

Tarea 4

1. Una partícula se mueve en una cicloide, es decir, su ecuación de movimiento es

$$\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

Encuentre los valores máximos y mínimos de $|\vec{v}|$ (módulo de la velocidad) y $|\vec{a}|$ (módulo de la aceleración).

2. Si un proyectil de masa m es disparado con velocidad inicial \vec{v}_0 y está en un medio que le ofrece resistencia proporcional a la velocidad, entonces éste se encuentra descrito por la siguiente ecuación:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -mg\hat{j} - k \frac{d\vec{r}}{dt},$$

donde k es una constante. Muestre que la ecuación anterior se puede poner como

$$\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{k}{m} \vec{r} = \vec{v}_0 - gt\hat{j}.$$

Integre la ecuación anterior para encontrar $\vec{r}(t)$ suponiendo que el proyectil se lanza desde el origen en $t = 0$.

3. Se tiene una hélice $\vec{\gamma}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ con $a, b > 0$. Encuentre la torsión y curvatura de la hélice. Cuál es el valor máximo de torsión que puede tener una hélice con radio a fijo.
4. Encuentre una fórmula para el radio de curvatura de las siguientes curvas en los puntos indicados:
 - (a) $\vec{\gamma}(t) = (t, \sin t)$ en $(\pi/2, 1)$.
 - (b) $\vec{\gamma}(t) = (2 \ln t, -t - \frac{1}{t})$ en $(0, -2)$ donde $t = 1$.