



Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias - Maestría en Ciencias (Física)

...

T E S I S

que para optar por el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

MANUEL ALEJANDRO ALDERETE LEZAMA

Tutor Principal:

DR. RUBÉN SANTAMARÍA ORTIZ

Instituto de Física, UNAM

Miembros del Comité Tutor:

...

Instituto de Física, UNAM

...

Facultad de Ciencias, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., XXXXXX DE 202X

Resumen

Agradecimientos

Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	V
1. Introducción	1
1.1. Teorema de Límite Central	1
1.1.1. Enunciado	1
1.1.2. Implicaciones	1
1.1.3. Demostración para variables independientes e idénticas	2
1.2. Aproximación de Stirling	4
1.3. Historia de la Termodinámica y la Física Estadística	5
1.4. Movimiento Browniano	6
Apéndice A. Variables aleatorias	9
A.1. Aspectos fundamentales	9
A.2. Variables independientes	10
A.3. Función característica	11
A.4. Variable normal aleatoria	12
A.4.1. Propiedades básicas	12
A.4.2. Teorema de transformación lineal	13
Bibliografía	13

1 Introducción

1.1. Teorema de Límite Central

1.1.1. Enunciado

Sea $\{X_i\}$ un conjunto de N variables aleatorias estadísticamente independientes con promedios $\{\mu_i\}$ y varianzas $\{\sigma_i^2\}$ finitas. El teorema del límite central asevera que la suma estándar Z_N , definida como

$$Z_N = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{j=1}^N \sigma_j^2}}, \quad (1.1)$$

es una variable aleatoria normal estándar en el límite $N \rightarrow \infty$ [1,2]¹. Por ende, la distribución de probabilidad correspondiente a Z_N en dicho límite es igual a

$$P(Z_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{Z_N^2}{2} \right]. \quad (1.2)$$

1.1.2. Implicaciones

El teorema del límite central también ofrece información sobre la suma S_N , equivalente a

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i. \quad (1.3)$$

Conforme a la Ecuación 1.1, es correcto expresar S_N en términos de Z_N :

$$S_N = \left(\sum_{i=1}^N \mu_i \right) + Z_N \sqrt{\sum_{j=1}^N \sigma_j^2} \quad (1.4)$$

Así, al ser S_N una transformación lineal de Z_N , es posible aproximar S_N por una variable aleatoria normal en el límite $N \rightarrow \infty$ [2], de acuerdo al teorema de límite central y el teorema de transformaciones lineales para variables normales (Ecuación A.18). Entonces, la distribución de probabilidad de S_N es equivalente a

¹Se entiende por estándar que la variable aleatoria tiene un promedio nulo y varianza unitaria.

$$P(S_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_N^2}} \exp \left[-\frac{(S_N - \tilde{\mu}_N)^2}{2\tilde{\sigma}_N^2} \right], \quad (1.5)$$

donde

$$\tilde{\mu}_N = \sum_{i=1}^N \mu_i, \text{ y} \quad (1.6a)$$

$$\tilde{\sigma}_N^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2. \quad (1.6b)$$

1.1.3. Demostración para variables independientes e idénticas

Sea $\{X_i\}$ un conjunto de N variables aleatorias independientes (Ecuación A.8) e idénticamente distribuidas².

Adicionalmente, las funciones características $\{M_{X_i}(k)\}$ de las variables $\{X_i\}$ están bien definidas, garantizando la finitud de sus momentos $\langle X^n \rangle \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (Ecuación A.13).

En particular, los promedios y las varianzas de las variables $\{X_i\}$ existen. Más aún, dichos momentos son todos iguales por tratarse de variables aleatorias con la misma densidad de probabilidad, de modo tal que

$$\mu_i = \mu_0, \text{ y} \quad (1.7a)$$

$$\sigma_i = \sigma_0, \quad (1.7b)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, N$. Consecuentemente, sigue que

$$\sum_{i=1}^N \mu_i = N\mu_0 \quad (1.8a)$$

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 = N\sigma_0^2 \quad (1.8b)$$

A partir de las observaciones previas, es válido expresar Z_N (Ecuación 1.1) como

²En la literatura, dichas variables son denotadas por el acrónimo *iid* en inglés.

$$\begin{aligned}
Z_N &= \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu_0)}{\sqrt{\sum_{j=1}^N \sigma_0^2}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu_0)}{\sqrt{N} \sigma_0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Y_i
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Tomando en cuenta la Ecuación A.4, resulta que

$$\begin{aligned}
\mu_{Y_i} &= \langle Y_i \rangle \\
&= \left\langle \frac{X_i - \mu_0}{\sigma_0} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sigma_0} (\langle X_i \rangle - \mu_0) \\
&= 0, \text{ y}
\end{aligned} \tag{1.10a}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{Y_i}^2 &= \langle (Y_i - \mu_{Y_i})^2 \rangle \\
&= \langle Y_i^2 \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sigma_0^2} \langle (X_i - \mu_0)^2 \rangle \\
&= 1
\end{aligned} \tag{1.10b}$$

Por ende, la función generadora de momentos de la suma Z_N es tal que

$$\begin{aligned}
M_{Z_N}(k) &= M_{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Y_i}(t) \\
&= \left\langle e^{\frac{ik}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Y_i} \right\rangle \\
&= \left\langle \prod_{i=1}^N e^{\frac{ik}{\sqrt{N}} Y_i} \right\rangle \\
&= \prod_{i=1}^N \left\langle e^{\frac{ik}{\sqrt{N}} Y_i} \right\rangle \\
&= \left\langle e^{\frac{ik}{\sqrt{N}} Y_1} \right\rangle^N \\
&= M_{Y_1} \left(k/\sqrt{N} \right)^N
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Al desarrollar la serie de Taylor del término exponencial dentro de la función característica $M_{Y_1} \left(k/\sqrt{N} \right)$ alrededor de $Y_1 = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 M_{Y_1} \left(k/\sqrt{N} \right) &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{kiY_1}{\sqrt{N}} \right)^n \right\rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \frac{1}{n!} \left(\frac{ikY_1}{\sqrt{N}} \right)^n \right\rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(ik)^n}{N^{n/2}} \langle Y_1^n \rangle \\
 &= 1 + \frac{ik\langle Y_1 \rangle}{\sqrt{N}} + \frac{(ik)^2 \langle Y_1^2 \rangle}{2!N} + \frac{(ik)^3 \langle Y_1^3 \rangle}{3!N^{3/2}} + \dots \\
 &= 1 + 0 - \frac{k^2}{2!N} + \frac{(ik)^3 \langle Y_1^3 \rangle}{3!N^{3/2}} + \dots,
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

donde la última línea procede de la Ecuación 1.10.

De acuerdo al límite planteado en [3], pp. 448-449, resulta que

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} M_{Z_N}(k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} M_{Y_1} \left(k/\sqrt{N} \right)^N \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{k^2}{2!N} + \frac{(ik)^3 \langle Y_1^3 \rangle}{3!N^{3/2}} + \dots \right]^N \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{k^2}{2N} \right]^N \\
 &= e^{-\frac{k^2}{2}},
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Como $e^{-k^2/2}$ es la función generadora de momentos de una variable normal con promedio cero y varianza unitaria (Ecuación A.17), el teorema queda demostrado.

1.2. Aproximación de Stirling

Evaluar el factorial $n!$ para $n \gg 1$ exactamente es un cálculo computacional costoso, cuyo resultado puede aproximarse a través de la aproximación de Stirling [4, 5]:

$$n! \sim n^n \exp[-n] \sqrt{2\pi n} \quad n \gg 1 \tag{1.14}$$

Considerando el peso de cada uno de los factores presentes en la ecuación anterior, la aproximación de Stirling también aparece definida como

$$n! \sim n^n \exp[-n] \quad n \gg 1 \tag{1.15}$$

La aproximación de Stirling incluso es útil para calcular factoriales lejos del límite $n \rightarrow \infty$ (Figura 1.1a; las discrepancias relativas entre los valores exactos y la aproximación de Stirling (en

sus dos formas) son apenas del 1% para $n \sim 100$ para la aproximación en la Ecuación 1.15(ver Figura 1.1b)³.

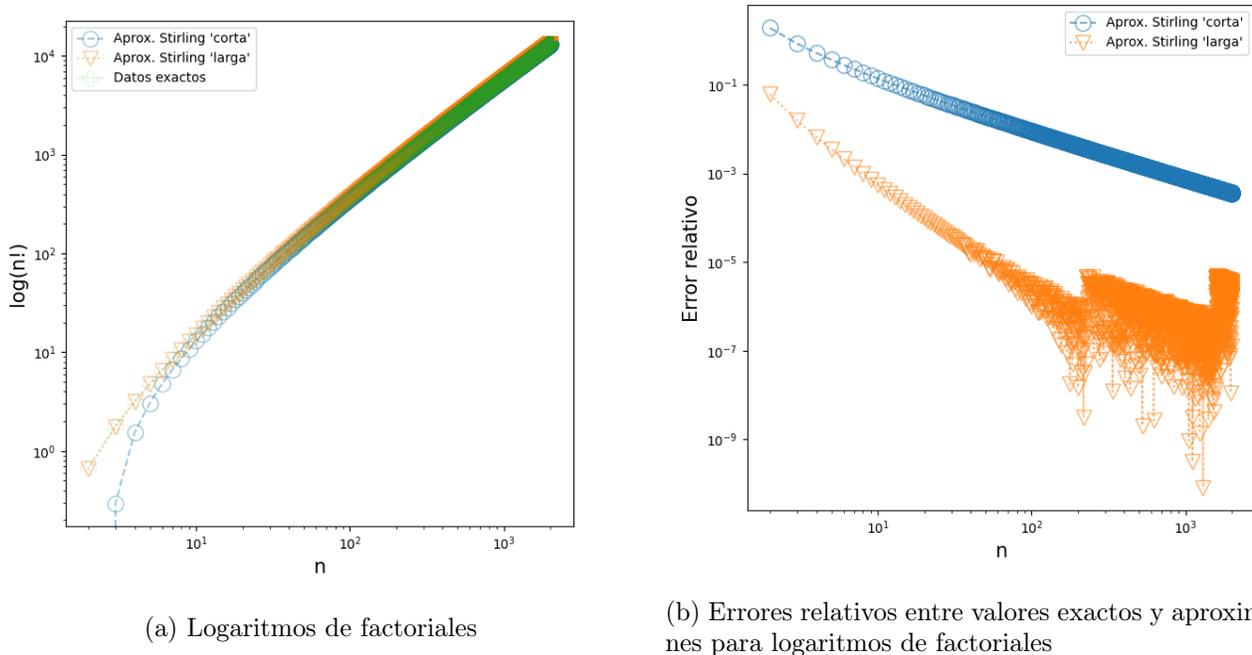


Figura 1.1: Comparación entre el logaritmo $\log(n!)$ y las aproximaciones de Stirling correspondientes. La aproximación de Stirling 'larga' consiste en la Ecuación 1.14, mientras que la aproximación de Stirling 'corta' está dada por la Ecuación 1.15.

1.3. Historia de la Termodinámica y la Física Estadística

- 130 a.C. - Hero de Alejandría diseña la primera máquina térmica, conocida como la aeolipila [7]. Dicho artefacto consistía en un globo hueco capaz de girar al ser alimentado con vapor de agua.
- 1786 - Lavoisier propone que el calor es un fluido elástico que se filtra en la materia al ser calentada [8, 9]. Bajo tal condición, este fluido ocupa el espacio entre las partículas de un cuerpo, desplazándolas unas de otras e incrementando su volumen.
- 1799 - Benjamin Thomson (el conde de Rumford) nota el calor generado durante la horadación de cañones y diseña varios experimentos para develar la naturaleza del calor [7]. En particular, emplea caballos para rotar un cilindro forzosamente alrededor de un taladro en su interior, produciendo calor en el proceso. Al efectuar dicho proceso dentro de un caja cerrada con agua

³Las gráficas en la Figura 1.1 muestran los logaritmos de los factoriales puesto que los valores de los factoriales mismos producen errores de desbordamiento por exceso de punto flotante [6]. La monotonía del logaritmo permite evaluar la validez de las aproximaciones de Stirling sin generar tal efecto numérico.

a temperatura ambiente, observa que la temperatura del líquido incrementa continuamente durante la operación de las máquinas, sin necesidad de prender fuego. Thomson concluye que el calor es generado por la fricción entre el cilindro y el taladro, descartando de paso la teoría del calórico.

- 1824 - Carnot observa que cualquier máquina térmica funciona a partir del calor que fluye entre cuerpos a distintas temperaturas. Además, diseña un dispositivo térmico ideal cuyo trabajo depende únicamente de la diferencia de temperaturas entre los reservorios que lo rodean determina el trabajo que efectúa dicho dispositivo. La eficiencia de tal máquina marca un límite superior a la eficiencia de cualquier otro artefacto de la misma índole [7].
- 1843-1850 - Joule realiza diferentes experimentos en los que efectúa trabajo mecánico sobre un sistema aislado y mide un incremento en su temperatura [7, 8]. Sus resultados revelan la existencia de la energía interna U como una variable de estado característica de sistemas termodinámicos y fundamentan la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = W + Q \tag{1.16}$$

- 1854 - Clausius define otra variable de estado, denominada entropía S [7, 8]. Establece la segunda ley de la termodinámica, la cual afirma que tal cantidad se mantiene constante en procesos reversibles e incrementa en procesos irreversibles (en sistemas aislados).
- 1872 - Boltzmann expresa la entropía en términos de las configuraciones microscópicas disponibles a sistemas termodinámicos [8, 10].

El presente trabajo representa la culminación de los numerosos esfuerzos enlistados por comprender el comportamiento de la materia a nivel macroscópico.

1.4. Movimiento Browniano

El movimiento Browniano es la trayectoria errática que describe una partícula macroscópica⁴ inmersa en un fluido a temperatura T [2, 11, 12]. El modelo de Langevin establece que la dinámica de un cuerpo browniano es afectada por dos fuerzas:

1. Una fuerza de arrastre $\vec{F}_{drag}(t)$. La forma específica de esta fuerza está dada por la ley de Stokes para la fricción que experimenta un cuerpo esférico de radio r inmerso en un fluido de viscosidad ξ :

$$\vec{F}_{drag} = 6\pi r \xi \vec{v}, \tag{1.17}$$

donde \vec{v} denota la velocidad del cuerpo.

⁴El tamaño de una partícula browniana es del orden de 10^{-6} m.

2. Una fuerza aleatoria \vec{F}_{rand} sin dirección preferencial ni correlaciones temporales, de modo tal que

$$\langle \vec{F}_{rand}(t) \rangle = 0, \text{ y} \quad (1.18a)$$

$$\langle \vec{F}_{rand}(t) \vec{F}_{rand}(t') \rangle = 2B\delta(t - t'). \quad (1.18b)$$

donde $\langle \dots \rangle$ representa un valor esperado calculado sobre la densidad de probabilidad de \vec{F}_{rand} .

Ambas fuerzas son el producto de las interacciones entre los átomos del medio y el objeto browniano, cuya velocidad satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$m\dot{\vec{v}}(t) = \gamma\vec{v}(t) + \vec{F}_{rand}(t), \quad (1.19)$$

con $\gamma = 6\pi r\xi$.

Las características de la fuerza fluctuante \vec{F}_{rand} planteadas en la Ecuación 1.18, comúnmente asignadas en base a observaciones empíricas, son en realidad consecuencias de un hecho más fundamental: \vec{F}_{rand} es el efecto neto de las colisiones entre la partícula browniana y cada uno los átomos circundantes del medio. Bajo tal perspectiva, \vec{F}_{rand} queda planteada como la suma de las fuerzas aleatorias individuales $\vec{f}_i(t)$ que ejercen los átomos del medio sobre el cuerpo browniano, esto es,

$$\vec{F}_{rand}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i(t), \quad (1.20)$$

donde N denota el número de átomos que rodean al objeto browniano.

Las fuerzas $\vec{f}_i(t)$ cuentan con las siguientes propiedades:

- La magnitud y dirección de la fuerza $\vec{f}_i(t)$ que imparte el i -ésimo átomo del medio sobre la partícula browniana únicamente depende de la interacción entre tal par de cuerpos, es decir, es independiente de los demás átomos del fluido.
- Los átomos del medio son comparables entre sí; cuentan con las mismas dimensiones y la naturaleza de sus interacciones con el cuerpo browniano es la misma.

La condición de \vec{F}_{rand} como fuerza aleatoria, su relación con las fuerzas atómicas $\{\vec{f}_i\}$ y las propiedades de éstas sugieren identificar dichas fuerzas con las variables aleatorias presentadas en la Sección 1.1. En particular, el conjunto de las componentes cartesianas de las fuerzas atómicas consiste en una colección de variables aleatorias *iid* y las componentes de su resultante son sus respectivas sumas S_N (Ecuación 1.3), es decir,

$$\{\vec{f}_{i,\alpha}\} \iff \{X_i\} \quad (1.21)$$

$$\vec{F}_{rand,\alpha} \iff S_N \quad (1.22)$$

donde $\alpha = x, y, z$.

Al ser variables aleatorias idénticamente distribuidas, las componentes de las fuerzas $\{\vec{f}_i(t)\}$ comparten una distribución de probabilidad, de modo tal que sus promedios y varianzas son equivalentes entre sí:

$$\mu_{i,\alpha} = \mu_{j,\beta} = \mu, \quad (1.23a)$$

$$\sigma_{i,\alpha}^2 = \sigma_{j,\beta}^2 = \sigma^2, \quad (1.23b)$$

$$\forall i, j = 1, 2, \dots, N; \alpha, \beta = x, y, z.$$

Conforme a las Ecuaciones 1.5 y 1.6 y el vasto número de átomos alrededor del cuerpo browniano, cada una de las tres componentes de la fuerza \vec{F}_{rand} tiene una densidad de probabilidad normal dada por

$$P(\vec{F}_{rand,\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{rand}^2} \exp \left[-\frac{\left(\vec{F}_{rand,\alpha} - \mu_{rand}\right)^2}{2\sigma_{rand}^2} \right], \quad (1.24)$$

donde

$$\mu_{rand} = N\mu, \quad (1.25a)$$

$$\sigma_{rand}^2 = N\sigma^2, \quad (1.25b)$$

para $\alpha = x, y, z$.

A Variables aleatorias

El presente capítulo sigue la discusión planteada en [2], con la misma notación.

A.1. Aspectos fundamentales

La probabilidad $P_X(a < x < b)$ de observar una instancia específica x de la variable aleatoria continua X dentro del intervalo (a, b) puede expresarse en términos de la densidad de probabilidad $p_X(x)$ correspondiente como

$$P_X(a < x < b) = \int_a^b dx p_X(x). \quad (\text{A.1})$$

Como la probabilidad de que la variable X adquiera *algún* valor finito es equivalente a 1, la densidad $p_X(x)$ satisface la siguiente condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx p_X(x) = 1 \quad (\text{A.2})$$

El valor esperado de una función arbitraria $f(X)$ de la variable aleatoria X queda entonces definido como

$$\langle f(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) p_X(x). \quad (\text{A.3})$$

La definición anterior revela que el valor esperado es lineal, es decir,

$$\begin{aligned} \langle af(X) + bg(X) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx (af(x) + bg(x)) p_X(x) \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) p_X(x) + b \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) p_X(x) \\ &= a \langle f(X) \rangle + b \langle g(X) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

para constantes $a, b \in \mathbb{R}$ y funciones $f(X), g(X)$ genéricas.

Por ejemplo, el momento $\langle X^n \rangle$ de la variable aleatoria X es equivalente al valor esperado de la n -ésima potencia de X , esto es,

$$\langle X^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n p_X(x), \quad (\text{A.5})$$

donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Entre los distintos momentos de una variable aleatoria X , se distingue el promedio μ_X definido como

$$\begin{aligned}\mu_X &= \langle X \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x \, p_X(x), \quad y\end{aligned}\tag{A.6}$$

Asimismo, cabe destacar la varianza σ_X^2 , equivalente al valor esperado de la diferencia cuadrada de la variable X respecto a su promedio μ_X :

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \langle (X - \mu_X)^2 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, (x - \mu_X)^2 \, p_X(x) \\ &= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2.\end{aligned}\tag{A.7}$$

A.2. Variables independientes

Dos variables continuas X y Y son independientes si la probabilidad de observar el valor x para X no afecta la probabilidad de observar y para Y . Tal condición implica que la densidad de probabilidad conjunta $p(x \& y)$ simultáneamente es equivalente al producto de las densidades individuales:

$$p(x \& y) = p_X(x)p_Y(y).\tag{A.8}$$

Una consecuencia inmediata de la independencia de variables aleatorias se ve reflejada en el valor esperado de su producto, el cual queda determinado como

$$\begin{aligned}\langle XY \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, dy \, xy \, p(x \& y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, dy \, xy \, p_X(x)p_Y(y) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \, x \, p_X(x) \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy \, y \, p_Y(y) \right) \\ &= \langle X \rangle \langle Y \rangle\end{aligned}\tag{A.9}$$

A partir de tales hechos, el promedio y la varianza de la suma de dos variables aleatorias independientes pueden estimarse como

$$\begin{aligned}
\mu_{X+Y} &= \langle X + Y \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (x + y) p(x \& y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (x + y) p(x)p(y) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx x p_X(x) \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy p_Y(y) \right) \\
&\quad + \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx p_X(x) \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy y p_Y(y) \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx x p_X(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dy y p_Y(y) \\
&= \mu_X + \mu_Y, \quad y
\end{aligned} \tag{A.10a}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{X+Y}^2 &= \langle (X + Y - \mu_{X+Y})^2 \rangle \\
&= \langle (X + Y - \mu_X - \mu_Y)^2 \rangle \\
&= \langle (X - \mu_X)^2 \rangle + \langle (Y - \mu_Y)^2 \rangle \\
&\quad + 2 \langle (X - \mu_X)(Y - \mu_Y) \rangle \\
&= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2 (\langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle) \\
&= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2
\end{aligned} \tag{A.10b}$$

A.3. Función característica

La función característica $M_X(k)$ de una variable aleatoria X es el valor esperado de la función e^{ikX} (con $k \in \mathbb{R}$) [13]:

$$M_X(k) = \langle e^{ikX} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} p_X(x) \tag{A.11}$$

Desarrollando e^{ikX} en su serie de Taylor alrededor de $k = 0$, sigue que

$$\begin{aligned}
M_X(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikX} p_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikX)^n}{n!} \right] p_X(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx X^n p_X(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle
\end{aligned} \tag{A.12}$$

La serie anterior revela el rol de $M_X(k)$ como una función generadora de momentos, puesto que

$$\langle X^n \rangle = (-i)^n \left[\frac{d^n M_X(k)}{dk^n} \right]_{k=0} \tag{A.13}$$

A.4. Variable normal aleatoria

A.4.1. Propiedades básicas

Una variable aleatoria normal $X_N = N(\mu, \sigma^2)$ cuenta con una densidad de probabilidad $p_N(x)$ equivalente a

$$p_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \tag{A.14}$$

donde μ y σ^2 corresponden al promedio y la varianza respectivamente.

La función característica de una variable normal aleatoria es igual a

$$\begin{aligned}
M_N(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[ikx - \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (2i\sigma^2 kx - (x - \mu)^2) \right] \\
&= \frac{\exp \left[ik\mu - \frac{\sigma^2 k^2}{2} \right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-\frac{(x - \mu - i\sigma^2 k)^2}{2\sigma^2} \right] \\
&= \frac{\exp \left[ik\mu - \frac{\sigma^2 k^2}{2} \right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} du \exp \left[-\frac{u^2}{2\sigma^2} \right] \\
&= \exp \left[ik\mu - \frac{\sigma^2 k^2}{2} \right],
\end{aligned} \tag{A.15}$$

considerando la normalización dada en la Ecuación A.2 y el hecho de que

$$[(x - \mu) - i\sigma^2 k]^2 = (x - \mu)^2 - 2i\sigma^2 k(x - \mu) - \sigma^4 k^2 \quad (\text{A.16})$$

En particular, la función característica de una variable aleatoria con promedio $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$ queda definida como

$$M_{N(0,1)}(k) = \exp \left[-\frac{k^2}{2} \right] \quad (\text{A.17})$$

A.4.2. Teorema de transformación lineal

El teorema de transformaciones lineales para variables normales establece que una función lineal de una variable aleatoria normal $N(\mu, \sigma^2)$ consiste en otra variable normal $N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$, donde

$$N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2) = N(a + b\mu, b^2\sigma^2) = a + bN(\mu, \sigma^2) \quad (\text{A.18})$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Bibliografía

- [1] N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. Elsevier Science B.V., 1992.
- [2] D. S. Lemons, *An Introduction to Stochastic Processes in Physics*. The Johns Hopkins University Press, 2002.
- [3] R. Courant and H. Robbins, *What is Mathematics?: an elementary approach to ideas and methods*. Oxford University Press, 1996.
- [4] Numberphile, “Big factorials - numberphile.” <https://www.youtube.com/watch?v=6ofIBoWGc7k>. (Revisado el 13 de diciembre de 2024).
- [5] D. V. Schroeder, *An Introduction to Thermal Physics*. Addison Wesley Longman, 2000.
- [6] W. D. Villanueva, “3.4 - desbordamiento por exceso y desbordamiento por defecto.” <https://www.uv.es/diaz/mn/node15.html>. (Revisado el 13 de diciembre de 2024).
- [7] L. G.-C. Scherer, *De la máquina de vapor al cero absoluto (calor y entropía)*. Fondo de Cultura Económica, tercera edición ed., 1992.
- [8] A. Mukherjee, “History of thermodynamic[sic].” <https://www.youtube.com/watch?v=fdIJOG-g6QE>, 2019. (Revisado el 04 de diciembre de 2024).
- [9] N. W. Best, “Lavoisier’s reflections on phlogistonii. on the nature of heat,” *Found Chem*, pp. 3–13, 2016.
- [10] D. Tong, “Statistical physics.” <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/statphys.html>, 2012.
- [11] F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*. McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [12] R. Zwanzig, *Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Oxford University Press, 2001.
- [13] D. Sornette, *Critical Phenomena in Natural Sciences - Chaos, fractals, selforganization and disorder: Concepts and Tools*. Springer, 2000.

