Termodinámica del Cuerpo Negro y la Ley de Stefan-Boltzmann.

Víctor Romero Rochín

20 de mayo de 2010

Estas son unas notas breves para aclarar las deducciones hechas en clase sobre la energía, presión de radiación de cuerpo negro, la termodinámica de la radiación, asi como de la ley de Stefan-Boltzmann.

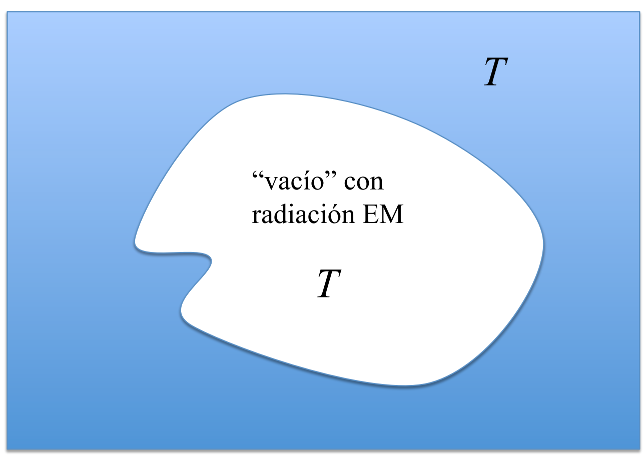

Figura 1: Cuerpo negro en equilibrio con radiación en cavidad

1. Energía

Consideremos a un cuerpo negro a temperatura T, el cual tiene una cavidad "vacía" en la que se establece equilibrio termodinámico de radiación electromagnética, vea la figura 1. Una vez en equilibrio, la energía almacenada por la radiación dentro de la cavidad debe ser

$$E = \sum_{\alpha=1}^{2} \int d^3k \int_V d^3r \; \rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T) \tag{1}$$

donde $\rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T) d^3r d^3k$ es la energía de radiación con vector de onda entre $\vec{k}$ y $\vec{k} + d^3k$, en el volumen entre $\vec{r}$ y $\vec{r} + d^3r$ y con polarización α. Note que $\rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T)$ es una densidad tanto en el espacio de coordenadas como en el de vectores de onda.

Debido a que la radiación está en equilibrio termodinámico a temperatura T, debe ser *homogénea*, *isotrópica* y *despolarizada*. De lo contrario habría flujo de energía, del cual podríamos obtener trabajo, en contradicción con el enunciado de Kelvin de la Segunda Ley. Así,

$$\rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T) = \rho(k, T) \tag{2}$$

es decir, la densidad de energía sólo depende de la magnitud $k = |\vec{k}|$, que es la frecuencia $k = 2\pi\nu/c$, y de la temperatura T.

Sustituyendo en la expresión de la energía, obtenemos,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\alpha=1}^{2} \int d^3k \int_V d^3r \; \rho(\vec{k}, \alpha, \vec{r}; T) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{2} \int d^3k \int_V d^3r \; \rho(k, T) \\ &= 2V \int d\Omega \int_0^\infty \rho(k, T) \, k^2 dk \\ &= V \int_0^\infty \left(8\pi \left(\frac{2\pi}{c} \right)^3 \rho(\nu, T)\nu^2 \right) d\nu \end{aligned} \tag{3}$$

donde usamos

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 4\pi \tag{4}$$

e hicimos el cambio de variable $k = 2\pi\nu/c$. Definimos

$$I(\nu, T) = 8\pi \left(\frac{2\pi}{c} \right)^3 \rho(\nu, T)\nu^2 \tag{5}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} E &= V\int_0^\infty I(\nu,T)\,d\nu \\ &= Vu(T). \end{aligned} \tag{6}$$

Esto es, $I(\nu,T)d\nu$ es la energía de radiación, por unidad de volumen, con frecuencia entre ν y $\nu+d\nu$. Por consiguiente

$$u(T) = \int_0^\infty I(\nu,T)\,d\nu \tag{7}$$

es la energía de radiación por unidad de volumen. Es función sólo de la temperatura.

2. Presión de radiación

La radiación electromagnética lleva, además de energía, momento o cantidad de movimiento. Se puede mostrar que si una onda electromagnética con vector de onda $\vec{k}$ y polarización α tiene energía por unidad de volumen $e(\vec{r},t;\vec{k},\alpha)$, tiene asociada una densidad de momento (momento por unidad de volumen) dada por $e(\vec{r},t;\vec{r},\alpha)\hat{k}/c$. Entonces, dado que la radiación de cuerpo negro tiene un continuo de frecuencias, definimos

$$d\vec{\mathbf{p}}_\alpha = \frac{1}{c}\rho(k,T)\hat{k}\,d^3k \tag{8}$$

como la densidad de momento de la radiación con vector de onda entre $\vec{k}$ y $\vec{k}+d^3k$.

Supongamos que radiación con momento entre $\vec{k}$ y $\vec{k}+d^3k$ incide sobre una diferencial de superficie $\hat{n}\Delta A$ de un cuerpo y es reflejada especularmente, vea la figura 2. Notamos que la cantidad de energía de radiación con vector $\vec{k}$ y contenida en un volumen $\Delta V = c\Delta t\Delta A\cos\theta$, con $\cos\theta = \hat{k}\cdot\hat{n}$, transferirá en un intervalo de tiempo Δt, la cantidad de movimiento dada por

$$\Delta\vec{P} = 2\,|d\vec{\mathbf{p}}_\alpha|\,\Delta V\cos\theta\hat{n}. \tag{9}$$

Y, por lo tanto, ejercerá una fuerza

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \\ &= 2\rho(k,T)d^3k\,\Delta A\cos^2\theta\hat{n}. \end{aligned} \tag{10}$$

Vemos entonces que la presión total que ejerce la radiación es la integral sobre la fuerza normal en todas la direcciones y polarizaciones *posibles* incidentes,

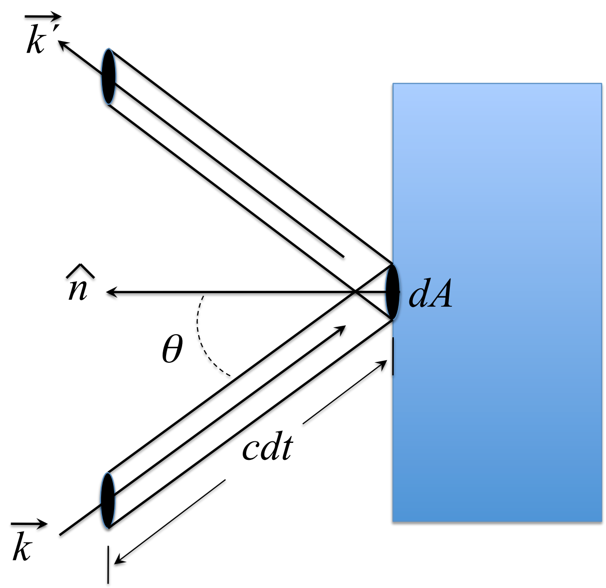

Figura 2: Radiación incide con vector $\vec{k}$ y es reflejada con vector $\vec{k}'$, con $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$. Existe una transferencia de momento que da lugar a una fuerza de la radiación sobre la pared, y a su vez, a una presión. Note que el ángulo θ no puede exceder $\pi/2$.

dividida por la superficie ΔA,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\Delta A}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{inc} d\vec{F}\cdot\hat{n} \\ &= 2\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{inc} d^3k\,\rho(k,T)\,\cos^2\theta \end{aligned} \tag{11}$$

donde la integral es sobre valores de $\vec{k}$ con direcciones en sólo "media esfera"

$$\int_{inc} d^3k = \int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int_0^{\pi}d\phi\int_0^{\infty}k^2dk. \tag{12}$$

Obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} p &= 4\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_0^{\pi}d\phi\int_0^{\infty}k^2dk\,\rho(k,T) \\ &= 4\frac{1}{3}2\pi\left(\frac{2\pi}{c}\right)^3\int_0^{\infty}\nu^2\rho(\nu,T)d\nu. \end{aligned} \tag{13}$$

Usando la definición de $I(\nu,T)$, vea la ecuación (5), hallamos

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3}8\pi\left(\frac{2\pi}{c}\right)^3\int_0^{\infty}\nu^2\rho(\nu,T)d\nu \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\infty} I(\nu,T)\,d\nu. \end{aligned} \tag{14}$$

Es decir, hallamos que la presión de radiación es un tercio de la densidad de energía,

$$p = \frac{1}{3}u(T). \tag{15}$$

3. Termodinámica

De las secciones anteriores hallamos dos relaciones importantes, la energía y la presión,

$$E = Vu(T), \tag{16}$$

$$p = \frac{1}{3}u(T). \tag{17}$$

Nótese que no depende de la variable N ... deberíamos preguntarnos ¿qué significado tiene el número de partículas en la radiación? sí lo tiene! porque la radiación puede verse como un gas de fotones ... pero aun así, es correcto, no existe dependencia en el número N. Queda como pregunta y lo resolverán en un curso de física estadística.

Por lo tanto, debe existir un potencial termodinámico energía libre de Helmholtz,

$$
\begin{aligned}
F &= F(T,V) \\
&= V f(T), \qquad (18)
\end{aligned}
$$

tal que se cumpla

$$
p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \qquad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V . \qquad (19)
$$

De la expresión de la presión obtenemos,

$$
\begin{aligned}
p &= -f(T) \\
&= \frac{1}{3}u(T). \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
f(T) = -\frac{1}{3}u(T). \qquad (21)
$$

Esto implica para la entropía,

$$
\begin{aligned}
S &= -V\frac{df(T)}{dT} \\
&= V\frac{1}{3}\frac{du(T)}{dT}. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Ahora, recordando que $F = E - TS$, hallamos

$$
\begin{aligned}
V f(T) &= V u(T) - V\frac{T}{3}\frac{du(T)}{dT} \\
-\frac{1}{3}u(T) &= u(T) - \frac{T}{3}\frac{du(T)}{dT} \qquad (23)
\end{aligned}
$$

que nos da una ecuación para $u(T)$

$$
\frac{du(T)}{dT} = 4\frac{u(T)}{T} \qquad (24)
$$

y que puede ser integrada, dando como resultado,

$$
u(T) = u_0\, T^4, \qquad (25)
$$

con u_0 una constante universal a ser determinada.

4. Ley de Stefan-Boltzmann

El teorema de Kirchhoff establece la condición de equilibrio:

$$
\mathcal{P}_e(\vec{k},\alpha,T)d\nu d\Omega = A(\vec{k},\alpha)\mathcal{P}_i(\vec{k},\alpha,T)d\nu d\Omega \qquad (26)
$$

donde $\mathcal{P}_e(\vec{k},\alpha,T)d\nu d\Omega$ es la energía emitida por la diferencial de área $\hat{n}dA$ de un cuerpo a temperatura T, por unidad de tiempo y unidad de área, en forma de radiación electromagnética con dirección $-\vec{k}$ y polarización α, alrededor de un ángulo sólido $d\Omega$ y con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$. Recordamos que el vector $\vec{k}$ nos da tanto la dirección de la radiación electromagnética emitida, como la frecuencia de dicha radiación, ya que $k = 2\pi\nu/c$. Análogamente, $\mathcal{P}_i(\vec{k},\alpha,T)d\nu d\Omega$ es la potencia por área de la radiación en equilibrio incidente en la misma diferencial de área, y $0 \leq A(\vec{k},\alpha) \leq 1$ es el coeficiente de absorción correspondiente del cuerpo. Un cuerpo negro es una idealización con $A(\vec{k},\alpha) = 1$ para toda $\vec{k}$ y α. Vea la figura 3.

Por lo tanto, considerando un cuerpo negro, tenemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e(\vec{k},\alpha,T)d\nu d\Omega &= \mathcal{P}_i(\vec{k},\alpha,T)d\nu d\Omega \\ &= \vec{\mathcal{S}} \cdot \hat{n}\, d^3k, \end{aligned} \tag{27}$$

donde $\vec{\mathcal{S}}d^3k$ es la densidad de corriente de energía en la dirección $\hat{k}$ y polarización α; es decir, la cantidad de energía que fluye, por unidad de área y por unidad de tiempo, en la dirección $\hat{k}$ con polarización α (o también, vector de Poynting entre $\vec{k}$ y $\vec{k} + d^3k$), y está dada por

$$\vec{\mathcal{S}}d^3k = \hat{k}c\rho(k,T)d^3k. \tag{28}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{P}_e(\vec{k},\alpha,T)d\nu d\Omega = c\rho(k,T)\cos\theta\, d^3k. \tag{29}$$

Expresando en términos de la frecuencia ν, obtenemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e(\vec{k},\alpha,T)d\nu d\Omega &= c\left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 \rho(\nu,T)\cos\theta\nu^2 d\nu d\Omega \\ &= \frac{c}{8\pi}\left(8\pi\left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 \rho(\nu,T)\nu^2\right)\cos\theta d\nu d\Omega \\ &= \frac{c}{8\pi}\, I(\nu,T)\, \cos\theta\, d\nu d\Omega. \end{aligned} \tag{30}$$

Por lo tanto, la energía radiada por el cuerpo, por unidad de tiempo y por unidad de área, (potencia por área), se obtiene sumando sobre las polarizaciones, integrando sobre todas las frecuencias, e integrando sobre media esfera de ángulo sólido,

$$\begin{aligned} J(T) &= \sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^\infty d\nu \int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta \int_0^{\pi} d\phi\, \mathcal{P}_e(\vec{k},\alpha,T) \\ &= 2\frac{c}{8\pi}\int_0^\infty I(\nu,T)d\nu \int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta \int_0^{\pi} d\phi \\ &= \frac{c}{4}\int_0^\infty I(\nu,T)d\nu \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c}{4}\,u(T) \\
&= \frac{c}{4}u_0T^4. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

Se acostumbra definir a la constante de Stefan-Boltzmann como

$$\sigma = \frac{c}{4}u_0 \qquad (32)$$

que es una cantidad medible y, por lo tanto, la cantidad de energía que emite un cuerpo negro, por unidad de tiempo y por unidad de área es,

$$J(T) = \sigma T^4. \qquad (33)$$

Esta es la llamada Ley de Stefan-Boltzmann. La constante tiene el valor

$$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}. \qquad (34)$$

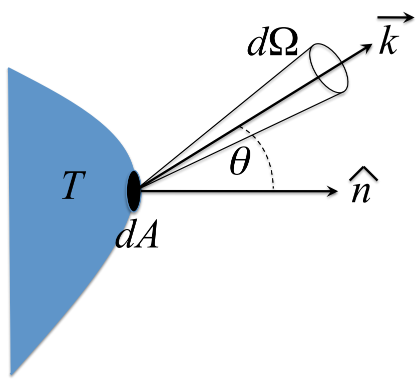

Figura 3: Radiación emitida por una diferencial de área de un cuerpo negro. Note que no puede emitir a ángulos mayores a $\theta = \frac{\pi}{2}$.