se puede generalizar al de función afín cuando la matriz A no es necesariamente invertible; una *función afín* será entonces una función lineal seguida de una traslación; ni siquiera necesitamos pedir que el dominio y el codominio coincidan. Si se revisa con cuidado el teorema anterior, se notará que vale en esta generalidad. Pero no lo hicimos así pues nuestro interés principal está en las transformaciones.

Dibujo

En el caso que más nos interesa, $n = 2$, este teorema y su demostración tienen como corolario que una transformación afín de \mathbb{R}^2 queda determinada por sus valores en el *triángulo canónico* con vértices $\mathbf{e}_0 := \mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, y que estos pueden ir a cualquier otro triángulo. Explícitamente, dado un triángulo T con vértices $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, la transformación afín que manda al triángulo canónico en T es

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0)\mathbf{x} + \mathbf{a}_0,$$

que cumple claramente que $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i$. Hay que observar que esta función está bien definida independientemente de quiénes sean $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ y \mathbf{a}_2 , pues tanto la matriz 2×2 como el vector por el que se traslada lo están. Pero que es una transformación sólo cuando $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ y \mathbf{a}_2 no son colineales (que es lo que entendemos como *triángulo*), pues entonces la matriz es invertible.

Y como corolario de este hecho obtenemos el siguiente teorema.

Dibujo

Teorema 3.23 (3 en 3) *Dados dos triángulos con vértices $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ y $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ respectivamente, existe una única transformación afín $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que cumple $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ para $i = 0, 1, 2$.*

Demostración. Basta componer la inversa de la transformación que manda al triángulo canónico en el $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ con la que lo manda al $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. La unicidad se sigue de la unicidad de las dos transformaciones usadas. \square

Un ejemplo

Para fijar ideas veamos un ejemplo numérico. Sean

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, & \mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, & \mathbf{a}_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{b}_0 &= \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}, & \mathbf{b}_1 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, & \mathbf{b}_2 &= \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Queremos encontrar la transformación afín $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que cumple $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ para $i = 0, 1, 2$.

Dibujos

Un método infalible (si no cometemos un error en el camino) es seguir la demostración del último teorema (el 6.4). Es decir, la transformación que manda al canónico en el triángulo de las \mathbf{a} 's es

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

luego habrá que encontrar su inversa y componerla con la que manda al canónico en el triángulo de las \mathbf{b} 's. Pero dejaremos este método para que el lector lo siga paso a paso y compruebe el resultado con una solución diferente que es la que aquí seguiremos.

Ataquemos el problema directamente. Estamos buscando una matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{y un vector } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

para definir la función $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ que cumpla $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ para $i = 0, 1, 2$. Como las \mathbf{a} 's y las \mathbf{b} 's tienen valores numéricos explícitos, estas condiciones nos darán ecuaciones explícitas con las seis incógnitas $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ que podemos resolver directamente. La condición $f(\mathbf{a}_0) = \mathbf{b}_0$ nos da

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

que se traduce en una ecuación para cada coordenada, a saber:

$$\begin{aligned}0\alpha + 2\beta + \lambda &= -5 \\ 0\gamma + 2\delta + \mu &= 6.\end{aligned}$$

Análogamente, las condiciones en las otras dos parejas de puntos nos dan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}3\alpha - \beta + \lambda &= 4 \\ 3\gamma - \delta + \mu &= 3 \\ -\alpha + \beta + \lambda &= -4 \\ -\gamma + \delta + \mu &= 1\end{aligned}$$

Resulta que en vez de seis ecuaciones con seis incógnitas, tenemos dos sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, y además los dos sistemas tienen los mismos coeficientes y sólo se diferencian por las constantes. De hecho los podemos reescribir como

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Observemos que al resolver los dos sistemas de ecuaciones con el método de eliminar variables sumando múltiplos de una ecuación a otra, estaremos realizando las mismas operaciones, y éstas dependen nada más de los coeficientes, no del nombre de las incógnitas. Así que la manera de resolver los dos sistemas al mismo tiempo será añadiendo dos columnas a la matriz A que correspondan a las constantes de los dos sistemas, y luego sumando múltiplos de renglones a otros para llevar la parte 3×3 de la matriz a una de permutaciones que nos diga el valor explícito de todas las incógnitas. Hagámoslo. La matriz con que empezamos es

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -5 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sumándole 3 por el tercer renglón al segundo (para hacer 0 su primera entrada), operación que podemos denotar con $3\mathbf{r}_3 \vec{+} \mathbf{r}_2$ y que equivale a sumar un múltiplo de una ecuación a otra, obtenemos

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{3\mathbf{r}_3 \vec{+} \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\mathbf{r}_2 \vec{+} \mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{(1/2)\mathbf{r}_2; -(1/3)\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_2 \vec{+} \mathbf{r}_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{-2\mathbf{r}_1 \vec{+} \mathbf{r}_2; -\mathbf{r}_1 \vec{+} \mathbf{r}_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, recordando nuestras incógnitas, el primer sistema nos dice que $\lambda = -1$, $\beta = -2$ y $\alpha = 1$ y el segundo sistema que $\mu = 0$, $\delta = 3$ y $\gamma = 2$, lo cual lo resuelve por completo. En resumen, la función que buscábamos es

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y es fácil comprobarlo; ya sea revisando los valores que se pedían o con el otro método.

EJERCICIO 3.96 Para cada caso, encuentra la transformación afín que manda \mathbf{a}_i en \mathbf{b}_i

- a) $\mathbf{a}_0 = (1, 2)^\top, \mathbf{a}_1 = (1, -1)^\top, \mathbf{a}_2 = (0, -1)^\top$ y $\mathbf{b}_0 = (1, 4)^\top, \mathbf{b}_1 = (4, 4)^\top, \mathbf{b}_2 = (3, 3)^\top$
 b) $\mathbf{a}_0 = (1, 2)^\top, \mathbf{a}_1 = (0, 1)^\top, \mathbf{a}_2 = (3, -1)^\top$ y $\mathbf{b}_0 = (5, 3)^\top, \mathbf{b}_1 = (2, 0)^\top, \mathbf{b}_2 = (6, -1)^\top$
 c) $\mathbf{a}_0 = (1, 2)^\top, \mathbf{a}_1 = (0, 1)^\top, \mathbf{a}_2 = (3, -1)^\top$ y $\mathbf{b}_0 = (10, 5)^\top, \mathbf{b}_1 = (3, 3)^\top, \mathbf{b}_2 = (-4, 4)^\top$

(¿Verdad que conviene relajar la notación sobre vectores?)

3.8 Isometrías II

Ya con la herramienta técnica que nos dan las matrices y en el contexto general que nos dan las transformaciones afines, regresamos brevemente a estudiar isometrías del plano y ver algunas cosas que se nos quedaron pendientes. Ahora sabemos que una isometría de \mathbb{R}^2 es una transformación que se escribe

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (3.14)$$

donde la matriz \mathbf{A} es ortogonal ($\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^{-1}$) y es llamada la *parte lineal* de la isometría. Hay de dos tipos. Las que preservan orientación (con $\det(\mathbf{A}) = 1$) y las que invierten orientación ($\det(\mathbf{A}) = -1$). Para las primeras, la matriz \mathbf{A} es una rotación en el origen y para las segundas, una reflexión en una recta por el origen. Puesto que al componer isometrías (o, en general, transformaciones afines) la parte lineal se obtiene componiendo las partes lineales, entonces las isometrías (o las afines) que preservan orientación forman un grupo, denotado con $\mathbf{Iso}^+(2)$ (respectivamente, $\mathbf{Af}^+(2)$). Ojo, las que invierten orientación **no** forman un grupo, ni siquiera contienen a la identidad y la composición de dos de ellas preserva orientación.

Lo primero que queremos ver es que las isometrías que preservan orientación son rotaciones en algún punto o traslaciones.

3.8.1 Rotaciones y traslaciones

Recordemos que definimos la rotación $\rho_{\theta, \mathbf{c}}$ de un ángulo θ con centro \mathbf{c} , conjugando con la traslación de \mathbf{c} al origen, es decir, como $\tau_{\mathbf{c}} \circ \rho_{\theta} \circ \tau_{-\mathbf{c}}$, donde $\tau_{\mathbf{y}}$ es la traslación por \mathbf{y} y ρ_{θ} es rotar un ángulo θ en el origen. Así que, usando matrices, la fórmula para $\rho_{\theta, \mathbf{c}}$ es

$$\begin{aligned} \rho_{\theta, \mathbf{c}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{R}_{\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} \\ &= \mathbf{R}_{\theta}\mathbf{x} + (\mathbf{c} - \mathbf{R}_{\theta}\mathbf{c}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Está claro entonces que $\rho_{\theta, \mathbf{c}} \in \mathbf{Iso}^+(2)$, pues se escribe como en (3.14) con una \mathbf{b} complicada, pero constante al fin. Y al revés, aunque cierto, no está tan claro. Para ver que $f \in \mathbf{Iso}^+(2)$ dada como en (3.14) es la rotación en algún centro, hay que encontrar un punto fijo, es decir, un punto \mathbf{c} para el cual $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ (pues a su centro no lo mueve la rotación); que nos da la ecuación en \mathbf{c}

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= A\mathbf{c} + \mathbf{b} \\ \mathbf{c} - A\mathbf{c} &= \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Esto coincide con la expresión (3.15), donde se usa el centro de rotación y nos da la traslación \mathbf{b} en términos de él. Entonces, el problema de encontrar un punto fijo para la transformación (3.14) equivale a encontrar una solución a la ecuación

$$\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

que en realidad es un sistema de ecuaciones. Y como tal, se puede reescribir

$$\begin{aligned}I\mathbf{x} - A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (I - A)\mathbf{x} &= \mathbf{b},\end{aligned}\tag{3.16}$$

donde nos ha sido muy útil la suma de matrices. Sabemos que este sistema tiene solución única si y sólo si su determinante es distinto de cero. Para el caso que nos ocupa, cuando A es una matriz de rotación, por un ángulo θ digamos, se tiene

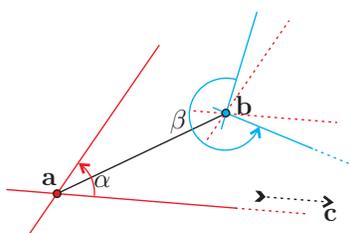
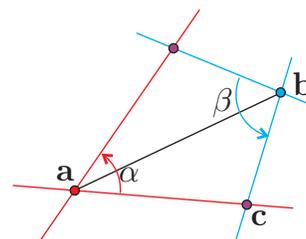
$$\begin{aligned}\det(I - R_\theta) &= \det\begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= (1 - \cos \theta)^2 + \text{sen}^2 \theta \\ &= 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 2(1 - \cos \theta).\end{aligned}$$

Podemos concluir que si $\theta \neq 0$ entonces $\det(I - R_\theta) \neq 0$ y tenemos una solución única del sistema (3.16) con $A = R_\theta$, que es el centro de rotación. Así que si $f \in \mathbf{Iso}^+(2)$, entonces es una rotación (alrededor de un punto) o bien una traslación (cuando el ángulo θ es cero en la discusión anterior). Además, hemos demostrado que una rotación (por un ángulo no cero, se sobreentiende) no tiene puntos fijos además de su centro.

Puesto que una rotación o una traslación se puede obtener *moviendo* continuamente (poco a poco) el plano, a veces se le llama a $\mathbf{Iso}^+(2)$ el grupo de *movimientos rígidos del plano*.

Como corolario se obtiene que la composición de dos rotaciones es una nueva rotación. El nuevo centro de rotación se puede obtener analíticamente resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones, pero lo veremos geoméricamente.

Sean $\rho_{\alpha, \mathbf{a}}$ y $\rho_{\beta, \mathbf{b}}$ las rotaciones de ángulos α y β y centros \mathbf{a} y \mathbf{b} respectivamente. La composición de estas dos rotaciones será una rotación de un ángulo $\alpha + \beta$ (pues las partes lineales se componen) pero su centro depende del orden en que se componen. Para obtener el centro de la rotación $\rho_{\beta, \mathbf{b}} \circ \rho_{\alpha, \mathbf{a}}$, se traza el segmento de \mathbf{a} a \mathbf{b} , la línea por \mathbf{a} con ángulo $-\alpha/2$ respecto de este y la línea por \mathbf{b} con ángulo $\beta/2$; la intersección \mathbf{c} de estas dos líneas es el centro de rotación. Para verlo, persígase este punto según las rotaciones. Nótese que su reflejado respecto de la línea por \mathbf{a} y \mathbf{b} es el centro de rotación de la composición en el otro orden, $\rho_{\alpha, \mathbf{a}} \circ \rho_{\beta, \mathbf{b}}$.



Para que nuestra construcción de \mathbf{c} tuviera sentido se necesita que las dos rectas cuya intersección lo definen sean no paralelas y éste es justo el caso cuando $\alpha + \beta \neq 0$. Pero nos podemos aproximar al valor $\beta = -\alpha$ poco a poco, y en este proceso el punto de intersección \mathbf{c} se “va al infinito”, así que las traslaciones son, en cierta manera, “rotaciones con centro al infinito”.

EJERCICIO 3.97 Las *homotecias* son transformaciones de la forma $f(\mathbf{x}) = k\mathbf{x} + \mathbf{b}$, donde a $k \neq 0$ se le llama el *factor de expansión*. Demuestra que las homotecias con factor de expansión no trivial (distinto de 1) tienen un *centro de expansión*, es decir, un punto fijo.

3.8.2 Reflexiones y “pasos”

Consideremos ahora las isometrías que invierten orientación. Se escriben como

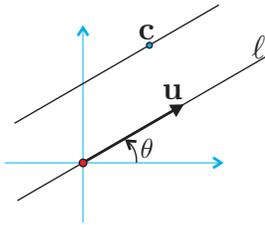
$$f(\mathbf{x}) = E_{\theta}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

donde E_{θ} es una matriz de reflexión. Veamos primero si tiene puntos fijos, para lo cual hay que resolver el correspondiente sistema (3.16). En este caso el determinante es

$$\begin{aligned} \det(I - E_{\theta}) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ -\operatorname{sen} 2\theta & 1 + \cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= (1 - \cos 2\theta)(1 + \cos 2\theta) - \operatorname{sen}^2 2\theta \\ &= 1 - \cos^2 2\theta - \operatorname{sen}^2 2\theta = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

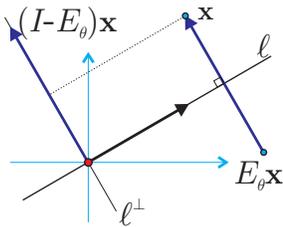
Y por lo tanto no tiene solución única: o no tiene solución o bien tiene muchas; y veremos que ambos casos son posibles.

Para $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ tenemos que f es una reflexión y entonces las soluciones debieran ser los puntos de la recta espejo (a un ángulo θ con el eje x positivo), que llamaremos ℓ . Veamos: sea \mathbf{u} el vector unitario que genera a ℓ , es decir, $\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$. Entonces

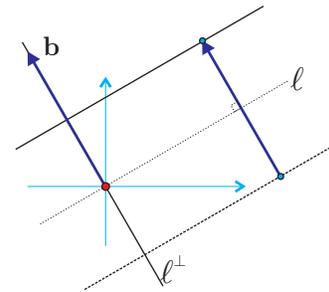


$$\begin{aligned} E_\theta \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta \\ \sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos (2\theta - \theta) \\ \sin (2\theta - \theta) \end{pmatrix} = \mathbf{u}, \end{aligned}$$

donde hemos usado las fórmulas trigonométricas para la diferencia de ángulos (3.12). Y por lo tanto $E_\theta(\mathbf{t}\mathbf{u}) = \mathbf{t}(E_\theta\mathbf{u}) = \mathbf{t}\mathbf{u}$; que nos dice que todos los puntos de la recta ℓ satisfacen la ecuación homogénea $(I - E_\theta)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ahora bien, si para cierta \mathbf{b} , el sistema $(I - E_\theta)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución particular, \mathbf{c} digamos, entonces toda la recta $\ell + \mathbf{c}$, paralela a ℓ que pasa por \mathbf{c} , consta de soluciones para el sistema; es una reflexión con espejo $\ell + \mathbf{c}$. Pero nos falta determinar para cuáles \mathbf{b} hay solución.



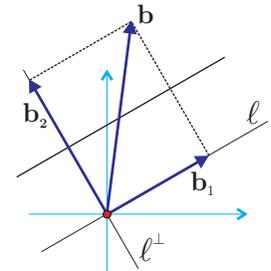
Para esto, conviene pensar geoméricamente. Para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $(I - E_\theta)\mathbf{x} = \mathbf{x} - E_\theta\mathbf{x}$ es el vector que va de $E_\theta\mathbf{x}$ a \mathbf{x} , y como E_θ es una reflexión debe ser perpendicular al espejo; es más, debe ser el doble del vector que va de ℓ a \mathbf{x} y es perpendicular a ℓ (recuérdese que así definimos reflexiones por primera vez). De tal manera que $(I - E_\theta)$ es, como función, la proyección ortogonal a $\ell^\perp : \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ seguida de la homotecia “multiplicar por 2”. La imagen de la función $(I - E_\theta)$ es entonces ℓ^\perp , y por lo tanto, sólo cuando $\mathbf{b} \in \ell^\perp$ la isometría $f(\mathbf{x}) = E_\theta\mathbf{x} + \mathbf{b}$ tiene puntos fijos. Más concretamente, si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} = 0$, entonces reflejar en ℓ y luego trasladar por \mathbf{b} , regresa de la recta $\ell + (1/2)\mathbf{b}$ a su lugar (y punto a punto).



En el caso general, podemos expresar a cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ como una suma de sus *componentes* respecto a la base ortonormal $\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp$, es decir como

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2,$$

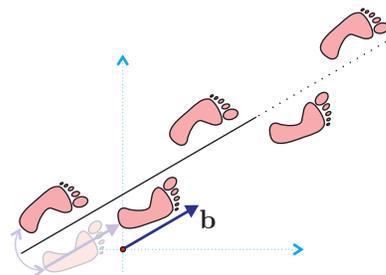
con $\mathbf{b}_1 \in \ell$ y $\mathbf{b}_2 \in \ell^\perp$ (de hecho, por el teorema de bases ortonormales: $\mathbf{b}_1 := (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$ y $\mathbf{b}_2 := (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^\perp)\mathbf{u}^\perp$). Y entonces la transformación $f(\mathbf{x}) = E_\theta\mathbf{x} + \mathbf{b}$ se puede escribir como



$$f(\mathbf{x}) = (E_\theta\mathbf{x} + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_1,$$

que es una reflexión en la recta $\ell + (1/2) \mathbf{b}_2$ (por el caso anterior) y que en la fórmula es $(E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}_2)$, seguida de una traslación $(\dots + \mathbf{b}_1)$ en la dirección del espejo. Nótese que si $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$, entonces f no tiene puntos fijos, los puntos de un lado del espejo van al otro lado y los que están en el espejo se trasladan en él, aunque el espejo $\ell + (1/2) \mathbf{b}_2$ como línea sí se queda en su lugar (todos sus puntos se mueven dentro de ella) y éste es entonces el caso en que nuestro sistema de ecuaciones que detecta puntos fijos no tiene solución.

A una isometría tal, una reflexión seguida de una traslación no trivial ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) en la dirección de la línea espejo, la llamaremos un *paso* pues genera la simetría que tiene un caminito de huellas (infinito) y corresponde al acto de dar un paso: cambiar de pie (reflejar) y adelantarlo un poco (trasladar). Si la aplicamos dos veces, nos da una traslación (por $2\mathbf{b}$), y si la seguimos aplicando (a ella y a su inversa) nos da un subgrupo de isometrías que son las simetrías de un camino infinito. Pero en fin, hemos demostrado:



Teorema 3.24 Una isometría que invierte orientación es un paso o una reflexión (paso con traslación trivial). \square

EJERCICIO 3.98 Con la notación de los párrafos anteriores, demuestra con coordenadas que $(I - E_\theta) \mathbf{u}^\perp = 2\mathbf{u}^\perp$. (Tienes que usar las identidades trigonométricas para el doble del ángulo.)

EJERCICIO 3.99 Demuestra que si f es una isometría que invierte orientación, entonces $f^2 = f \circ f$ es una traslación.

EJERCICIO 3.100 Sea $f(\mathbf{x}) = E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$. Encuentra la expresión para f^{-1} y argumentala geoméricamente.

EJERCICIO 3.101 Demuestra analíticamente que la composición de dos reflexiones en líneas paralelas es una traslación en la dirección ortogonal a sus espejos.

3.8.3 Homotecias y semejanzas

El clásico *zoom* que aumenta (o disminuye) de tamaño una figura es lo que llamaremos una *homotecia*. Siempre tiene un centro de expansión, que cuando es el origen resulta ser una transformación lineal con matriz asociada

$$kI = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

donde $k > 0$; para $k > 1$ magnifica (es un *zoom* estrictamente hablando) y para $k < 1$ disminuye. Si la componemos con una traslación, por $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ digamos, se obtiene

una *homotecia* de factor k . Su centro de expansión \mathbf{c} es el punto que se queda fijo y que se obtiene entonces resolviendo la ecuación

$$k\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{x}.$$

Una *semejanza* es una transformación afín que preserva ángulos. Claramente las homotecias y las isometrías son semejanzas. Veremos que estas últimas se obtienen simplemente al dejar interactuar a las dos primeras.

Teorema 3.25 Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una semejanza, entonces existen $k > 0$, $A \in \mathbf{O}(2)$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ tales que

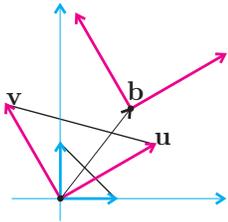
$$f(\mathbf{x}) = kA\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Demostración. Consideremos la transformación lineal $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} := f(\mathbf{0})$, y notemos que preserva ángulos pues las traslaciones lo hacen. Sea $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ la matriz asociada a g . Como los vectores canónicos son ortogonales entonces \mathbf{u} y \mathbf{v} (sus imágenes bajo g) también lo son. Además tienen la misma norma pues si no fuera así, los ángulos chiquitos del triángulo $\mathbf{0}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ no medirían $\pi/4$ que son los del triángulo canónico. Sean $k = |\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ y

$$A = \frac{1}{k}B.$$

Se tiene que $A \in \mathbf{O}(2)$, pues sus columnas son ortonormales, y además

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b} = B\mathbf{x} + \mathbf{b} = kA\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$



□

EJERCICIO 3.102 Encuentra la expresión de la homotecia de factor k y centro \mathbf{c} .

EJERCICIO 3.103 Demuestra que una transformación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una semejanza si y sólo si existe $k > 0$ tal que $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = kd(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

3.9 *Simetría plana

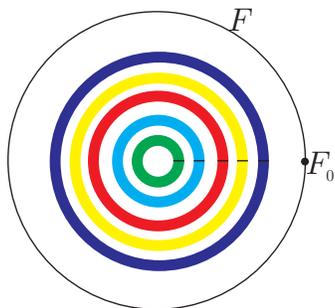
En la Sección 3.3.2 se definió el grupo de simetrías de una figura plana; en esta última sección estudiamos diferentes instancias de cuales pueden ser estos grupos y cómo son sus figuras asociadas.

3.9.1 El Teorema de Leonardo

Versión topológica

Por una *figura acotada* F entendemos un subconjunto del plano que a su vez está contenido en el interior de algún círculo; y por medio de una homotecia, podemos suponer que está dibujada en una hoja de papel. El problema general que nos guía es qué podemos decir sobre su *grupo de simetrías*

$$\mathbf{Sim}(F) = \{f \in \mathbf{Iso}(2) \mid f(F) = F\}.$$



O bien, ¿qué grupos son de este tipo? Además de los grupos cíclicos y diédricos que vimos en la Sección 3.3.2 tenemos otros. Por ejemplo, si F es un círculo centrado en el origen, entonces $\mathbf{Sim}(F) = \mathbf{O}(2)$. Nótese que también un conjunto de anillos concéntricos —un tiro al blanco— tiene este mismo grupo de simetrías. La figura F se genera por un pedacito F_0 —un simple punto para el círculo y para el tiro al blanco un intervalo por cada anillo— juntando todas las copias $f(F_0)$ al correr $f \in \mathbf{O}(2)$; es decir, dejando que el grupo “barra” o “actúe” en una “figura fundamental” F_0 . Y como en este caso el grupo es “continuo”

(los ángulos de las rotaciones son un continuo) la figura que se genera también es “continua”. Podemos pensar que la figura F se obtiene “poniendo tinta” (de diferentes colores para el tiro al blanco) en los puntos de F_0 y luego dejando que el grupo mueva a F_0 y vaya dejando huella. Todas las figuras que tienen simetría se deben obtener así, una porción de ella y el grupo la definen: “simetría, se dice coloquialmente, es una relación armoniosa entre las partes y el todo”.

Otro ejemplo es tomar el grupo generado por una *rotación irracional*. Sea θ un ángulo para el cual $n\theta$ (con $n \in \mathbb{Z}$) nunca es múltiplo de 2π , es decir para el que no existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $\theta = (p/q)2\pi$ (por ejemplo, $\theta = \sqrt{2}\pi$, o $\theta = 1$ pues π como número ya es irracional)². Entonces el conjunto $\langle \mathbf{R}_\theta \rangle := \{\mathbf{R}_{n\theta} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo de rotaciones; para $n = 0$ tenemos la identidad y la composición de dos claramente está en él. En este caso, si tomamos un punto \mathbf{x} distinto del origen (en nuestra notación anterior, $F_0 = \{\mathbf{x}\}$) las copias $\mathbf{R}_{n\theta}(\mathbf{x})$ van poblando poco a poco (al crecer n en ambos sentidos) el círculo \mathcal{C} con centro en \mathbf{O} y que contiene a \mathbf{x} , pues nunca caen sobre un punto ya “pintado”, pero nunca llegan a llenar todo el círculo; lo “pueblan”, lo “atascan”, son “densos en él” pero no lo llenan. Si definimos $F = \{\mathbf{R}_{n\theta}(\mathbf{x}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ entonces $\langle \mathbf{R}_{n\theta} \rangle \subset \mathbf{Sim}(F)$ (no pusimos la igualdad pues aparecen reflexiones como simetrías). Sin embargo, esta “figura” no se le aparecería nunca a un artista (o vil ser humano) pintando en un papel con lápiz o plumón de cierto grosor. Para eliminar de nuestras consideraciones este tipo de figuras raras o abstractas, que sólo se le aparecen a un matemático quisquilloso, tendríamos que usar conceptos de “topología de conjuntos” que expresen nuestras nociones intuitivas de “continuidad”.

La versión topológica del Teorema de Leonardo consiste en poner restricciones topológicas a las figuras (con “cerradas y acotadas” basta) para concluir que su grupo

²Un número es *irracional* si no se puede expresar como una fracción p/q con p y q enteros. Por ejemplo $\sqrt{2}$ o π ; aunque sea difícil demostrarlo.

de simetrías es $\mathbf{O}(2)$ o bien finito. Intuitivamente, lo de “cerrado” implica que si sus puntos se acumulan cerca de otro, ese también está, de tal manera que los “huecos” de nuestro último ejemplo se llenarían y las simetrías crecerían a todas las rotaciones y las reflexiones ($\mathbf{O}(2)$). Pero dejemos ya de lado esta motivación para el estudio de la topología de conjuntos (cómo controlar particularidades sobre la “continuidad” de subconjuntos de \mathbb{R}^2) y entremos de lleno en lo que sí estamos en posición de hacer: poner restricciones sobre el grupo en vez de sobre la figura; usar técnicas de geometría discreta. Demostraremos entonces la versión “grupera” del Teorema de Leonardo.

Versión grupera

Teorema 3.26 (Leonardo) *Si G es un grupo finito de isometrías del plano entonces G es diédrico o cíclico.*

La demostración consta de cuatro pasos muy bien diferenciados y con ideas de distinta índole en cada uno.

Paso 1 (El centro de simetría). Como G es un grupo finito, sea $n \geq 1$ su cardinalidad. Entonces podemos enumerar sus elementos como

$$G = \{g_0, g_1, \dots, g_{n-1}\},$$

donde no importa el orden, salvo que podemos distinguir a g_0 como la identidad, que sabemos que está en G ; y digamos de una vez que a $g_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ también lo llamamos g_n para facilitar la notación.

Vamos a demostrar que existe un punto $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ *invariante bajo G* , es decir, tal que $g_i(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ para toda $i = 1, \dots, n$, que es naturalmente el *centro de simetría* del grupo. Encontrarlo es fácil. Tomamos cualquier punto \mathbf{x} de \mathbb{R}^2 , y \mathbf{c} es el baricentro de su *órbita* $G\mathbf{x} := \{g_1(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x})\}$. Es decir, sea

$$\mathbf{c} := \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right) g_i(\mathbf{x}).$$

Dibujo

(Estamos generalizando la noción de baricentro de un triángulo, 3 puntos, a conjuntos arbitrarios, pero finitos, de puntos.) Para ver que \mathbf{c} es invariante bajo G , usamos el hecho de que las isometrías son funciones afines y que éstas preservan combinaciones afines (Teorema 3.22), pues definimos \mathbf{c} como una combinación tal ($\sum_{i=1}^n (1/n) = 1$). Se tiene entonces que para cualquier $g \in G$ (podemos eliminar su subíndice para aliviar notación):

$$g(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right) g(g_i(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right) (g \circ g_i)(\mathbf{x}). \quad (3.17)$$

Afirmamos que esta última sumatoria es justo la original (que definió a \mathbf{c}) salvo que el orden de los sumandos está permutado. Esto se sigue de que “componer con g ” es una biyección del grupo en sí mismo (una permutación de los elementos del grupo).

Más formalmente, definamos la función *multiplicación* por g como

$$\begin{aligned}\mu_g : G &\rightarrow G \\ \mu_g(g_i) &= g \circ g_i.\end{aligned}$$

Que está bien definida (que siempre caemos en elementos de G) se sigue de que G es cerrado bajo composición; y para ver que es biyección basta exhibir su inversa: $\mu_{g^{-1}}$, multiplicar por g^{-1} (de nuevo bien definida pues $g^{-1} \in G$). Claramente se tiene que $\mu_{g^{-1}} \circ \mu_g = \text{id}_G$ pues

$$(\mu_{g^{-1}} \circ \mu_g)(g_i) = \mu_{g^{-1}}(\mu_g(g_i)) = \mu_{g^{-1}}(g \circ g_i) = g^{-1} \circ g \circ g_i = g_i$$

y análogamente, $\mu_g \circ \mu_{g^{-1}} = \text{id}_G$.

Así que la combinación afín que da $g(\mathbf{c})$ (3.17) es un simple reordenamiento de la que da \mathbf{c} y por lo tanto $g(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ para toda $g \in G$. Hemos demostrado que G tiene centro de simetría y, en particular, que no contiene ni traslaciones ni pasos pues estas transformaciones no tienen puntos fijos.

Paso 2 (Vámonos al origen). Ahora veremos que podemos suponer que el centro de simetría de G es el origen, y simplificar así nuestras consideraciones subsecuentes, usando nuestro viejo truco de conjugar con la traslación de \mathbf{c} al origen. Más formalmente, sea

$$G_0 = \tau_{-\mathbf{c}} \circ G \circ \tau_{\mathbf{c}} := \{\tau_{-\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}} \mid g \in G\},$$

(el conjunto de los conjugados de todos los elementos de G). Nótese que si $g \in G$ entonces $(\tau_{-\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}})(\mathbf{0}) = \tau_{-\mathbf{c}}(g(\tau_{\mathbf{c}}(\mathbf{0}))) = \tau_{-\mathbf{c}}(g(\mathbf{c})) = \tau_{-\mathbf{c}}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ así que $\mathbf{0}$ es el centro de simetría de G_0 . Es muy fácil ver que G_0 también es un grupo y que es *isomorfo* al grupo original G (si G fuera el grupo de simetrías de una figura F , G_0 es el grupo de simetrías de $\tau_{-\mathbf{c}}(F)$ — F trasladada al origen— y ambas figuras claramente tienen la “misma” simetría), pues la conjugación respeta composición

$$\tau_{-\mathbf{c}} \circ (h \circ g) \circ \tau_{\mathbf{c}} = \tau_{-\mathbf{c}} \circ h \circ (\tau_{\mathbf{c}} \circ \tau_{-\mathbf{c}}) \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}} = (\tau_{-\mathbf{c}} \circ h \circ \tau_{\mathbf{c}}) \circ (\tau_{-\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}})$$

e inversos $((\tau_{-\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}})^{-1} = \tau_{\mathbf{c}}^{-1} \circ g^{-1} \circ \tau_{-\mathbf{c}}^{-1} = \tau_{-\mathbf{c}} \circ g^{-1} \circ \tau_{\mathbf{c}})$. De hecho, la función inversa de la conjugación es la conjugación por la inversa, $G = \tau_{\mathbf{c}} \circ G_0 \circ \tau_{-\mathbf{c}}$. Así que si entendemos G_0 (con centro de simetrías $\mathbf{0}$) entenderemos el grupo original G . Simplificando nuestra notación, suponemos en adelante que G tiene como centro de simetría el origen, que todos sus elementos dejan fijo el $\mathbf{0}$ y, por lo tanto, que es subgrupo de las transformaciones ortogonales. Es decir, en adelante $G \subset \mathbf{O}(2)$.

Paso 3 (Cuando G preserva orientación). Supongamos que todos los elementos de $G \subset \mathbf{O}(2)$ preservan orientación. Entonces todos los elementos de G son rotaciones con un cierto ángulo θ y tenemos una nueva enumeración natural (no necesariamente la que habíamos usado, salvo la primera) usando sus ángulos:

$$\begin{aligned}G &= \{R_{\theta_0}, R_{\theta_1}, R_{\theta_2}, \dots, R_{\theta_{n-1}}\}, \\ \text{donde } 0 &= \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} < 2\pi.\end{aligned}$$

Queremos demostrar que $\theta_1 = 2\pi/n$ y que $\theta_i = i\theta_1$, lo cual es justo decir que $G = \mathbf{C}_n$, que G es el grupo cíclico de orden n generado por la rotación $R_{2\pi/n}$. Puesto que θ_1 es el más chico de estos ángulos (positivos) y todos sus múltiplos $2\theta_1, 3\theta_1, \dots$ están en el conjunto de ángulos de G (pues se obtienen al componer R_{θ_1} consigo misma), entonces la primera vez que $k\theta_1$ exceda a 2π tiene que ser justo por θ_1 y después de haber pasado por todos los θ_i ; es decir, $\theta_1 = 2\pi/n$.

Paso 4 (Jaque mate). Supongamos, por último, que algún elemento de G , digamos que f_0 , no preserva orientación. Consideremos el subgrupo de G que sí preserva orientación, y llamémosle G^+ ; es decir, sea

$$G^+ := \{g \in G \mid \det(g) = 1\}.$$

Claramente G^+ es un grupo (contiene a la identidad y tanto el producto como los inversos de transformaciones que preservan orientación preservan orientación) que, por el paso anterior, es un grupo cíclico \mathbf{C}_m para alguna $m < n$ (como hasta ahora, n es el *orden* del grupo G , es decir, $n = \sharp G$).

Primero veamos que $2m = n$. En el Paso 1 definimos la biyección de G “multiplicar por $_$ ”; veamos qué hace μ_{f_0} (multiplicar por nuestro elemento dado que no preserva orientación). Al componer con una transformación que invierte orientación (f_0), a una que la preserva ($g \in G^+$) nos da una que la invierte ($\mu_{f_0}(g) \notin G^+$) y a una que la invierte ($g \notin G^+$), resulta que preserva ($\mu_{f_0}(g) \in G^+$); podemos resumir este trabalenguas como

$$g \in G^+ \iff \mu_{f_0}(g) \notin G^+.$$

Esto quiere decir que μ_{f_0} es una biyección entre G^+ y su complemento, G^- digamos —y vale la notación aunque no sea grupo—, de tal manera que ambos tienen el mismo número de elementos, m habíamos dicho, y entonces $n = 2m$. Por el paso anterior, G^+ es cíclico de orden m y está generado por la rotación $R_{2\pi/m}$.

Por otro lado, como $G \subset \mathbf{O}(2)$, f_0 tiene que ser una reflexión en una línea ℓ_0 que pasa por el origen. En el Ejercicio 3.82 se pidió demostrar analíticamente que $f_0 \circ R_\theta$ es la reflexión en la línea $R_{-\theta/2}(\ell_0)$. Geométricamente, si aplicamos $f_0 \circ R_\theta$ a está última línea, R_θ la gira a la que está a un ángulo $\theta/2$ más allá de ℓ_0 y luego f_0 la regresa a su lugar, así que es cierto lo que se pidió (aunque no hayan hecho su tarea). De tal manera que

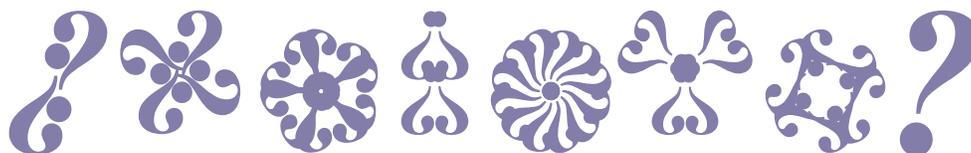
$$f_1 := \mu_{f_0}(R_{2\pi/m}) = f_0 \circ R_{2\pi/m} \in G^-$$

es la reflexión en la recta ℓ_1 cuyo ángulo hacia ℓ_0 es π/m . Por nuestra definición de grupo diédrico, las reflexiones f_0 y f_1 generan a \mathbf{D}_m ; pero también generan a G y al verlo concluiremos. A saber, $R_{2\pi/m}$ se obtiene como $f_0 \circ f_1$, pues $f_0 = f_0^{-1}$, así que generan a G^+ (generado por $R_{2\pi/m}$) y luego cualquier elemento de G^- se obtiene como $\mu_{f_0}(g) = f_0 \circ g$ para algún $g \in G^+$. Así que $G = \mathbf{D}_m$ y “colorín colorado, el Teorema de Leonardo ha quedado demostrado”. \square

Vale la pena hacer notar de la demostración anterior que, aunque el grupo cíclico quede totalmente definido al fijar su centro de simetría (la \mathbf{c} que encontramos en el Paso 1), o bien que esté conjuntistamente determinado como subgrupo de $\mathbf{O}(2)$, no sucede lo mismo para el diédrico, o **los** diédricos para ser más claros. Nótese que nunca usamos el ángulo de la recta ℓ (el espejo básico) en la que se basó (valga la redundancia) el final de la demostración. Para cualquier recta ℓ que pasa por el origen funciona la demostración y tenemos una instancia, conjuntistamente distinta, del diédrico. Si queremos **el diédrico** con ℓ igual al eje de las x , tendremos que conjugar, como en el Paso 2, pero ahora con la rotación que lleva ℓ a la recta canónica.

Quizá quede más claro a qué nos referimos con eso de “instancias” de un cierto grupo si enunciamos el Teorema de Leonardo como “*un grupo finito de isometrías es conjugado del cíclico $\langle \mathbf{R}_{2\pi/n} \rangle$ o del diédrico $\langle \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_{\pi/n} \rangle$ ” que fue, junto con la observación precedente, lo que realmente demostramos.*

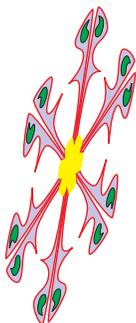
EJERCICIO 3.104 Identifica el grupo de simetrías de las siguientes figuras y, a ojo de buen cubero, píntales su centro de simetría. ¿Qué algunas no tienen tal? ¿Dónde está un error formal (no esencial) de la demostración anterior? Corrígelo.



Leonardo afín

El ojo humano, y la naturaleza en general, identifica simetrías aunque, estrictamente hablando, no las haya; vemos el bulto y no nos preocupamos por los milímetros; el ejercicio anterior tiene sentido aunque es seguro que en el dibujo, o en la impresión, se cometieron errores; el cuerpo humano tiene simetría \mathbf{D}_1 . E igualmente existe la simetría más allá del rígido grupo de isometrías.

Supongamos que una figura F tiene grupo de simetrías \mathbf{G} (será \mathbf{D}_6 en la figura que viene). Si f es una transformación afín que no es isometría, entonces $f(F)$ (ahora sí: la figura) ya no tiene, en general y estrictamente hablando, las mismas simetrías. Sin embargo, es evidente que sí las tiene: las vemos, las detectamos: tiene simetría afín. Podemos definir el *grupo de simetría afín* de (cualquier figura) F (luego regresamos a nuestro ejemplo, $f(F)$) como



$$\mathbf{Sim}_{\mathbf{Af}}(F) = \{g \in \mathbf{Af}(2) \mid g(F) = F\}$$

y la demostración de que es un subgrupo de $\mathbf{Af}(2)$ es, *verbatim*,³ la de que $\mathbf{Sim}(F)$ es subgrupo de $\mathbf{Iso}(2)$.

En nuestro ejemplo ($f(F)$, el dibujo de al lado), $\mathbf{Sim}_{\mathbf{Af}}(f(F))$ será justo el conjugado por f^{-1} del grupo $G = \mathbf{Sim}(F)$; que, puesto que f no es isometría, simplemente es afín, sólo es un subgrupo de las transformaciones afines. Veamos. Si $g \in G$ entonces

$$\begin{aligned} (f \circ g \circ f^{-1})(f(F)) &= (f \circ g)(f^{-1}(f(F))) \\ &= (f \circ g)(F) = f(g(F)) = f(F) \end{aligned}$$

implica que $(f \circ g \circ f^{-1}) \in \mathbf{Sim}_{\mathbf{Af}}(f(F))$. Hemos demostrado que

$$f \circ \mathbf{Sim}(F) \circ f^{-1} \subset \mathbf{Sim}_{\mathbf{Af}}(f(F)),$$

donde estamos extendiendo naturalmente nuestra definición de grupo conjugado (dada en el Paso 2 del Teorema de Leonardo) al contexto más amplio de cualquier grupo (en nuestro caso a $\mathbf{Af}(2)$). Intentemos demostrar la otra contención, pues habíamos aventurado justo la igualdad.

Si $g \in \mathbf{Sim}_{\mathbf{Af}}(f(F))$, entonces un cálculo equivalente, aunque más fácil, implica que $(f^{-1} \circ g \circ f)(F) = F$. Pero de esto no podemos concluir que $(f^{-1} \circ g \circ f) \in \mathbf{Sim}(F)$ sino sólo que $(f^{-1} \circ g \circ f) \in \mathbf{Sim}_{\mathbf{Af}}(F)$, pues no sabemos si $(f^{-1} \circ g \circ f)$ es isometría o no: en principio, es simplemente afín. Habíamos aventurado la igualdad justa en el caso concreto del dibujo $f(F)$ que estamos estudiando, porque a simple vista es evidente: el “chuequito” $f(F)$ tiene únicamente las 12 simetrías afines que corresponden a las 12 simetrías métricas del “redondito” F . Y aunque no lo hayamos podido demostrar en el primer intento, surgen las preguntas naturales de si los grupos de simetrías afines de las figuras acotadas (versión topológica) o si los subgrupos finitos (versión grupera) se comportan como los rígidos (teoremas de Leonardo). Más en concreto, y en base a lo que hemos logrado con isometrías, olvidándonos de las figuras y concentrándonos en los grupos, nos debemos hacer dos preguntas:

Pregunta 1. *Si G es un subgrupo finito de $\mathbf{Af}(2)$, ¿será cierto que es isomorfo a un cíclico o un diédrico?*

Pregunta 2. *Si G es un subgrupo finito de $\mathbf{Af}(2)$, ¿será cierto que es conjugado del cíclico $\langle R_{2\pi/n} \rangle$ o del diédrico $\langle E_0, E_{\pi/n} \rangle$ para alguna n ?*

Dejamos estas preguntas al lector, pues gran parte del trabajo ya se hizo. Por ejemplo, el Paso 1 en la demostración de Leonardo funciona *verbatim* en el caso afín (de hecho sólo en esa cualidad se basó); y ya que lo mencionamos, ahí está el error que dejamos buscar como ejercicio: para que el centro \mathbf{c} esté bien definido, que no dependa de \mathbf{x} , se necesita que el grupo tenga más de dos elementos. Y el Paso 2, irse al origen, es igual, pero acabamos obteniendo que G es subgrupo de $\mathbf{GL}(2)$ en vez de $\mathbf{O}(2)$. Los problemas aparecen en el Paso 3 que aparentemente se basó en

³Dícese de cuando es literalmente idéntica, salvo los cambios obvios.

sumas, restas y desigualdades de ángulos como números reales, pero en el fondo son una forma más mundana de trabajar con la estructura de grupo, y el orden cíclico que dan se puede obtener al tomar la órbita ($G\mathbf{x} = \{g(\mathbf{x}) \mid g \in G\}$) de algún punto. Algunos de los ejercicios siguientes pueden ayudar.

EJERCICIO 3.105 Sea $g \in \mathbf{GL}^+(2)$ (donde $\mathbf{GL}^+(2) := \{g \in \mathbf{GL}(2) \mid \det(g) > 0\}$), tal que para algún vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, se tiene que $g(\mathbf{v}) = t\mathbf{v}$. Demuestra que si g tiene orden finito, es decir, que si $g^n = \text{id}$ para alguna n , entonces $g = \text{id}$ o bien $g = -\text{id}$. (Primero demuestra que $t = \pm 1$ pensando en la acción de g sobre la recta generada por \mathbf{v} , $\langle \mathbf{v} \rangle$; y luego usa la hipótesis de que preserva orientación: toma algún vector fuera de $\langle \mathbf{v} \rangle$ y expresa lo que le hace g).

EJERCICIO 3.106 Demuestra que si $G \subset \mathbf{GL}^+(2)$ es finito, entonces $G\mathbf{v} = \{g(\mathbf{v}) \mid g \in G\}$ tiene la cardinalidad de G para cualquier $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Y que además se tiene que si $g(\mathbf{v})$ es paralelo a $h(\mathbf{v})$ para algunos g y h en G , entonces $g = h$ o bien $g = -h$ (ojo: en este último caso, sus ángulos son opuestos).

EJERCICIO 3.107 Sea $g \in \mathbf{GL}(2)$, $g \neq \text{id}$; demuestra que su conjunto de puntos fijos, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$, es una recta que pasa por el origen o sólo el origen (revisa la Sección 8.1). Concluye que los puntos fijos de una transformación afín distinta de la identidad son el vacío, o un punto o una recta.

EJERCICIO 3.108 Demuestra que $\mathbf{Sim}_{\text{Af}}(\mathbb{S}^1) = \mathbf{O}(2) = \mathbf{Sim}(\mathbb{S}^1)$; es decir, que toda simetría afín del círculo unitario es una isometría.

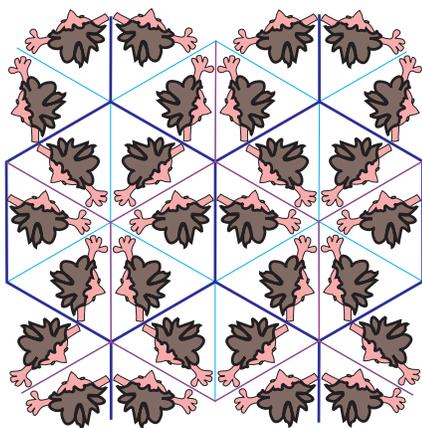
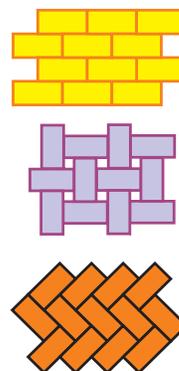
EJERCICIO 3.109 Sea \mathcal{E} la elipse dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Demuestra que $\mathbf{Sim}_{\text{Af}}(\mathcal{E})$ es conjugado de $\mathbf{O}(2)$ (para esto, encuentra una matriz que mande a \mathbb{S}^1 en \mathcal{E}).

3.9.2 Grupos discretos y caleidoscópicos

Los teoremas tipo Leonardo hablan de las posibles simetrías de las figuras acotadas. Pero además hay figuras infinitas que tienen simetría, y de ellas, más bien de sus grupos, queremos hablar en esta sección. Las más comunes son los pisos por los que caminamos a diario y las paredes que nos rodean. Aunque no sean infinitos, una pequeña porción sugiere claramente cómo debía continuarse de tal manera que cada región sea “igualita” a cualquier otra. Tienen, o dan la idea, de una “regla” para ir pegando piezas que llamaremos *losetas* y que juntas todas ellas llenan el plano. A tal descomposición del plano en losetas la llamaremos un *mosaico*; cada loseta es copia isométrica de una o varias que forman el *muestrario*; por ejemplo, en el mosaico de en medio un “ladrillo” rectangular y un “huequito” cuadrado forman el muestrario y en los otros dos el muestrario consta de una sola pieza. Con una sola pieza se pueden armar varios mosaicos (ver otros ejemplos, además de los dos al margen, en el segundo ejercicio que viene, el 3.111) usando diferentes “reglas”. Y esto de las “reglas” ya lo conocemos: consisten en el fondo de dar un subgrupo de isometrías; que llamaremos el *grupo de simetrías* del mosaico: las isometrías que lo mandan en sí mismo (que dejan a la figura completa —aunque infinita— en su lugar).



Un último y sugestivo ejemplo, antes de entrar a la teoría, surge de los caleidoscopios clásicos que en su versión física, real, consisten de tres espejos rectangulares

del mismo tamaño que forman un prisma triangular equilátero, de tal manera que al observar desde un extremo de él, la figura plana al otro lado (que puede ser cambiante) se reproduce para dar la impresión de un plano infinito. Este es otro ejemplo de un mosaico plano. Podemos pensar en una figura plana (*la figura fundamental*) dentro de un triángulo equilátero de líneas espejo: ésta se reproduce por las tres reflexiones y sus composiciones para tapizar todo el plano y generar una *figura caleidoscópica*; como mosaico, el muestrario consiste de una loseta que es el triángulo equilátero con un dibujo.

El grupo de simetrías de este mosaico es el conjunto de todas las posibles composiciones de las tres reflexiones básicas o *generadoras*; y un elemento del grupo lleva a la figura (o loseta) fundamental a una cierta loseta, que no sólo es un triángulo de la descomposición del plano en triángulos equiláteros, sino que la figura (en el dibujo, el “manquito”) le da una orientación y una posición específicas. En su versión física, la composición que produce una cierta loseta tiene que ver con los espejos y el orden en que rebota el rayo de luz que emana de la figura real para producir la imagen dada.

Basta de ejemplos (ojéense los ejercicios) y hagamos algo de teoría. Por nuestra experiencia reciente, será más fácil definir con precisión a los grupos involucrados en los mosaicos que a los mosaicos mismos (se necesitarían rudimentos de topología). Pero la intuición y los ejemplos bastan. Aunque los grupos de simetría de los mo-

saicos sean infinitos, tienen la propiedad de que localmente son finitos; cada punto del plano está en un número finito de losetas. Esto se reflejará en la primera propiedad de nuestra definición. Y otra cosa importante es que las losetas sean acotadas, que expresaremos como la propiedad dos. Llamaremos *disco* a un círculo (de radio positivo) junto con su interior, es decir a los conjuntos de la forma $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \leq r\}$ para algún punto $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ y algún $r > 0$.

Definición 3.9.1 Un subgrupo G de las isometrías $\mathbf{Iso}(2)$ es un *grupo cristalográfico* si cumple:

- i) Para cualquier disco D se tiene que el conjunto $\{g \in G \mid g(D) \cap D \neq \emptyset\}$ es finito.
- ii) Existe un disco D_0 tal que $\bigcup_{g \in G} g(D_0) = \mathbb{R}^2$, es decir, tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $\mathbf{x} \in g(D_0)$ para alguna $g \in G$.

La primera propiedad dice que al estudiar un grupo cristalográfico dentro de una región acotada del plano sólo intervendrá un número finito de elementos del grupo; a esto también se le llama que el grupo sea *discreto*. Y la segunda, que al entender una región suficientemente grande, pero acotada, de alguna manera ya acabamos; el grupo se encarga del resto. Un ejemplo importante son los subgrupos generados por dos traslaciones en direcciones independientes, por ejemplo en los vectores canónicos \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 , que da lugar a un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (en el ejemplo son precisamente las traslaciones por vectores en $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$).

El nombre “cristalográfico” viene de que los cristales en la naturaleza se reproducen respetando ciertas simetrías; los químicos, interesados en el asunto, se pusieron a estudiar tales simetrías y demostraron, hacia el final del siglo XIX, que en el plano solamente había 17 posibilidades teóricas para estas reglas de crecimiento. Los matemáticos, ya en el siglo XX, pulieron sus observaciones y la demostración, pero preservaron el nombre dado por los químicos.

La demostración de este teorema involucra dos grandes pasos: la existencia (exhibir los 17 grupos cristalográficos) y la unicidad (demostrar que no hay más). Pero resulta que los artistas y artesanos árabes —cuya expresión gráfica se centró mucho en los mosaicos, la simetría y la ornamentación pues en cierta interpretación del Corán se prohibía representar la figura humana— ya habían hecho (¡y de qué manera!) la mitad del trabajo: en la Alhambra, hay ejemplos de mosaicos con los 17 grupos. Así que la demostración de la existencia está en la Alhambra, concluida en el siglo XVI; y si hay un Teorema de Leonardo, éste —digo yo— debía ser el de la Alhambra.

No tenemos tiempo para demostrarlo aquí. Pero sí podemos ejemplificar su demostración con uno mucho más modesto. Diremos que un grupo cristalográfico G es *caleidoscópico* si además cumple con que tiene suficientes reflexiones como para generarlo, es decir, si cada elemento de G puede escribirse como composición de reflexiones en G . Un ejemplo es el que describimos arriba, que estaba generado por tres reflexiones y que denotaremos como $K_{3,3,3}$ pues las líneas de sus espejos se encuentran en los ángulos $\pi/3, \pi/3, \pi/3$.

Dibujo

Otros dos grupos caleidoscópicos surgen del juego de escuadras. Con tres líneas espejo en los lados de un triángulo de ángulos $\pi/6, \pi/3, \pi/2$ (la escuadra “30, 60, 90”) se genera el grupo $K_{6,3,2}$; y con tres espejos en ángulos $\pi/4, \pi/4, \pi/2$ (la escuadra “45”) el $K_{4,4,2}$. El último, que llamamos $K_{4 \times 4}$, es el generado por espejos en los cuatro lados de un rectángulo. Y, salvo ver que efectivamente son cristalográficos en cuyos detalles no entraremos (construyáanse modelos con espejos reales), esto concluye la parte de existencia del siguiente teorema

Teorema 3.27 *Hay cuatro grupos caleidoscópicos, que son $K_{6,3,2}$, $K_{4,4,2}$, $K_{3,3,3}$ y $K_{4 \times 4}$.*

La demostración de la unicidad se basa en un lema general sobre los centros de simetría. Dado un grupo cristalográfico G (aunque de hecho sólo usaremos que es discreto, la propiedad (i)) tenemos que para cualquier punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ hay un subgrupo de G , llamado el *estabilizador* de \mathbf{x} y denotado con $\mathbf{St}_G(\mathbf{x})$, que consta de los elementos de G que no mueven a \mathbf{x} , que lo “estabilizan”, es decir,

$$\mathbf{St}_G(\mathbf{x}) := \{g \in G \mid g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}.$$

(Es fácil demostrar que efectivamente es un subgrupo de G .) Si tomamos cualquier disco D centrado en \mathbf{x} , todos los elementos de su estabilizador mandan a D precisamente en D , pues fijan su centro y son isometrías. Por la propiedad (i) los que mandan a D cerca (lo suficiente para intersectarlo) ya son un número finito, entonces $\mathbf{St}_G(\mathbf{x})$ es finito para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. El Teorema de Leonardo nos da entonces el siguiente lema.

Lema 3.28 *Si G es un grupo discreto, entonces sus subgrupos estabilizadores no triviales son cíclicos o diédricos.* \square

Ahora sí, enfoquemos nuestras baterías contra el teorema de los grupos caleidoscópicos. Como el grupo G tiene suficientes reflexiones para generarlo, nos podemos fijar en el conjunto de sus líneas espejo. Es decir, para cada reflexión en G , pintamos de negro su línea espejo; llamemos \mathcal{L} a este conjunto de líneas. Primero vamos a demostrar que podemos encontrar un triángulo o un rectángulo formado por líneas negras (en \mathcal{L}) tal que ninguna línea de \mathcal{L} pasa por su interior y lo llamaremos la *región fundamental*.

Si todas las líneas de \mathcal{L} son paralelas, los elementos de G mueven cualquier disco en la dirección perpendicular y entonces cubren a lo más una franja del tamaño de su diámetro en esa dirección y no existiría el disco D_0 de la condición (ii). Hay, por tanto, al menos dos pendientes en \mathcal{L} .

Si son exactamente dos las pendientes en \mathcal{L} , éstas tienen que ser perpendiculares, pues con reflexiones en dos rectas no ortogonales se generan reflexiones en líneas con nuevas direcciones. En este caso, hay al menos dos rectas de cada tipo, pues si hay sólo una de un tipo, con cualquier disco se cubre, de nuevo, a lo más una franja.

Dibujo

Dibujo

Existe entonces un rectángulo en \mathcal{L} .

Si hay rectas en tres direcciones tenemos un triángulo. Llamemos F' al rectángulo o triángulo que hemos encontrado. Puesto que las reflexiones en G que mandan a F' cerca son finitas (la condición **(i)** aplicada a un disco que lo contenga), hay, a lo más, un número finito de rectas en \mathcal{L} que pasan por el interior de F' . Recortando con tijeras en todas ellas, un pedacito (cualquiera) de lo que queda es la región fundamental F que buscábamos, y ya no pasan líneas negras por su interior.

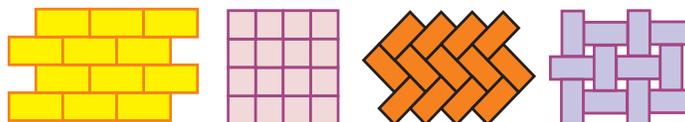
Veamos ahora cómo puede ser la región fundamental F . En un vértice, \mathbf{v} digamos, se intersectan dos líneas de \mathcal{L} de tal manera que en su ángulo definido por F (como ángulo interior) no hay ninguna otra línea de \mathcal{L} . Como las reflexiones correspondientes a estas dos líneas son elementos del grupo estabilizador de \mathbf{v} , $\text{St}_G(\mathbf{v})$, y éste es diédrico o cíclico según el Lema 3.28, entonces es diédrico (pues tiene reflexiones) y el ángulo interior de F en \mathbf{v} es de la forma π/n . Por lo tanto, F tiene que ser un rectángulo (con cuatro ángulos $\pi/2$), o bien un triángulo con ángulos $\pi/p, \pi/q, \pi/r$ donde podemos suponer que $p \leq q \leq r$. En el segundo caso se tiene entonces que p, q, r cumplen

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1,$$

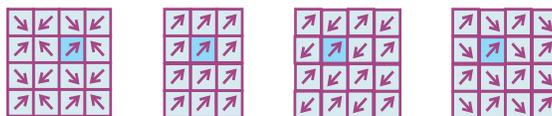
pues los ángulos de un triángulo suman π . Para $p = 2$, tenemos las soluciones $q = 3, r = 6$ y $q = r = 4$; para $p = 3$ tenemos la solución $q = r = 3$ y para $p \geq 4$ ya no hay soluciones.

Entonces hemos demostrado que los lados de F generan uno de los grupos $K_{4 \times 4}, K_{6,3,2}, K_{4,4,2}$ o $K_{3,3,3}$ (respectivamente a su orden de aparición) y por lo tanto que uno de estos grupos, el correspondiente a F , digamos que G' , está contenido en G . Dejamos demostrar que $G' = G$ al lector intrigado; tendrá que usar sustancialmente que las reflexiones generan a G .

EJERCICIO 3.110 Identifica las *líneas de simetría* (espejos de reflexiones y líneas de pasos en el grupo de simetrías) y los *centros de simetría* (centros de subgrupos finitos), de los siguientes mosaicos comunes, que, por supuesto, suponemos infinitos.



EJERCICIO 3.111 Supón que en los siguientes mosaicos la loseta oscura está justo en el cuadrado unitario. Da generadores para sus grupos de simetría.



³Para leer más sobre simetría y mosaicos ver [15], [8] y [11].

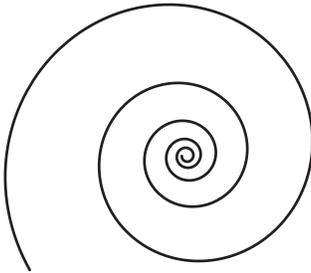
Rearmar
figura con
mosaiquito
asimétrico

3.9.3 Fractales afinmente autosimilares

Veremos por último algunas figuras que tienen cierta “simetría” aunque no dentro del grupo de isometrías.

Espirales

Consideremos una espiral infinita. Claramente tiene autosemejanzas: siente uno que “gira y crece proporcionalmente”. En efecto, el grupo “espiral”



$$\mathbf{E}_c = \{c^t \mathbf{R}_{t\pi} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

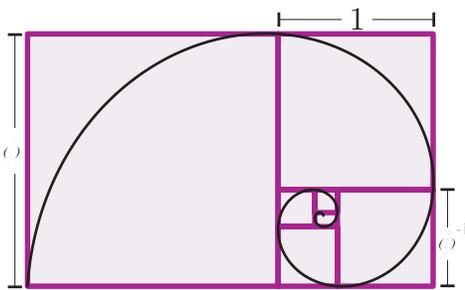
donde $c > 0$, es un subgrupo de las semejanzas y es isomorfo al grupo de los reales con la suma para cualquier $c \neq 1$, pues

$$(c^t \mathbf{R}_{t\pi}) \circ (c^r \mathbf{R}_{r\pi}) = c^{(t+r)} \mathbf{R}_{(t+r)\pi}.$$

Para cualquier punto $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, su órbita $\mathbf{E}_c(\mathbf{x}) = \{f(\mathbf{x}) \mid f \in \mathbf{E}_c\}$ es una espiral *invariante* bajo el grupo, es decir, su imagen bajo cualquier elemento del grupo es ella misma. Los distintos valores de c dan qué tan rápido crece la espiral y en qué orientación.

Especialmente bonita, y que además se da en la naturaleza, es la *espiral áurea* que crece la proporción áurea ϕ en un cuarto de vuelta y entonces en nuestra fórmula anterior corresponde a $c = \phi^2$. La *proporción áurea*, descubierta y ampliamente usada por los griegos que también la llamaban “proporción divina”, es la proporción de los lados de un rectángulo tal que si se le extrae un cuadrado sobre el lado chico nos

queda un rectángulo semejante al original. Nótese que en la figura clásica de al lado, considerando que en ella está también la sucesión infinita de cuadrados a la que alude, tiene como grupo de simetrías afines o de semejanzas al generado por la transformación líneal



$$\begin{pmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{pmatrix}$$

(poniendo al origen en el centro de la espiral), que es un subgrupo isomorfo a \mathbb{Z} dentro de \mathbf{E}_{ϕ^2} .

EJERCICIO 3.112 Demuestra, usando la definición que acabamos de dar, que la proporción áurea cumple con la ecuación

$$x^2 = x + 1$$

y por tanto que $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1.61803$.

EJERCICIO 3.113 Si en la figura anterior el cuadrado superior derecho es el cuadrado unitario, ¿dónde está el centro de la espiral?

Fractales autosimilares

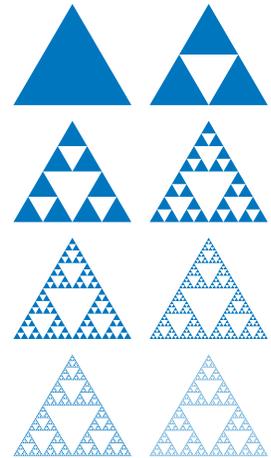
Si tomamos una espiral desde su centro hasta algún punto dado, entonces al hacer un *zoom* hacia el centro, sin importar de qué tanto aumento, volvemos a encontrar una copia de la figura original. Veremos ahora cómo definir figuras que cumplen esto pero alrededor de cualquiera de sus puntos.

Consideremos primero el ejemplo clásico conocido como el Triángulo de Sierpinsky.

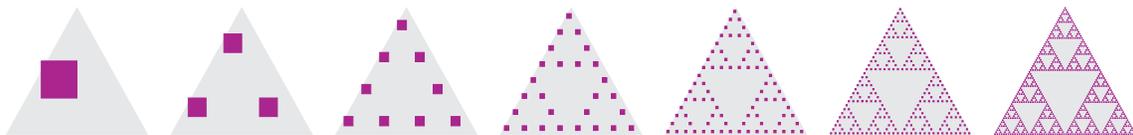
Sea Z_0 un triángulo equilátero y sean f_1 , f_2 y f_3 las contracciones de factor $1/2$ centradas en sus tres vértices. Tomamos Z_1 como la unión de las tres imágenes de Z_0 bajo estas tres homotecias; y en general, definimos Z_n inductivamente como

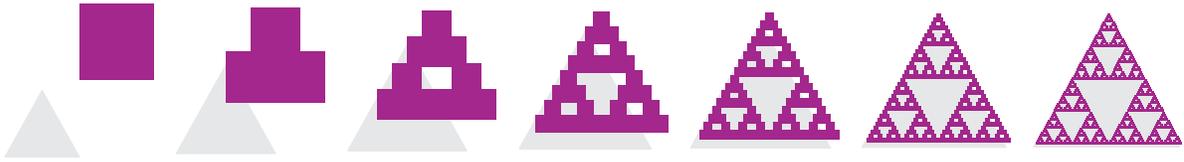
$$Z_{n+1} = f_1(Z_n) \cup f_2(Z_n) \cup f_3(Z_n).$$

En la figura vemos hasta Z_7 . El triángulo de Sierpinsky Z es el límite de los Z_n , o bien, como $Z_{n+1} \subset Z_n$, también es la intersección de todos ellos, así que, por ejemplo los tres vértices originales están en Z así como todos los vértices de todos los triángulitos (3^n) en cada paso. La propiedad importante que cumple Z es que si magnificamos pequeñas porciones en cualquier lugar vemos copias del original, y se dice que es un *fractal autosimilar*; en este caso, podemos añadir *autosemejante* pues con *zooms* basta.



La clave es que las tres transformaciones afines que consideramos contraen en todas las direcciones y cumplen entonces que independientemente de con qué conjunto acotado empezamos (en vez de Z_0) el límite es el mismo (aunque ya no se obtenga por intersección). No lo demostraremos aquí, pero ponemos dos dibujos del principio de la sucesión correspondiente a otros dos conjuntos, uno un cuadradito dentro del triángulo Z_0 (que se mantiene en gris al fondo) y el otro un cuadrado grande fuera de él. Después de unos cuantos pasos, las tres figuras ya son casi indistinguibles. Así que Z está realmente asociado a las tres semejanzas (reductoras) f_1 , f_2 y f_3 , y no depende del conjunto acotado con el que empezamos.





Si en vez de semejanzas tomamos transformaciones afines que contraigan en todas las direcciones, es decir, que cumplan la desigualdad

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{para toda } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ con } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad (3.18)$$

se tiene que la figura límite queda compacta y bien definida (teorema que no demostraremos). Así se obtienen fractales afinmente autosimilares.

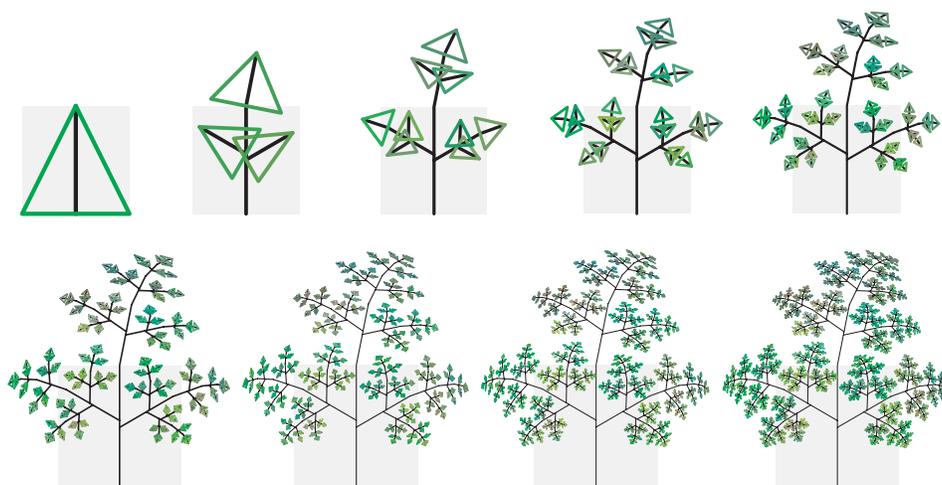
Otro ejemplo interesante es el helecho de la figura siguiente. Está asociado a las tres transformaciones afines g_1 , g_2 y g_3 que mandan al triángulo F_0 del primer cuadro en los tres triángulos del segundo respectivamente (en gris se mantiene el cuadrado unitario para mostrar proporciones y de los segmentos hablaremos en breve). Y de nuevo se define inductiva o recursivamente

$$F_{n+1} = g_1(F_n) \cup g_2(F_n) \cup g_3(F_n)$$

para obtener el “follaje” F como el límite de los conjuntos F_n (en la figura aparece hasta F_8); otra vez no depende del conjunto inicial F_0 sino únicamente de las tres transformaciones. (Puesto que reducen área, las tres transformaciones tienen determinante con valor absoluto menor que 1 y una de ellas lo tiene negativo: ¿puedes decir cuál? se aprecia hasta el tercer cuadro.) Obsérvese que los tallos del helecho se obtienen de una manera sutilmente diferente. Si T_0 es el segmento vertical del primer cuadro, entonces a la siguiente iteración también se le añade lo que ya llevábamos —crece, por decirlo botánicamente, sobre lo ya construido—; esto es, definimos

$$T_{n+1} = T_n \cup g_1(T_n) \cup g_2(T_n) \cup g_3(T_n)$$

y entonces el resultado final T (el límite) sí depende de con qué empezamos (y con ese pequeño intervalo se logra el efecto, de “tallos”, deseado).



Llamemos $H = T \cup F$ al helecho. Las tres funciones generadoras g_1, g_2, g_3 lo mandan en sus tres ramas principales, las composiciones de un par de ellas lo mandan en sus 9 “ramas secundarias”, y así sucesivamente. Si consideramos todas las posibles composiciones finitas de g_1, g_2, g_3 , junto con la identidad se obtiene un *semigrupo* (algunos autores lo llaman *grupoides*) que cumple con dos de los axiomas de grupo. A saber, tiene a la identidad y es cerrado bajo composición, pero no tiene inversos; de alguna manera, es el análogo de los grupos de simetría para este tipo de fractales. Y cualquier elemento g de este semigrupo cumple que $g(H) \subset H$; manda al helecho completo en una ramita por ahí que es afínmente equivalente a H .

Como ya mencionamos, es importante que las tres transformaciones afines que usamos para definir el helecho sean contracciones; en particular, entonces F tampoco depende de con qué figura acotada hayamos empezado. Esbozaremos por último, algunas de las ideas que indican el porqué de este hecho.

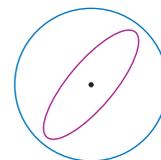
Primero, para una transformación afín $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, que sea una contracción (que cumpla (3.18)), implica algo más fuerte que llamaremos *contracción fuerte* que es que existe una constante $c, 0 < c < 1$ para la cual

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq c d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{para toda } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ con } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \quad (3.19)$$

Pues la parte lineal es la que determina las distancias porque

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) - (A\mathbf{y} + \mathbf{b})| = |A\mathbf{x} - A\mathbf{y}|;$$

y entonces basta ver qué le hace A al círculo unitario. Como quedará claro en el capítulo siguiente, A lo manda en una elipse centrada en el origen y si se cumple (3.18) para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ entonces esta elipse está contenida en el círculo unitario y su semieje mayor $c < 1$ sirve como la constante mínima que cumple (3.19).



Con (3.19) se puede demostrar en general que una contracción fuerte f tiene un punto fijo \mathbf{p} . Para una función afín esto es más fácil (véase el Ejercicio 3.115). Y entonces para cualquier \mathbf{x} se tiene que la sucesión $f^n(\mathbf{x})$ tiende (se acerca indefinidamente) a \mathbf{p} , pues si d es la distancia de \mathbf{x} a \mathbf{p} , es fácil ver que

$$d(f^n(\mathbf{x}), \mathbf{p}) \leq c^n d \rightarrow 0$$

(obsérvese que esto no necesariamente es cierto si sólo se cumple (3.18)). Así que las iteraciones bajo f de cualquier conjunto acotado se van aproximando a \mathbf{p} y lo tienen como límite. Esto implica que el punto fijo de cualquier transformación en los dos semigrupos “contractivos” que hemos considerado va a aparecer en el límite (Z o F), y que también lo harán sus imágenes bajo otros elementos del semigrupo. Pero quizás aparezcan más puntos. Por lo menos, esto medio explica por qué el conjunto inicial no importa para definir el fractal.

Por último, hay que mencionar que esto de los fractales es mucho más amplio. Hay de muchos otros tipos y aún la terminología no está bien establecida pues en las últimas décadas ha habido mucho trabajo sobre ellos y su sorprendente similitud con la naturaleza.

EJERCICIO 3.114 Sea f_1 la transformación afín definitoria del helecho H asociada a su rama principal, es decir, que manda al triángulo F_0 en el más grande y más alto de los tres en F_1 , el central, pues. ¿Cuál es su punto fijo? ¿Puedes determinar los puntos fijos de las otras dos? (Uno es fácil y el otro más escurridizo.) ¿De alguna composición doble?

EJERCICIO 3.115 Sea $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ una función afín de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que no tiene puntos fijos. Demuestra que entonces existe un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ para el cual $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$. (Usa que la ecuación $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ es equivalente a $(A - I)\mathbf{x} = -\mathbf{b}$ y en el Teorema 3.21.)

EJERCICIO 3.116 Usando el ejercicio anterior, demuestra que una contracción afín (que cumple (3.18)) tiene un único punto fijo.

³Como bibliografía general sobre fractales, véanse [18] y [19].

