Capítulo 4

Cónicas II (clasificación)

En el Capítulo 2 se introdujeron las cónicas (círculos, elipses, hipérbolas y parábolas) como los lugares geométricos de puntos en el plano euclidiano que cumplen cierta propiedad descrita en términos de distancias. De esa descripción se dedujo que son los conjuntos de puntos cuyas coordenadas cumplen cierta ecuación cuadrática. Una ecuación cuadrática de éstas se puede considerar como un polinomio cuadrático (de grado dos) en dos variables (las coordenadas) igualado a 0. Al tomar cónicas en diferentes posiciones y con distintos parámetros se obtendrán diversos polinomios. La pregunta que guía este capítulo es la pregunta inversa:

¿Será cierto que cualquier polinomio cuadrático en dos variables define una cónica? Si es así, ¿cómo saber qué tipo de cónica es y cuál es su descripción geométrica?

Por su parte, en el Capítulo 3 estudiamos diferentes grupos de transformaciones geométricas. Ellos nos darán la herramienta y el lenguaje para atacar y entender el problema que nos acabamos de plantear.

4.1 ¿Qué es clasificar?

Muy en general, "clasificar" es describir o enumerar las clases de equivalencia de un conjunto de objetos de acuerdo con ciertos "criterios" que definen una relación de equivalencia entre ellos. En nuestro caso, de lo que depende una "clasificación" es de determinar un conjunto de objetos geométricos (triángulos, digamos, como ejemplo para fijar ideas) y de establecer una noción de equivalencia, es decir, definir las condiciones en que estamos dispuestos a decir que dos objetos son "iguales", o, mejor dicho, equivalentes. En esto último, la noción de grupo de transformaciones que hemos desarrollado es básica. Concretemos.

Una *figura plana* es cualquier subconjunto $\mathsf{F} \subset \mathbb{R}^2$. Sea G un grupo de transformaciones de $\mathbb{R}^2$ (nos interesan principalmente los que ya hemos definido, es decir, G puede ser el grupo afín $\mathbf{Af}(2)$; el general lineal $\mathbf{Gl}(2)$; el grupo de semejanzas; el de homotecias; el de isometrías $\mathbf{Iso}(2)$; el de transformaciones ortogonales $\mathbf{O}(2)$, o el de traslaciones). Decimos que dos figuras F_1 y F_2 son G-*equivalentes* (o bien, que son *equivalentes módulo* G) y lo denotamos $\mathsf{F}_1 \overset{\mathsf{G}}{\sim} \mathsf{F}_2$, si existe $g \in \mathsf{G}$ tal que $g(\mathsf{F}_1) = \mathsf{F}_2$. La terminología se puede hacer a veces más simple; por ejemplo, dos figuras son *semejantes* (o *isométricas*) si son equivalentes módulo semejanzas (o, respectivamente, **Iso**(2)-equivalentes).

Veamos primero que ésta es efectivamente una relación de equivalencia, demostración que corresponde puntualmente a que G es un grupo de transformaciones:

i) $\overset{\mathsf{G}}{\sim}$ es *refexiva* ($\mathsf{F} \overset{\mathsf{G}}{\sim} \mathsf{F}$); pues $\mathrm{id}(\mathsf{F}) = \mathsf{F}$ y la función identidad, id, está en G.

ii) $\overset{\mathsf{G}}{\sim}$ es *simétrica* ($\mathsf{F}_1 \overset{\mathsf{G}}{\sim} \mathsf{F}_2 \Rightarrow \mathsf{F}_2 \overset{\mathsf{G}}{\sim} \mathsf{F}_1$); pues si existe $g \in \mathsf{G}$ tal que $g(\mathsf{F}_1) = \mathsf{F}_2$ entonces $g^{-1}(\mathsf{F}_2) = \mathsf{F}_1$ y $g^{-1} \in \mathsf{G}$.

iii) $\overset{\mathsf{G}}{\sim}$ es *transitiva* ($\mathsf{F}_1 \overset{\mathsf{G}}{\sim} \mathsf{F}_2$ y $\mathsf{F}_2 \overset{\mathsf{G}}{\sim} \mathsf{F}_3 \Rightarrow \mathsf{F}_1 \overset{\mathsf{G}}{\sim} \mathsf{F}_3$); pues si $g_1(\mathsf{F}_1) = \mathsf{F}_2$ y $g_2(\mathsf{F}_2) = \mathsf{F}_3$ con $g_1, g_2 \in \mathsf{G}$, entonces $(g_2 \circ g_1)(\mathsf{F}_1) = \mathsf{F}_3$ y $(g_2 \circ g_1) \in \mathsf{G}$.

Además, estas relaciones se "anidan" de acuerdo con la contención de grupos; es decir, si $\mathsf{H} \subset \mathsf{G}$ entonces $\mathsf{F}_1 \overset{\mathsf{H}}{\sim} \mathsf{F}_2 \Rightarrow \mathsf{F}_1 \overset{\mathsf{G}}{\sim} \mathsf{F}_2$. Así, si, por decir algo, dos figuras son isométricas, también serán afinmente equivalentes (pero no necesariamente linealmente equivalentes).

4.1.1 Clasificación de triángulos

Para acabar de entender con un ejemplo concreto, describamos la clasificación de triángulos. Primero hay que definirlos: sea $\mathcal{T}$ el conjunto de triángulos planos, es decir, ternas (no ordenadas) no colineales de puntos en $\mathbb{R}^2$. El Teorema 6.4 nos dice que "hay un sólo triángulo afín", es decir que cualquier par de triángulos son afinmente equivalentes.

Esta única clase de equivalencia afín se parte en muchas subclases cuando vemos los triángulos con "ojos de semejanza". Pues, si alguna de las seis transformaciones afines que mandan un triángulo en otro es una semejanza, entonces éstos tienen los mismos ángulos, e inversamente. Así que el teorema "*dos triángulos son semejantes si y sólo si sus ángulos son iguales*" es un "teorema de clasificación" que dice que hay una clase de semejanza por cada terna (no ordenada) de ángulos α, β, γ que cumple $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ y $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

De nuevo, las clases de semejanza se parten en clases de isometría de acuerdo con un parámetro real y positivo (el tamaño) que podríamos tomar como el área del triángulo o la longitud de un lado dado. Y podríamos de nuevo partir estas clases de isometría en clases módulo translaciones (y aparece un parámetro de "orientación" y uno de "dirección"), o bien en clases módulo ortogonales (y aparece un parametro de "distancia al origen"). Llegando al extremo de la clasificación con el grupo trivial ($\{\mathrm{id}\}$) donde dos son equivalentes si son estrictamente el mismo.

4.2 Clasificación de cónicas

Primero que nada, un polinomio de segundo grado (o *cuadrático*) en las variables x, y es una expresión

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

donde los coeficientes a, b, c, d, e, f son números reales, y además al menos uno de a, b, c es distinto de 0 (si no fuera así estaríamos hablando de un polinomio lineal). Los primeros tres términos constituyen su *parte cuadrática,* los siguientes dos su parte *lineal*, y por último f es la parte *constante*. Nótese que al monomio bxy se le considera de grado 2 pues es la suma de los exponentes de las dos variables. A un polinomio cuadrático se le puede pensar también como una función $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde a un punto dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ se le asigna el número $P(\mathbf{x})$ que resulta de sustituir en la expresión los valores de sus coordenadas $\mathbf{x}^\top = (x, y)$. Así que podemos hablar de los *ceros del polinomio* P, o la *curva asociada al polinomio* P, como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, a saber:

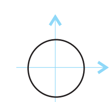
$$\mathcal{C}(P) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid P(\mathbf{x}) = 0 \right\}.$$

Diremos que un subconjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ es una *curva cuadrática* si consiste de los ceros de un polinomio cuadrático, es decir, si para algún polinomio cuadrático P se tiene que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(P)$. Por el momento no queremos usar el nombre más común de "cónica", para que quede claro nuestro problema, que consiste en clasificar las curvas cuadráticas de acuerdo con los diferentes grupos geométricos, y en particular, ver si son siempre cónicas. La parte fundamental de esta clasificación consistirá en demostrar que cualquier curva cuadrática es afinmente equivalente a alguna de las siguientes, que por el momento sirven de ejemplos.

4.2.1 Las cónicas canónicas (y algo más)

i) El círculo unitario. El polinomio

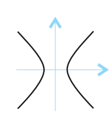
$$x^2 + y^2 - 1 \tag{i}$$



tiene como ceros el círculo unitario.

ii) La hipérbola unitaria. El polinomio

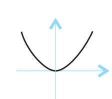
$$x^2 - y^2 - 1 \tag{ii}$$



tiene como ceros la hipérbola que llamaremos unitaria.

iii) La parábola canónica. El polinomio

$$x^2 - y \tag{iii}$$

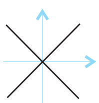


tiene como ceros a una parábola.

Por medio de transformaciones afines estas tres curvas se pueden mandar a muchas otras. Del círculo unitario se obtienen las elipses, y de la hipérbola y la parábola (que hemos escogido por la simpleza de su polinomio) se obtienen todas las demás hipérbolas y parábolas que estudiamos en el Capítulo 2. Pero notemos de una vez que con los polinomios cuadráticos se obtienen nuevos conjuntos:
iv) El círculo imaginario. El polinomio

$$x^2 + y^2 + 1 \tag{iv}$$

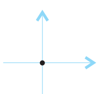
no tiene ningún cero en los reales pues la suma de dos cuadrados es no negativa, más 1 es estrictamente positiva. Es decir, su curva cuadrática es el vacío $\emptyset \subset \mathbb{R}^2$. La llamamos "círculo imaginario" pues fácilmente le encontramos soluciones complejas (por ejemplo $i^2+0^2+1=0$, donde $i^2=-1$) pero se nos sale del contexto de este libro; aunque como polinomio tiene plenos derechos y tendremos entonces que incluirlo en nuestro análisis.



v) Par de rectas. El polinomio

$$x^2 - y^2 \tag{v}$$

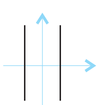
tiene como conjunto de ceros a la unión de las dos rectas $x+y=0$ y $x-y=0$; pues al verlo como producto ($x^2-y^2=(x+y)(x-y)$), si se hace cero entonces alguno de los factores debe ser cero y viceversa.



vi) El círculo de radio cero. Dado por el polinomio

$$x^2 + y^2 \tag{vi}$$

que define al punto 0 por una sola ecuación cuadrática que es el caso limite de círculos cuyo radio se hace cero. También podría llamarse **par de rectas imaginarias** pues se factoriza ($x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)$) y se puede ver entonces como dos "rectas complejas" de las que sólo vemos en el plano real al origen.



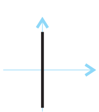
vii) Rectas paralelas. Por la misma razón que en **(v)**, el polinomio

$$x^2 - 1, \tag{vii}$$

da dos rectas paralelas ($x=1$ y $x=-1$).
viii) Rectas paralelas imaginarias. Dada por

$$x^2 + 1, \tag{viii}$$

que se factoriza $x^2+1=(x+i)(x-i)$.



ix) Recta doble. Dada por

$$x^2. \tag{ix}$$

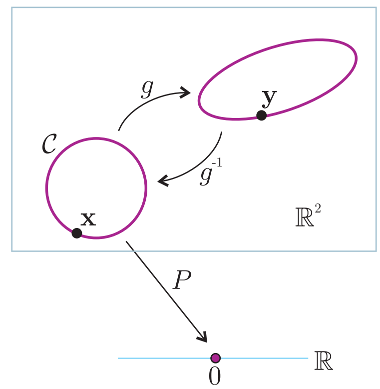
Aunque geométricamente sólo consiste de una recta ($x=0$) se le llama "recta doble" pues el polinomio que la define es diferente.

4.2.2 Equivalencia de polinomios

Para que tenga sentido el problema de clasificar curvas cuadráticas módulo transformaciones afínes, la primera pregunta que debemos responder es si las imágenes afínes de curvas cuadráticas son de nuevo curvas cuadráticas.

Para esto, sean $\mathcal{C}$ una curva cuadrática y $\mathsf{g} \in \mathbf{Af}(2)$ una transformación afín. Tenemos entonces que existe un polinomio cuadrático P que define a $\mathcal{C}$, es decir, tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathsf{P}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathsf{P}(\mathbf{x}) = 0\right\}$. Afirmamos que

$$\mathsf{g}(\mathcal{C}) = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid (\mathsf{P} \circ \mathsf{g}^{-1})(\mathbf{y}) = 0\right\}. \tag{4.1}$$



Esta igualdad de conjuntos se demuestra por dos contenciones. Primera ($\subset$): cualquier punto en $\mathsf{g}(\mathcal{C})$ es de la forma $\mathsf{g}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$; se tiene entonces que $\mathsf{P}(\mathbf{x}) = 0$ y por lo tanto

$$(\mathsf{P} \circ \mathsf{g}^{-1})(\mathsf{g}(\mathbf{x})) = \mathsf{P}(\mathsf{g}^{-1}(\mathsf{g}(\mathbf{x}))) = \mathsf{P}(\mathbf{x}) = 0,$$

lo cual implica que $\mathsf{g}(\mathbf{x})$ está en el conjunto de la derecha.
Y al reves ($\supset$): si tomamos $\mathbf{y}$ tal que $(\mathsf{P} \circ \mathsf{g}^{-1})(\mathbf{y}) = 0$; sea $\mathbf{x} := \mathsf{g}^{-1}(\mathbf{y})$, se tiene entonces que $\mathsf{P}(\mathbf{x}) = \mathsf{P}(\mathsf{g}^{-1}(\mathbf{y})) = 0$ y por tanto que $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, lo cual implica que $\mathbf{y} = \mathsf{g}(\mathbf{x}) \in \mathsf{g}(\mathcal{C})$. Queda entonces demostrada la igualdad.

Obsérvese que en la demostración anterior sólo se usó que $\mathcal{C}$ estuviera definida como los ceros de una función y que g fuera invertible (una transformación). Ahora veremos que $\mathsf{g}(\mathcal{C})$ también es una curva cuadrática. Para esto bastará ver que si P es un polinomio cuadrático y g una transformación afín entonces la función $(\mathsf{P} \circ \mathsf{g}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ también es un polinomio cuadrático (para no estar usando g^{-1}, que sólo complica la notación). Puesto que las dos coordenadas de g son polinomios lineales, y se obtiene una expresión de $\mathsf{P} \circ \mathsf{g}$ al sustituir estos dos polinomios lineales en las variables de P, es claro que (después de simplificar la expresión) obtendremos un polinomio con monomios de grado a lo más dos. Si los coeficientes de los monomios cuadráticos se cancelaran todos, es decir, si el resultado fuera lineal o constante, tendríamos que al volver a precomponer con g^{-1} se vuelve cuadrático y esto es claramente imposible. Tuvimos que usar entonces que g es una transformación. En resumen, hemos demostrado el siguiente lema.

Lema 4.1 *Sea $\mathcal{C}$ una curva cuadrática y $\mathsf{g} \in \mathbf{Af}(2)$, entonces $\mathsf{g}(\mathcal{C})$ también es una curva cuadrática. Además, si $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathsf{P})$ entonces $\mathsf{g}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}(\mathsf{P} \circ \mathsf{g}^{-1})$.* □

Hay que observar, antes de definir la equivalencia de polinomios, que al multiplicar un polinomio por una constante $\mathsf{k} \neq 0$, sus ceros no cambian. Es decir, que $\mathcal{C}(\mathsf{P}) = \mathcal{C}(\mathsf{kP})$ cuando $\mathsf{k} \neq 0$; pues entonces $\mathsf{P}(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{kP}(\mathbf{x}) = 0$.

Sea G un subgrupo de $\mathbf{Af}(2)$. Decimos que dos polinomios cuadráticos P_1 y P_2 son G-*equivalentes*, o *equivalentes módulo* G, escrito $P_1 \overset{G}{\sim} P_2$, si existen $g \in G$ y $k \in \mathbb{R}$, con $k \neq 0$, tales que $kP_1 = P_2 \circ g$. Que ésta es una relación de equivalencia se deja como ejercicio.

De lo anterior se obtiene que polinomios cuadráticos G-equivalentes definen curvas G-equivalentes. El inverso, aunque es cierto, aún no lo podemos demostrar, pues incluye que si dos polinomios cuadráticos definen la misma curva (tienen los mismos ceros) entonces difieren por una constante y para esto (en general) hay que incluir los números complejos. Lo que sí podemos hacer es enunciar el teorema fundamental de este capítulo, cuya demostración nos llevará gran parte del mismo.

Teorema 4.2 *Sea P un polinomio cuadrático en dos variables x, y. Entonces P es afinmente equivalente a uno y sólo uno de los polinomios (i), (ii),..., (ix).*

Una vez establecido este teorema, la clasificación afín de curvas cuadráticas será inmediata.

Corolario 4.3 *Hay ocho clases de equivalencia afín de curvas cuadráticas que corresponden a los ocho dibujos de la Sección 4.2.1.*

Nótese que redujimos a ocho pues el vacío aparece en dos tipos de polinomios.

EJERCICIO 4.1 Demuestra que para un subgrupo G de $\mathbf{Af}(2)$, la relación de ser G-*equivalentes* es una relación de equivalencia en los polinomios cuadráticos en dos variables.

4.3 Reducción de polinomios cuadráticos

En esta sección veremos cómo reducir (simplificar) un polinomio cuadrático cualquiera mediante cambios de coordenadas afines. Para empezar, valdrá la pena simplificar la notación de tal polinomio usando el lenguaje matricial y vectorial que hemos desarrollado. A su vez, esto nos dejará ver con nitidez cómo diferentes tipos de transformaciones afines afectan el polinomio.

El polinomio general de segundo grado en dos variables se puede siempre escribir como

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f, \tag{4.2}$$

donde la única diferencia con la forma anterior es que hemos puesto un 2 al coeficiente del término mixto (el monomio en xy) por razones que serán evidentes muy pronto. Si consideramos el vector variable $\mathbf{x}^\top = (x, y)$ y definimos una matriz A y un vector $\mathbf{k}$ como

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix},$$

el polinomio P se reescribe como

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + f, \tag{4.3}$$

que llamaremos la *expresión vectorial* de P, pues

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} \\
&= x(ax + by) + y(bx + cy) = ax^2 + 2bxy + cy^2,
\end{aligned}$$

y

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = dx + ey.$$

Debe quedar claro entonces que anteponer el 2 al coeficiente mixto fue para que la expresión de la matriz A quede más simple. Así la matriz A, que debemos enfatizar que es *simétrica* (es decir, $A = A^\top$), representa a la parte cuadrática, mientras que el vector $\mathbf{k}$ a la parte lineal (la constante f quedó tal cual). Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 4xy + 3y^2 + 5x - y + 2$ queda determinado por su parte constante 2, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y el vector} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nuestra definición de *polinomio cuadrático* será ahora una expresión (4.3) con

$$A = A^\top \neq 0.$$

Nótese que al pedir a la matriz A que sea simétrica obtenemos que la expresión vectorial de P (4.3) es única; se pudo haber tomado cualquier otra matriz con tal de que sus elementos no diagonales sumaran $2b$ pero la más natural, y que resulta única, es la simétrica y esto será importante. Una de las grandes ventajas de usar la expresión vectorial (4.3) en vez de la expresión en variables (4.2) es que la vectorial se escribe igual cuando hay más variables; sólo cambian las dimensiones de los elementos, y da la idea clara de que se pueden generalizar nuestros argumentos. Por ejemplo, para tres variables, tanto el vector variable $\mathbf{x}$ y el constante $\mathbf{k}$ tienen tres entradas, y la matriz A es simétrica de orden 3×3; pero en la expresión en variables faltan cuatro monomios a considerar (véase ejercicio abajo). Sin embargo, esta posibilidad no la usaremos por el momento, y seguiremos con dos variables.

Veremos ahora cómo se afecta la expresión vectorial del polinomio cuadrático P al precomponer con diversas transformaciones afines, empezando por las más simples.

EJERCICIO 4.2 Encuentra la matriz simétrica A y el vector constante $\mathbf{k}$ que dan la expresión vectorial de los siguientes polinomios cuadráticos:

$$x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 3$$
$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 2x - 86y + 39$$
$$2xy - 6x - 4y - 4.$$

EJERCICIO 4.3 Da una expresión general para un polinomio cuadrático en tres variables x, y, z y luego define una expresión vectorial para él.

4.3.1 Traslaciones (cómo encontrar el centro)

Consideremos la traslación $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{h}$, para cualquier vector $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$, y veamos cómo se escribe el polinomio cuadrático $P \circ g$, donde P está descrito por (4.3) (es decir, donde $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + f$).

$$\begin{aligned}
(P \circ g)(\mathbf{x}) &= P(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = (\mathbf{x}+\mathbf{h}) \cdot A(\mathbf{x}+\mathbf{h}) + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{h}) + f \\
&= (\mathbf{x}+\mathbf{h}) \cdot (A\mathbf{x} + A\mathbf{h}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{h} + f \\
&= \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot A\mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{h} \cdot A\mathbf{h} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{h} + f \\
&= \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot A\mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{h} \cdot A\mathbf{h} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{h} + f) \\
&= \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + (\mathbf{x} \cdot A\mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + P(\mathbf{h}). \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Nótese que los tres sumandos de enmedio corresponden a la parte lineal, que podemos simplificar aún más usando dos lemas generales.

Lema 4.4 *Dadas dos matrices A y B que se puedan multiplicar, se tiene $(AB)^\top = B^\top A^\top$.*

Demostración. Ver ejercicios 3.86 y 4.4 (abajo). □

Lema 4.5 *Sea A una matriz simétrica (es decir, $A = A^\top$) entonces para cualquier par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ se tiene que $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.*

Demostración. Puesto que $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x}^\top A\mathbf{y}$ y el transpuesto de un número real (matriz 1×1) es él mismo, se tiene por el lema anterior que

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} &= \mathbf{x}^\top A\mathbf{y} = (\mathbf{x}^\top A\mathbf{y})^\top = (A\mathbf{y})^\top (\mathbf{x}^\top)^\top \\
&= \mathbf{y}^\top A^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top A\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot A\mathbf{x} = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.
\end{aligned}$$

□

Por este lema, donde es fundamental que A sea simétrica, podemos simplificar la parte lineal de (4.4) para obtener

$$\mathbf{x} \cdot A\mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 2\,(A\mathbf{h} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = (2A\mathbf{h} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x},$$

de donde concluimos que

$$(P \circ g)(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + (2A\mathbf{h} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x} + P(\mathbf{h}).$$

De tal manera que si podemos encontrar $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ que cumpla

$$2A\mathbf{h} + \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

habremos encontrado una traslación que elimine la parte lineal de P. En caso de que tal $\mathbf{h}$ exista, se le llama el *centro* de la curva cuadrática (o de la cónica) asociada a P. En particular, podemos concluir con el siguiente lema.

Lema 4.6 *Sea* $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + f$ *un polinomio cuadrático* ($A = A^\top$) *tal que* $\det(A) \neq 0$*. Entonces si definimos* $\mathbf{c} := -(1/2)A^{-1}\mathbf{k}$*, se tiene que* $\mathbf{c}$ *es el centro de* $\mathcal{C}\,(P)$ *y*

$$P(\mathbf{x} + \mathbf{c}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + P(\mathbf{c}).$$

□

EJERCICIO 4.4 Demuestra que $(ABC)^\top = C^\top B^\top A^\top$, donde A, B, C son tres matrices que se pueden multiplicar.

EJERCICIO 4.5 Encuentra los centros, si es que tienen, de las curvas asociadas a algunos de los polinomios siguientes:

$$\begin{gathered}
x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 3 \\
9x^2 + 24xy + 16y^2 - 2x - 86y + 39 \\
xy - 3x - 2y - 2 \\
-6x^2 + 24xy + y^2 - 12x - 26y - 161 \\
9x^2 - 4xy + 6y^2 - 58x + 24y + 59 \\
x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 1.
\end{gathered}$$

4.3.2 Rotaciones (cómo encontrar los ejes)

Ya vimos que las traslaciones afectan la parte lineal de los polinomios cuadráticos. Consideremos ahora el caso en que g sea una transformación lineal $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ (donde

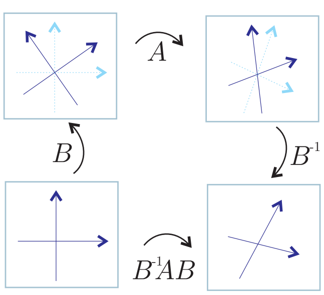
$B \in \mathbf{Gl}(2)$). Si P es el polinomio cuadrático general (4.3) entonces

$$\begin{aligned} (\mathsf{P} \circ \mathsf{g})(\mathbf{x}) &= \mathsf{P}(\mathsf{B}\mathbf{x}) = (\mathsf{B}\mathbf{x}) \cdot \mathsf{A}(\mathsf{B}\mathbf{x}) + \mathbf{k} \cdot (\mathsf{B}\mathbf{x}) + \mathsf{f} \\ &= (\mathsf{B}\mathbf{x})^\top \mathsf{A}(\mathsf{B}\mathbf{x}) + \mathbf{k}^\top \mathsf{B}\mathbf{x} + \mathsf{f} \\ &= (\mathbf{x}^\top \mathsf{B}^\top)\mathsf{A}(\mathsf{B}\mathbf{x}) + (\mathbf{k}^\top \mathsf{B})\mathbf{x} + \mathsf{f} \\ &= \mathbf{x} \cdot (\mathsf{B}^\top \mathsf{A}\mathsf{B})\mathbf{x} + (\mathsf{B}^\top \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x} + \mathsf{f}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Obsérvese primero que la nueva matriz $B^\top AB$ que define la parte cuadrática sigue siendo simétrica pues $(B^\top AB)^\top = B^\top A^\top \left(B^\top\right)^\top = B^\top AB$, así que la expresión de $P \circ g$ dada arriba es válida. Simplificar la parte cuadrática de P corresponde entonces a encontrar una matriz B tal que $B^\top AB$ sea más simple; por ejemplo *diagonal,* es decir, con ceros fuera de la diagonal, pues entonces el polinomio $P \circ g$ no tendrá término mixto xy. Veremos, como resultado principal de esta sección, que esto siempre se puede lograr.

Hasta aquí sólo hemos usado que B es una matriz (ni siquiera usamos que fuera no singular, con determinante no nulo), pero si pedimos además que sea ortogonal entonces tenemos que $B^\top = B^{-1}$ y, en este caso, la matriz de la parte cuadrática se transforma en la matriz $B^\top AB = B^{-1}AB$ que tiene un significado geométrico muy claro. Es la matriz que expresa la función A en la base de las columnas de B. Veamos.

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ las columnas de B, es decir $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Si $\mathbf{x}^\top = (x, y)$ entonces $B\mathbf{x} = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$; y podemos pensar a $B\mathbf{x}$ como el vector (con coordenadas repecto a la base canónica) que tiene coordenadas (x, y) en la base $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$. Por el contrario, dado cualquier $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, $B^{-1}\mathbf{y}$ nos da los coeficientes para escribir a $\mathbf{y}$ como combinación de la base $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$, pues es la solución del sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Así que $B^{-1}AB$ es la matriz que describe a A, pensada como función, pero en términos de la base $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$; por ejemplo, $\left(B^{-1}AB\right)(1,0)^\top = B^{-1}A\left(B\,(1,0)^\top\right) = B^{-1}(A\mathbf{u})$ que da, como habíamos quedado, las coordenadas de $A\mathbf{u}$ en la base $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ y los datos que le dimos, $(1, 0)$, son las coordenadas de $\mathbf{u}$ en la base $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$. Quizá este razonamiento general no convenza aún, pero no importa, pues en nuestro caso lo podemos concretar aún más.



Supongamos, como es el caso en que estamos interesados, que $B \in \mathbf{O}(2)$, es decir que $BB^\top = I$. Y sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ las columnas de B que forman una base ortonormal. Supongamos además que A actúa de manera muy sencilla en $\mathbf{u}$ y en $\mathbf{v}$: que simplemente los alarga por factores λ y μ respectivamente, es decir que $A\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v} = \mu\,\mathbf{v}$. Entonces, expresar a A (como función lineal) pero en términos de la base B debía ser la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Veamos si corresponde a $B^\top AB$:

$$\begin{aligned} B^\top AB &= (\mathbf{u},\mathbf{v})^\top A(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^\top \\ \mathbf{v}^\top \end{pmatrix} (A\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^\top A\mathbf{u} & \mathbf{u}^\top A\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^\top A\mathbf{u} & \mathbf{v}^\top A\mathbf{v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}\cdot A\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot A\mathbf{v} \\ \mathbf{v}\cdot A\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot A\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}\cdot \lambda\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot \mu\mathbf{v} \\ \mathbf{v}\cdot \lambda\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot \mu\mathbf{v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) & \mu\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \\ \lambda\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}) & \mu\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Efectivamente, y con esto nos basta, pues si encontramos una matriz B que satisfaga lo anterior (que "diagonalice" la matriz A) podremos eliminar el término mixto del polinomio P para acercarnos a los polinomios canónicos.

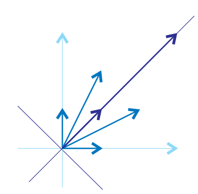
Valores propios y vectores propios

Sea A una matriz cuadrada cualquiera. Se dice que un vector $\mathbf{v}$ es *vector propio* de A con *valor propio* $\lambda \in \mathbb{R}$, si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y se tiene que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Nuestro problema será encontrar *parejas propias* (es decir, $\lambda, \mathbf{v}$ valor y vector propio correspondientes). A los vectores propios y valores propios también se les conoce como *eigenvectores* y *eigenvalores* por su nombre en alemán.

Un vector propio de una matriz es un vector donde la matriz (por más complicada que ésta sea), como función, actúa de una manera muy sencilla, simplemente lo alarga. Nótese además que eliminamos el $\mathbf{0}$ de los posibles vectores propios pues éste sería tal para cualquier "valor propio"; sin embargo el 0 ($\in \mathbb{R}$) sí puede ser valor propio si la matriz anula algún vector no nulo.

Antes de abordar el problema de encontrar vectores propios de manera algebraica, veamos un **ejemplo** sencillo donde geométricamente es fácil encontrarlos. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$



Puesto que bajo esta función el eje x gira hacia arriba y el eje y hacia la derecha, el cuadrante positivo se apachurra; las líneas en él cercanas al eje x giran en dirección contraria a las cercanas al eje y y entonces debe haber una línea que se queda fija. Por simetría (pasa escencialmente lo mismo en los dos extremos) esta línea debe ser la de enmedio; efectivamente, el $(1,1)$ es vector propio de A con valor propio 3. Los otros dos cuadrantes se abren como abanico y de nuevo su línea "media" se queda fija; el vector $(-1,1)$ es vector propio de A con valor propio 1. Entonces, en la base rotada 45° esta transformación consiste simplemente en expander por un factor 3 el primer eje y dejar fijo el ortogonal.

Otro ejemplo geométricamente claro son las reflexiones: tienen vectores propios con valor propio 1 en la línea espejo y vectores propios con valor propio -1 en su ortogonal.

Veamos primero un resultado muy general que agrupa naturalmente a los vectores propios.

Lema 4.7 *Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores propios de A con el mismo valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces cualquier combinación lineal no trivial de ellos también es vector propio.*

Demostración. Si $A\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$, entonces para cualquier par de coeficientes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$A(\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v}) = \alpha(A\mathbf{u}) + \beta(A\mathbf{v}) = \alpha(\lambda\,\mathbf{u}) + \beta(\lambda\,\mathbf{v}) = \lambda(\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v})$$

y entonces, si $\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, es vector propio de A con valor propio λ. □

Así que los vectores propios vienen en "paquetes" que son subespacios (líneas por el origen es lo más común) asociados a los valores propios. Los conjuntos de vectores propios asociados a un valor propio se llaman *espacios propios* o *eigenespacios*; en ellos, la matriz actúa como una homotecia. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene como espacio propio del valor propio 2 al plano xy y como espacio propio del valor propio 1 al eje z.

Supongamos que $\lambda, \mathbf{v}$ es una pareja propia de la matriz A (en particular $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$), entonces

$$\begin{aligned} & A\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v} \\ \Leftrightarrow \quad & A\mathbf{v} - \lambda\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad & (A - \lambda\,I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Esta última ecuación nos dice que la transformación $(A - \lambda\,I)$ no es biyectiva pues manda a un vector no cero en el cero. Y como $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, esto último sucede (regresando formalmente al caso de dimensión 2 que sí hemos demostrado, aunque será cierto en general) si y sólo si

$$\det(A - \lambda\,I) = 0.$$

Esto demuestra el siguiente lema.

Lema 4.8 *Para cualquier matriz A (de 2×2):*

$$\lambda \text{ es un valor propio de } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0.$$

□

Lema 4.9 *Si A es simétrica 2×2 entonces tiene dos valores propios λ_1 y λ_2 en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Puesto que A es simétrica, $A = A^\top$, la podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora a λ como una variable o incógnita y entonces tenemos

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)\,(c-\lambda) - b^2 \\ &= \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2). \end{aligned}$$

Que resulta ser un polinomio de segundo grado en la variable λ.

Este polinomio es tan importante que tiene nombre: $\det(A - \lambda I)$ es el *polinomio característico* de la matriz A.

Nos interesa, según el lema anterior, determinar para cuáles λ se anula este polinomio, es decir, cuáles son sus raíces. Para esto apliquemos la fórmula clásica "del chicharronero" (página 77), la cual expresa las raíces en términos de los coeficientes y en nuestro caso da:

$$\begin{aligned} \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2} &= \frac{(a+c) \pm \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2)}}{2} \\ = \frac{(a+c) \pm \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2)}}{2} &= \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}. \end{aligned}$$

Puesto que $(a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$ por ser la suma de dos cuadrados, entonces la raíz cuadrada es real y $\det(A - \lambda\, I) = 0$ tiene dos soluciones reales, que vienen de tomar $+$ o $-$ en la expresión anterior. Explícitamente, sean

$$\lambda_1 = \frac{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}\ ,\ \lambda_2 = \frac{(a+c) - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

las dos raíces; de tal manera que podemos concluir, por el Lema 4.8, que λ_1 y λ_2 son valores propios de A y que su polinomio característico se escribe

$$\det(A - \lambda\, I) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

□

Obsérvese que en la demostración fue crucial que $A^\top = A$; pues en general este lema no es cierto (véanse los ejercicios): no toda matriz A de 2×2 tiene valores propios, como no todo polinomio cuadrático en una variable tiene raíces reales.

Además, de la demostración podemos concluir (para matrices simétricas) que los dos valores propios coinciden si y solamente si $a = c$ y $b = 0$ (pues se debe tener que $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$); es decir, los dos valores propios coinciden si y sólo si la matriz original es la de una homotecia. Tenemos entonces:

Corolario 4.10 *Sea A simétrica 2×2 y sean λ_1, λ_2 sus dos valores propios. Entonces, sus valores propios coinciden ($\lambda_1 = \lambda_2$) si y sólo si $A = \lambda_1 I$. Y en este caso, cualquier vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es vector propio.* □

Corolario 4.11 *Sea A simétrica 2×2. Entonces existe una base $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^2$ donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores propios de A.*

Demostración. Por el Lema 4.9 sabemos que A tiene dos valores propios, λ_1 y λ_2. Si éstos fueran iguales, por el corolario anterior cualquier base funciona. Si fueran diferentes ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), entonces por la definición de valor propio existen vectores propios $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ distintos de $\mathbf{0}$ correspondientes a los valores propios λ_1 y λ_2 respectivamente. Estos dos vectores no pueden ser paralelos pues por el Lema 4.8 sus valores propios coincidirían. Entonces forman una base de $\mathbb{R}^2$. □

Un ejemplo Vale la pena hacer un ejemplo concreto para fijar ideas. Consideremos la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar sus valores propios hay que resolver su polinomio característico que es

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 6. \end{aligned}$$

La fórmula nos dice que sus raíces son

$$\lambda_1 = (1 + \sqrt{1+24})/2 = 3 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = (1-5)/2 = -2,$$

lo cual implica que

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda + 2).$$

Aunque en este caso pudo haber sido resuelto sin usar la fórmula, ya tenemos los dos valores propios. Para encontrar los vectores propios correspondientes, habrá que encontrar una solución no trivial de los sistemas $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Para $\lambda_1 = 3$ tenemos

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ 2x - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

y una de sus (múltiples) soluciones no triviales es $\mathbf{u}^\top := (2,1)$. Compruébese directamente que $A\mathbf{u} = 3\mathbf{u}$ como reza la teoría. Para el otro eigenvalor, $\lambda_2 = -2$, el sistema es

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y una solución no trivial es $\mathbf{v}^\top = (-1, 2)$.

No sólo obtuvimos que los vectores propios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ forman una base de $\mathbb{R}^2$, sino mucho más: que son ortogonales. Pero esto, como veremos, no es coincidencia.

EJERCICIO 4.6 Demuestra que la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene vectores propios. Da un argumento algebraico y uno geométrico.

EJERCICIO 4.7 Demuestra que la matriz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ no tiene vectores propios para $b \neq 0$. ¿Puedes dar un argumento geométrico?

Conclusión (diagonalización ortogonal de matrices simétricas)

En nuestro estudio de los vectores propios de las matrices simétricas, saquémosle jugo ahora a lo que ya sabíamos sobre su buen comportamiento respecto al producto interior.

Lema 4.12 *Sea A una matriz simétrica. Si $\lambda_1, \mathbf{u}$ y $\lambda_2, \mathbf{v}$ son pares propios tales que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.*

Demostración. Usando el Lema 4.5, tenemos

$$\lambda_1(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\lambda_1 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = A\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A\,\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda_2 \mathbf{v}) = \lambda_2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),$$

de donde

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, esto implica que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. □

Podemos entonces concluir.

Teorema 4.13 *Sea A una matriz simétrica 2×2. Existe una rotación $B \in \boldsymbol{O}(2)$ tal que $B^\top AB$ es diagonal, es decir, tal que*

$$B^\top AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de A.

Demostración. Por el Lema 4.9, A tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ entonces A ya es diagonal por el Corolario 4.10, y B puede tomarse entonces como la identidad. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores propios respectivos. Por el Lema 4.12, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, entonces $\mathbf{v}$ es paralelo a $\mathbf{u}^\perp$; y por el Lema 4.7, $\mathbf{u}^\perp$ también es vector propio correspondiente a λ_2. Sea

$$B = \frac{1}{|\mathbf{u}|}\left(\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp\right);$$

puesto que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, claramente B es la matriz de una rotación. Y con un cálculo análogo al que hicimos en (4.6) se concluye el teorema. □

La teoría que hemos desarrollado se resume en una receta muy simple.

Receta para diagonalizar matrices simétricas. El **ingrediente** es una matriz simétrica $A = A^\top$ de 2×2.

El **primer paso** consiste en resolver su polinomio característico $\det(A - \lambda I)$.

Una vez que se conocen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, **procédase** a encontrar $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que $(A - \lambda_1 I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (esto le resultará muy fácil si recuerda las propiedades del compadre ortogonal, pues basta aplicarlo a un renglón de $(A - \lambda_1 I)$).

Y todo ya está cocinado para **declarar** $B = (1/|\mathbf{u}|)(\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp)$. El resultado será que $B^\top A B$ es la matriz diagonal con entradas λ_1 y λ_2.

EJERCICIO 4.8 Concluye la demostración del Teorema 4.13.

EJERCICIO 4.9 Encuentra la matriz B de una rotación que diagonalize las siguientes matrices simétricas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Calcula $B^\top A B$, donde A es una de las anteriores y B la rotación correspondiente.

EJERCICIO 4.10 Demuestra que si una matriz A (no necesariamente simétrica) tiene dos valores propios distintos entonces existe una matriz $B \in \mathbf{Gl}(2)$ tal que $B^{-1}AB$ es diagonal.

4.4 Clasificación de curvas cuadráticas

Hemos estudiado cómo afectan las traslaciones y las transformaciones ortogonales a los polinomios cuadráticos; ahora juntaremos nuestros resultados para dar su clasificación isométrica. Pero empecemos con un ejemplo concreto para fijar las ideas, técnicas y resultados que obtuvimos en la sección anterior.

4.4.1 Ejemplo

Consideremos el polinomio cuadrático

$$P(x,y) = 8x^2 + 12xy + 17y^2 - 16x - 12y - 12;$$

queremos saber qué curva define y dónde está. Para pasarlo a su forma vectorial, $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + f$, definimos $f = -12$,

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} -16 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $\det(A) = 8 \times 17 - 6 \times 6 = 100$ distinto de cero, y por tanto $\mathcal{C}(P)$ tiene centro

$$\mathbf{c} = -A^{-1}\left(\frac{1}{2}\mathbf{k}\right) = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 8 \times 17 - 6 \times 6 \\ -8 \times 6 + 6 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De tal manera que si trasladamos la curva $\mathcal{C}(P)$ por el vector $(-1, 0)$ ésta queda definida por el polinomio

$$P_1(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x} + \mathbf{c}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + P(\mathbf{c}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} - 20.$$

Ahora queremos encontrar una rotación B que elimine el término mixto de P_1, y para esto, seguimos la receta de diagonalización. El polinomio caracteristico de A es

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 8-\lambda & 6 \\ 6 & 17-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda + 100 = (\lambda - 5)(\lambda - 20)$$

y entonces sus valores propios son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 20$. Para el primero de ellos, se tiene que

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

y podemos tomar como solución del sistema homogéneo que define a $\mathbf{u}^\top = (2, -1)$, de tal manera que una rotación que diagonaliza a A es

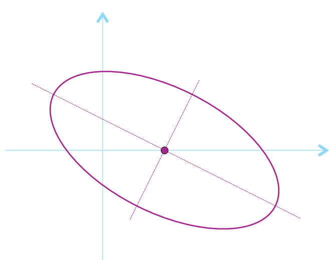
$$B = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B^\top AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Podemos concluir, por (4.5), que si rotamos el eje x a la línea con dirección $(2,-1)$ el polinomio P_1 toma la forma

$$P_2(\mathbf{x}) = P_1(B\mathbf{x}) = 5\,x^2 + 20\,y^2 - 20$$

que, finalmente, es equivalente a

$$P_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}P_2(\mathbf{x}) = x^2 + 4\,y^2 - 4.$$



La curva cuadrática de P_0 es claramente una elipse dada por la ecuación canónica

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Entonces podemos concluir que $\mathcal{C}(P)$, la que originalmente queríamos describir, es una elipse con centro en $(1,0)$, eje mayor de tamaño 2 en la dirección del vector $(2,-1)$ y eje menor 1.

Ya que tenemos los numeritos calculados y frescos, prosigamos con el ejemplo hasta su final afín. Si al círculo unitario lo expandemos en el eje x un factor 2, y luego componemos con la isometría $B\mathbf{x}+\mathbf{c}$, debemos llegar justo a $\mathcal{C}(P)$. La transformación afín que acabamos de describir tiene la fórmula

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \end{pmatrix}.$$

Puesto que dividimos entre 5 y luego entre 4 para obtener la ecuación canónica de la elipse, debe ser cierto, según la teoría que hemos desarrollado, que

$$(P \circ g)(x, y) = 20\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

EJERCICIO 4.11 Ensuciate las manos y haz con cuidado todo el trabajo ("talacha" le llamamos en México) que compruebe nuestra última aseveración; simplemente hay que sustituir fórmulas, expandir y simplificar. O bien, prográmalo y revísalo en algún paquete matemático adecuado.

4.4.2 Clasificación isométrica

Consideremos de nuevo el polinomio cuadrático general

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + 2\,\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + c,$$

con $A = A^\top \neq 0$; donde el vector constante $\mathbf{b}$ que determina la parte lineal es ahora la mitad del que habíamos tomado antes ($\mathbf{k}$) para evitar el $\frac{1}{2}$ que nos aparecía; nótese también que hemos cambiado el nombre a la constante. Y sea

$$g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{h}$$

una isometría, es decir, $B \in \mathbf{O}(2)$. Al hacer los cálculos como en las secciones precedentes, se obtiene que

$$\begin{aligned} (P \circ g)(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \cdot \left(B^\top AB\right) \mathbf{x} + 2\,(A\mathbf{h} + \mathbf{b}) \cdot (B\mathbf{x}) + P(\mathbf{h}) \\ &= \mathbf{x} \cdot \left(B^\top AB\right) \mathbf{x} + 2\,B^\top (A\mathbf{h} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} + P(\mathbf{h})\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Debemos partir nuestro análisis en dos grandes casos de acuerdo con el determinante de la matriz A.

Caso 1: $\det(A) \neq 0$**.**

Si escogemos a $\mathbf{h}$ como el centro ($\mathbf{h} = -A^{-1}\mathbf{b}$) y a B como una rotación que diagonalice A (bien definida salvo el orden y orientación que demos a los vectores propios), entonces P es isométricamente equivalente a un polinomio de la forma

$$P_1(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma, \tag{4.8}$$

donde α y β son los valores propios de A y γ es el valor del polinomio original evaluado en el centro (nótese que con estos datos bastan).

Ahora bien, tenemos también que α y β son distintos de cero por el siguiente lema que habíamos postergado.

Lema 4.14 *Si A es una matriz simétrica con valores propios α y β, entonces*

$$\det(A) = \alpha\beta$$

Demostración. Por el Teorema de diagonalización, 4.13, sea B una rotación que diagonaliza a A. Entonces como el determinante es multiplicativo se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \det\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \det\left(B^\top AB\right) \\ &= \det\left(B^\top\right)\det(A)\det(B) = 1 \times \det(A) \times 1 \\ &= \det(A)\,. \end{aligned}$$

□

Entonces tenemos naturalmente dos subcasos: cuando $\det(A) > 0$ y los signos de α y β coinciden, o bien cuando son distintos y $\det(A) < 0$.

<u>$\det(A) > 0$</u>: Tenemos tres posibilidades. Primera, si la costante γ es cero (el centro es parte de la "curva" $\mathcal{C}(P)$) entonces la única solución (el único cero de (4.8)) es $(x, y) = (0, 0)$, pues de otra forma es estrictamente del signo de los eigenvalores. Segunda, si la constante γ es del mismo signo que α y β, entonces la curva es vacia pues no hay soluciones (reales, insistamos, pues se le puede llamar "elipse imaginaria"). Y por último, si el signo de γ es el opuesto a los de α y β, los ceros de P_1 (véase (4.8)) claramente coinciden con las soluciones de la ecuación canónica de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $a = \sqrt{-\gamma/\alpha}$ y $b = \sqrt{-\gamma/\beta}$.

<u>$\det(A) < 0$</u>: Sólo tenemos dos posibilidades. Si $\gamma = 0$, P_1 es una diferencia de cuadrados que se puede factorizar en la forma

$$(a\,x + b\,y)\,(a\,x - b\,y)$$

donde hemos supuesto que $\alpha > 0$ (y entonces $a = \sqrt{\alpha}$ y $b = \sqrt{-\beta}$), cuya curva consiste en dos rectas cuya intersección es el centro. O bien, si $\gamma \neq 0$ podemos escoger el primer vector propio (correspondiente a la variable x) de tal manera que su valor propio α tenga signo contrario a γ, y entonces los ceros de P_1 corresponden a las soluciones de la ecuación canónica de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $a = \sqrt{-\gamma/\alpha}$ y $b = \sqrt{\gamma/\beta}$.

Caso 2: $\det(A) = 0$.

Puesto que no tenemos la seguridad de eliminar la parte lineal, nos conviene simplificar primero la parte cuadrática (cuidado en los ejercicios, esto modifica la parte lineal). En este caso, por el Lema 4.14, uno de los valores propios es cero, y el otro es distinto de cero pues, si no, por el Corolario 4.10, la matriz A sería la matriz nula que hemos desechado desde el principio. Entonces, podemos diagonalizar (rotar) para que el valor propio correspondiente a x sea el no nulo, y dividiendo entre él obtener que P es isométricamente equivalente a un polinomio de la forma

$$x^2 + 2\,\alpha\,x + \beta\,y + \gamma.$$

Este polinomio siempre se puede reescribir como

$$(x + \alpha)^2 + \beta\,y + \left(\gamma - \alpha^2\right),$$

de tal manera que haciendo el cambio de variable isométrico $x' = x + \alpha$, y olvidando la prima, se simplifica a

$$P_2(x, y) = x^2 + a\,y + b. \tag{4.9}$$

donde a y b tienen las definiciones obvias. ¿A precomponer con qué traslación corresponde este cambio de variable? Y de nuevo tenemos dos subcasos.

$\underline{a = 0}$: Si $b < 0$ entonces el polinomio (4.9) define (y por tanto $\mathcal{C}(P)$ consiste de) dos rectas paralelas. Si $b = 0$, es una recta doble; y si $b > 0$ consiste de "dos rectas imaginarias" (en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto vacío).

$\underline{a \neq 0}$: Con una traslación en el eje y, o equivalentemente, el cambio de variable $y' = y + b/a$ y olvidando la prima, obtenemos que P es isométricamente equivalente al polinomio

$$x^2 + a\,y,$$

que define una parábola.

En resumen, hemos demostrado que cualquier polinomio cuadrático es isométricamente equivalente a alguna de nueve posibles familias canónicas. Enfatizamos lo de familias, pues nótese que (con isometrías) no podemos deshacernos de ciertos parámetros. Por ejemplo, y para describir los casos importantes, en las elipses nos quedaron los parámetros a y b en la ecuación canónica, que podemos suponer positivos (pues como se usan sus cuadrados el signo da lo mismo) y además podemos suponer que $a \geq b$ (pues al rotar $90°$ se intercambian las variables x y y en la ecuación). De tal manera que, como intuitivamente ya sabíamos, hay una clase isométrica de elipses para cada pareja $a \geq b > 0$ (los semiejes major y menor); los casos extremos $a = b > 0$ corresponden a los círculos. En las hipérbolas, no podemos intercambiar las variables (cuyo papel se define respecto a la constante) y tenemos una clase para cada par a, b estrictamente positivo. Por último, las parábolas dependen del parametro $a > 0$ (pues cambiar y por $-y$ es una isometría).

EJERCICIO 4.12 Describe geométricamente algunas de las curvas cuadráticas definidas por los polinomios siguientes (da el centro, la dirección de los ejes y los parámetros o la ecuación canónica correspondiente). Escoge al menos una elipse, una hipérbola y una parábola.

$$-6x^2+24xy+y^2-12x-26y-161$$
$$9x^2-4xy+6y^2-58x+24y+59$$
$$x^2+2xy+y^2+2x+2y-1$$
$$47x^2+32xy-13y^2-252x-12y+247$$
$$5x^2+24xy-5y^2+14x-34y-37$$
$$66x^2-24xy+59y^2-108x-94y+1$$
$$13x^2+10xy+13y^2+42x-6y-27$$
$$9x^2+6xy+17y^2+12x-28y-52$$
$$-7x^2-12xy+2y^2+40x+20y-55$$
$$9x^2-24xy+16y^2+130x-90y+175$$
$$18x^2+48xy+32y^2-29x+3y-22$$
$$32x^2+48xy+18y^2+31x-8y-88$$
$$-7x^2+48xy+7y^2+158x-6y-88$$
$$-24x^2-14xy+24y^2+152x-164y+151$$
$$7x^2+48xy-7y^2+116x-138y-348.$$

EJERCICIO 4.13 Encuentra un polinomio que defina las siguientes curvas cuadráticas.
a) La elipse con semieje mayor 3 en la dirección $(3,4)$, semieje menor 2 y centro en $(-1,2)$.
b) La hiperbóla con semieje principal 4 en la dirección $(2,1)$, semieje secundario 1 y centro en $(2,3)$.
c) La parábola con vértice en $(1,3)$ directriz en la dirección $(1,4)$ y distancia focal 1.

4.4.3 Clasificación afín y por semejanzas

Para concluir con la clasificación afín que habíamos anunciado al principio de la Sección 4.2, bastará convertir los parámetros que nos quedan (α, β y γ, o bien a y b, en los párrafos anteriores) en 1 o -1. Y es claro que esto debe lograrse alargando (o encogiendo) adecuadamente en los ejes, y saliéndonos entonces del ámbito de las isometrías. Por ejemplo, en el polinomio de la parábola, $P(x,y)=x^2+ay$ con $a\neq 0$, se obtiene que

$$P\left(x,-\frac{y}{a}\right)=x^2-y,$$

que equivale a precomponer con la expansión de $-a^{-1}$ en el eje y, y que nos da justo el polinomio de la parábola canónica, (iii) en la Sección 2.1. Éste es el único polinomio con parte lineal de la clasificación isométrica, así que podemos olvidarnos de estos términos.

Si en P_1 (4.8) o en P_2 con $a = 0$, hay un término constante no nulo podemos dividir entre él para hacerlo 1. Y nos queda entonces preocuparnos por los términos cuadráticos puros como αx^2. Obsérvese que, si en vez de x, sustituimos la expresión $a\,x$ (una nueva a, cualquier $a \neq 0$), se obtiene $\alpha\,(a\,x)^2 = \left(\alpha\,a^2\right) x^2$ de tal manera que el coeficiente puede cambiar, pero nunca cambiará de signo. En términos de matrices, si precomponemos a P_2 (4.9) con una transformación lineal que expanda el eje x por un factor a y el eje y por b, la matriz de la parte cuadrática resultante será:

$$\text{“}B^\top AB\text{"} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\alpha & 0 \\ 0 & b^2\beta \end{pmatrix}.$$

Así que lo que debemos hacer es tomar $a = \left(\sqrt{|\alpha|}\right)^{-1}$ y $b = \left(\sqrt{|\beta|}\right)^{-1}$ para obtener una matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Con estas observaciones, es fácil ver que los subcasos de la clasificación isométrica dada en la sección anterior corresponden a los incisos y polinomios de la Sección 2.1, con lo que se completa el teorema de clasificación afín.

Si consideramos por último el grupo de semejanzas, entre las isometrías y las afines, en la matriz “B” última que usamos se debe tener que $a = b$. Entonces sólo podemos lograr que uno de los coeficientes se haga ± 1, y por tanto las elipses (imaginarias o no) y las hipérbolas módulo semejanzas tienen un parámetro que puede ser la razón entre los semiejes o, como habíamos visto en el Capítulo 2, la excentricidad.

EJERCICIO 4.14 ¿Cuál es la matriz de una homotecia que lleve a la parábola dada por $x^2 + ay$, con $a \neq 0$, en la canónica (dada por $x^2 - y$)? Concluye que hay sólo una clase de parábolas módulo semejanzas.

4.5 *Lo que no demostramos

Aunque sí demostramos (detalles más, detalles menos) que cualquier polinomio cuadrático es afinmente equivalente a alguno de los nueve canónicos, no demostramos que estos no son equivalentes entre sí. Es decir, que son justo nueve las clases de equivalencia. Un argumento de tipo topológico va como sigue.

Si un polinomio de una elipse fuera equivalente a uno de una hipérbola, entonces tenemos una transformación afín, *afinidad* debíamos llamarla para resumir, que manda a la elipse en la hipérbola. Pero esto no es posible porque la hipérbola parte el plano en tres pedazos (que se llaman las "componentes conexas" de su complemento) y la elipse sólo en dos. Para diferenciar a la elipse de la parábola necesitamos usar otra cualidad; la de acotado funciona, pues la elipse lo es mientras que la parábola no. En el fondo estamos usando que las *afinidades* son continuas y que bajo transformaciones continuas estas propiedades se preservan. Para diferenciar a las degeneradas no vacías entre sí, este tipo de argumentos funcionan; y para diferenciarlas con las no degeneradas habrá que usar que estas últimas no contienen rectas y son más que un punto. Sin embargo, con estos argumentos topológicos no podemos diferenciar a los dos polinomios de las curvas vacías, aunque a estos sí de los demás.

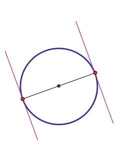
Otra cosa que no demostramos es que los polinomios que definen a una misma cónica son únicos salvo constantes diferentes de cero. Como veremos, esto tiene que ver con su grupo de simetrías afines. Consideremos el caso más simple; el del círculo unitario $\mathbb{S}^1$ cuya matriz asociada es la identidad, pues está definido por el polinomio

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 1 = \mathbf{x} \cdot I\mathbf{x} - 1.$$

Supongamos que otro polinomio cuadrático P_1 también define el círculo unitario, es decir, que $\mathbb{S}^1 = \mathcal{C}(P_1)$. Queremos demostrar que entonces existe $k \neq 0$ tal que $P_1 = kP$. Por el Teorema de Clasificación Afín y el párrafo precedente sabemos que P_1 y P tienen que ser afinmente equivalentes. Entonces existen $g \in \mathbf{Af}(2)$ y $k \neq 0$ tales que

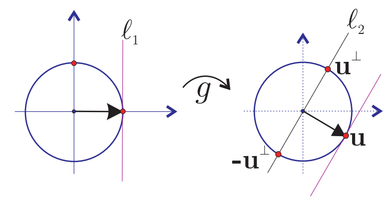
$$P_1 = k(P \circ g).$$

Esto implica que g manda biyectivamente a $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ (arguméntalo). Es decir, que g es una simetría afín del círculo unitario. Ejemplos de este tipo de las g son las transformaciones ortogonales, y ahora demostraremos con argumentos geométricos que son las únicas.



Para ver que g deja fijo el origen (y que entonces es lineal) hay que determinarlo, como centro del círculo, en términos geométricos: es el punto medio del segmento que une los puntos de contacto de dos tangentes paralelas. Las tangentes son rectas que intersectan el círculo en un único punto; como g manda líneas en líneas, manda entonces tangentes en tangentes. Como además g preserva paralelismo y puntos medios, tiene que dejar fijo el centro y por tanto es lineal.

Sea $\mathbf{u} = \mathrm{g}(\boldsymbol{e}_1) \in \mathbb{S}^1$; nos falta demostrar que $\mathrm{g}(\boldsymbol{e}_2) = \pm\mathbf{u}^\perp$. La tangente a $\mathbb{S}^1$ en $\boldsymbol{e}_1$, ℓ_1 digamos, es la vertical por $\boldsymbol{e}_1$, que bajo g tiene que ir a la tangente en $\mathbf{u}$, que es la ortogonal al vector $\mathbf{u}$ por el punto $\mathbf{u}$. Entonces, el eje y (paralelo a ℓ_1 por el centro) va bajo g a la ortogonal a $\mathbf{u}$ por el origen, sea ésta ℓ_2. Como $\boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{S}^1 \cap (\text{eje } y)$, entonces $\mathrm{g}(\boldsymbol{e}_2) \in \mathbb{S}^1 \cap \ell_2 = \left\{\mathbf{u}^\perp, -\mathbf{u}^\perp\right\}$, y por lo tanto g es ortogonal y se escribe como $\mathrm{g}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{B}\boldsymbol{x}$ con $\mathrm{B} \in \mathbf{O}(2)$. Tenemos entonces la siguiente igualdad de polinomios



$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_1(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{k}(\mathrm{P} \circ \mathrm{g})(\boldsymbol{x}) = \mathrm{k}(\mathrm{P}(\mathrm{B}\boldsymbol{x})) \\
&= \mathrm{k}\left(\boldsymbol{x} \cdot \left(\mathrm{B}^\top \mathrm{I} \mathrm{B}\right)\boldsymbol{x} - 1\right) = \mathrm{k}(\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{I}\boldsymbol{x} - 1) = \mathrm{k}\,\mathrm{P}(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}
$$

pues $\mathrm{B}^\top\mathrm{B} = \mathrm{I}$, que es lo que queríamos demostrar: *los polinomios cuadráticos que definen el círculo unitario, $\mathbb{S}^1$, son exactamente los de la forma*

$$
\mathrm{k}\left(x^2 + y^2 - 1\right) \quad \text{con} \quad \mathrm{k} \neq 0.
$$

Con este caso concreto en la mano, es fácil argumentar que para cualquier elipse los polinomios que la definen difieren por constantes distintas de cero. Pero en general, esta línea de argumentación deja mucho que desear. Habría que argumentar geométricamente en cada caso (llevamos uno de nueve) y obtener el grupo de simetrías afines de una cónica (véase el ejercicio sobre simetrías de la hipérbola). Algo que resulta imposible para las cónicas vacías, de las que tenemos dos, la degenerada y la no degenerada, que no podemos diferenciar geométricamente.

La línea de argumentación clásica va por otro lado; es algebraica. Pero depende de cerrar algebraicamente a los números reales en los complejos, y ahí sí funciona. Si dos polinomios tienen los mismos ceros, entonces, salvo constantes, son potencias de un mismo polinomio, y esto podría considerarse como el principio de la geometría algebraica moderna. Rebasa el contexto de este libro.

EJERCICIO 4.15 Demuestra que el conjunto de afinidades que dejan invariante un polinomio cuadrático P,

$$
\mathbf{Sim}_{\mathbf{Af}}(\mathrm{P}) := \{\mathrm{g} \in \mathbf{Af}(2) \mid \mathrm{P} \circ \mathrm{g} = \mathrm{P}\},
$$

es un grupo.

EJERCICIO 4.16 Para $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} - 1$ demuestra algebraicamente que

$$
\mathbf{Sim}_{\mathbf{Af}}(\mathrm{P}) = \mathbf{O}(2).
$$

EJERCICIO 4.17 Sea $\mathcal{H}$ la hipérbola canónica dada por la ecuación $x^2 - y^2 = 1$. Demuestra que para cualquier $(a, b) \in \mathcal{H}$ se tiene que la transformación lineal definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

deja invariante a (es una simetría afín de) $\mathcal{H}$.

***EJERCICIO 4.18** Demuestra que si $g \in \mathbf{Af}(2)$ es tal que $g(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ (con $\mathcal{H}$ la hipérbola canónica) entonces g es lineal y está dada por una matriz como la anterior, o bien por esa seguida de la reflexión en el eje x.

***EJERCICIO 4.19** Demuestra que dos polinomios que definen la hipérbola canónica difieren por una constante ($P_1 = k\, P_2$).