

Tarea 2

1. Considere la solución general de la ecuación diferencial $y'' + \omega^2 y = 0$, es decir, $y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. Muestre que dicha solución se puede expresar de las siguientes formas:

(a) $y(t) = D_1 e^{\omega t} + D_2 e^{-\omega t}$.

(b) $y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$.

Encuentre los valores de D_1 , D_2 , A , ϕ .

2. Muestre que $e^{\ln z} = z$. Por otro lado muestre que $\ln e^z$ no siempre es igual a z .
3. Encuentre una función analítica $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ si:

(a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^3$.

(b) $v(x, y) = e^{-y} \sin x$.

Adicionalmente muestre que si $f(z)$ es analítica, entonces $f^*(z^*)$ también es analítica.

4. ¿Cuáles son las condiciones de Cauchy Riemann en coordenadas polares para una función $f(re^{i\theta}) = R(r, \theta)e^{i\Theta(r, \theta)}$?

R: $\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}$ y $\frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} = -R \frac{\partial \Theta}{\partial r}$.

5. Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 - 1} \quad (1)$$

donde C es el círculo $|z| = 2$

6. Encuentre que es lo que hacen las siguientes funciones a los círculos concéntricos al origen.

(a) $w(z) = z + \frac{1}{z}$.

(b) $w(z) = z - \frac{1}{z}$.

¿Qué sucede si $|z| \rightarrow 1$?

7. Encuentre que es lo que hacen las siguientes funciones a las rectas $x = c_1$ y $y = c_2$.

(a) $w(z) = \sin z$.

(b) $w(z) = \cos z$.

(c) $w(z) = \cosh z$.

(d) $w(z) = \sinh z$.

¿Cuáles son las relaciones entre las anteriores funciones?.